Доклады Национальной академии наук Беларуси
2016 сентябрь–октябрь Том 60 № 5

УДК 511.42

А. В. ЛУНЕВИЧ

О КОЛИЧЕСТВЕ ТОЧЕК С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ ВНУТРИ ПОЛОСЫ МАЛОЙ МЕРЫ В ПОЛЕ $\mathbb{Q}_p$

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
lunevichav@gmail.com

В данной работе исследуется оценка сверху количества точек с целыми p-адическими сопряженными алгебраическими координатами внутри полосы малой меры, около нормальной по Малеру кривой.

Ключевые слова: целые p-адические числа, точки с алгебраическими координатами, диофантовы приближения.

A. V. LUNEVICH

ABOUT THE NUMBER OF POINTS WITH THE ALGEBRAIC COORDINATES IN A STRIP OF SMALL MEASURE IN THE FIELD

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
lunevichav@gmail.com

In this article, we consider the upper bound on the number of points with the integer p-adic conjugate algebraic coordinates in a strip of small measure, near the curve normal by Mahler.

Keywords: integral p-adic number, the point with algebraic coordinates, Diophantine approximations.

Задачи о количестве целых точек внутри фигур и тел в евклидовых пространствах берут свое начало в работах Дирихле и Гаусса. Многие такие задачи или уже решены, или имеют трудно улучшаемые оценки сверху и снизу, например, проблема круга Гаусса и проблема делителей Дирихле. В этих задачах получены оценки сверху и снизу для остаточного члена в асимптотической формуле, причем верхняя оценка постепенно улучшается и приближается к нижней [1]. За последние годы было получено много новых результатов об оценках количества алгебраических чисел в коротких интервалах [2; 3]. Недавно появилась новая работа о количестве рациональных точек внутри областей в $\mathbb{R}^2$ [4]. Задачи подобного типа имеют место не только в евклидовых пространствах. Например, в [5] доказана теорема Хинчиновского типа в поле p-адических чисел.

В данной работе мы рассмотрим задачу, аналогичную задаче в [2] в поле p-адических чисел.

Далее мы будем использовать обозначения как в [6]. Зафиксируем простое число $p \geq 2$, $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, $|x|_p$ – p-адическая норма числа $x \in \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p-адических чисел. Цилиндром в $\mathbb{Z}_p$ с центром $d \in \mathbb{Z}_p$ и радиусом $r > 0$ будем называть множество

$$\{\omega \in \mathbb{Z}_p : |d - \omega|_p \leq r\}.$$

В поле целых рациональных чисел p-адической нормой числа $x \in \mathbb{Z}$ называется величина $|x|_p = p^{-\alpha}$, где p^{α} – максимальная степень простого числа p, входящая в разложение на множители числа x. В поле рациональных чисел p-адической нормой числа $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ является величина $\left|\frac{x}{y}\right|_p = \frac{|x|_p}{|y|_p}$.

Известно, что поле $\mathbb{Q}_p$ является локально компактным и на нем можно определить Меру Хаара, обозначаемую через μ и нормированную так, что $\mu\mathbb{Z}_p = 1$ [7].

О п р е д е л е н и е. *Функция $f:\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ называется нормальной, если она имеет вид*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

где $a, a_n \in \mathbb{Z}_p$ для всех n и

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0.$$

Данное определение было предложено Малером [8].

Нам понадобятся два важных свойства нормальных функций:

1) производные $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ также являются нормальными функциями;

2) нормальная функция над $\mathbb{Z}_p$ раскладывается в ряд Тейлора [9], что неверно для произвольной p-адической функции [10, с. 223].

Пусть n – некоторое фиксированное натуральное число.

Рассмотрим полином от p-адической переменной степени n с целыми рациональными коэффициентами:

$$P(\omega) = a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \ldots + a_1\omega + a_0.$$

Высотой такого многочлена будем называть величину $H(P) = \max\limits_{0\le i\le n}\{|a_i|\}$. Зафиксируем достаточно большое действительное положительное число Q. Множество всех полиномов степени не превосходящей n и высотой, не превосходящей Q, обозначим $\mathcal{P}_n(Q)$. Точку

$$\bar{\gamma} = (\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k) \in \mathbb{Z}_p^k$$

будем называть алгебраической точкой, если $\gamma_i, i = 1, \ldots, k$ – корни одного и того же неприводимого полинома $P(\omega) = a_n\omega^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_0$ и $n \ge k$. Для каждой такой точки определим ее высоту $H(\bar{\gamma}) = H(P)$, где $P(\gamma_i) = 0, i = 1, \ldots, k$ и $P(\omega)$ – минимальный многочлен чисел γ_i.

Обозначим $A_n^k(Q)$ множество всех алгебраических точек $\bar{\gamma}$ степени не превосходящей n и высоты, не превосходящей Q, т. е.

$$A_n^k(Q) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}_p^k : \deg(\bar{\gamma}) \le n, H(\bar{\gamma}) \le Q\}.$$

Кроме того, через $A_n^k(Q, D) = A_n^k(Q) \bigcap D$ обозначим множество алгебраических точек из $A_n^k(Q)$, которые принадлежат некоторой области $D \subset \mathbb{Z}_p^k$.

Для каждого натурального x определим величину $l_p(x) = p^{[\log_p x]}$ такую, что $p^l \le x \le p^{l+1}$.

Т е о р е м а 1. *При $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ для любого цилиндра $\Pi = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{Z}_p^2$ с центром в точке $\bar{d}$ и $\mu I_i = p^{[\log_p Q^{-\lambda_i}]}, i = 1, 2$, при $Q > Q_0(n, \bar{\lambda}, \bar{d})$ справедлива оценка*

$$\# A_n^2(Q, \Pi) \le c_1 Q^{n+1}\mu\Pi,$$

где $c_1 = 4 \cdot 2^{2n} n^2 + 1$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а. *Обозначим через $G = G(\bar{\gamma}, T) \subset \mathbb{Z}^2$ (где $\bar{\gamma} = (\gamma_1; \gamma_2) \in \mathbb{Z}_p^2$ – фиксированная точка из $\mathbb{Z}_p^2$) множество точек $\bar{b} = (b_1; b_0) \in \mathbb{Z}^2$, таких, что выполняются следующие неравенства:*

$$\begin{cases} |b_1\gamma_1 + b_0|_p \le T_1; \\ |b_1\gamma_2 + b_0|_p \le T_2; \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p \ge \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $|b_1|, |b_0| \le Q$, где Q – достаточно большое натуральное число. Тогда справедлива оценка

$$\# G \le \max\{2\varepsilon^{-1}QT_1; 1\}\max\{2QT_2; 1\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности будем считать, что $T_1 \ge T_2$. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1\gamma_1 + b_0 = l_1, \\ b_1\gamma_2 + b_0 = l_2, \end{cases} \tag{2}$$

где $\left|l_i\right|_p \le T_i, i = 1, 2$. Ясно, что при таком условии решение системы (2) удовлетворяет неравенствам (1). В таком случае задача сводится к оценке количества целых решений системы (2) при различных $\left|l_i\right|_p \le T_i, i = 1, 2$.

Рассмотрим разность уравнений (2):

$$b_1(\gamma_1 - \gamma_2) = l_1 - l_2.$$

При $\left|\gamma_1 - \gamma_2\right|_p \ge \varepsilon > 0$ и $\left|l_i\right|_p \le T_1$ верно

$$\left|b_1\right|_p = \frac{\left|l_1 - l_2\right|_p}{\left|\gamma_1 - \gamma_2\right|_p} \le \varepsilon^{-1} T_1.$$

Тогда $\# b_1 \le 2\varepsilon^{-1} T_1 Q$.

Зафиксируем одно из значений b_1 и оценим количество возможных целых значений переменной b_0. Рассмотрим систему (2) для двух различных наборов $(b_1, b_{0,0})$ и $(b_1, b_{0,j})$:

$$\begin{cases} b_1\gamma_1 + b_{0,0} = l_{1,0}, \\ b_1\gamma_1 + b_{0,j} = l_{0,j}, \\ b_1\gamma_2 + b_{0,0} = l_{1,0}, \\ b_1\gamma_2 + b_{0,j} = l_{1,j}. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого и четвертое уравнение из третьего. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \left|b_{0,0} - b_{0,j}\right|_p = \left|l_{1,0} - l_{1,j}\right|_p \le T_1, \\ \left|b_{0,0} - b_{0,j}\right|_p = \left|l_{2,0} - l_{2,j}\right|_p \le T_2. \end{cases}$$

Данные неравенства означают, что $\# b_0 \le 2T_2 Q_0$. Из вышесказанного следует, что

$$\# G \le \max\{2\varepsilon^{-1} T_1 Q; 1\} \max\{2T_2 Q; 1\}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $\# A_n^2(Q, \Pi) > c_2 Q^{n+1} \mu\Pi$. Рассмотрим алгебраическую точку $\overline{\gamma} \in A_n^k(Q, \Pi)$ с минимальным многочленом $P(t)$ и оценим его значение в точке $\overline{d}$. Для этого разложим $P(t)$ в ряд Тейлора в цилиндре $I_i, i = 1, 2$:

$$P(d_i) = P(\gamma_i) + P'(\gamma_i)(d_i - \gamma_i) + \frac{1}{2} P''(\gamma_i)(d_i - \gamma_i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\gamma_i)(d_i - \gamma_i)^n.$$

Оценим сверху каждое слагаемое в этом разложении.

Для оценки сверху $\left|\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)\right|_p$ запишем общий вид производной $P^{(k)}(\gamma_i)$:

$$P^{(k)}(\gamma_i) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n \gamma_i^{(n-k)} + \ldots + \frac{j!}{(j-k)!} a_j \gamma_i^{j-k} + \ldots + \frac{k!}{(k-k)!} a_k.$$

Отсюда видно, что многочлен $\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)$ имеет целые рациональные коэффициенты $\frac{j!}{k!(j-k)!} a_j$, где $k \le j \le n$. Так как многочлен $\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)$ имеет целые рациональные коэффициенты и $\gamma_i, d_i \in I_i \subset \mathbb{Z}_p$, то при $Q > Q_0(\overline{d}, \overline{\gamma}, n)$, верны следующие неравенства:

$$\left|\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)\right|_p \le \max_{k \le j \le n} \left|\frac{j!}{k!(j-k)!} a_j \gamma_i^{j-k}\right|_p \le 1,$$

$$\left|\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)(d_i - \gamma_i)^k\right|_p \le \mu I_i.$$

Тогда

$$\left|P(d_i)\right|_p \le \max_{0\le k\le n}\left\{\left|\frac{1}{k!}P^{(k)}(\gamma_i)(d_i-\gamma_i)^k\right|_p\right\} \le \mu I_i. \qquad (3)$$

Зафиксируем вектор $\overline{a}_1=(a_n,a_{n-1},\dots,a_2)$, где $a_n,a_{n-1},\dots,a_2$ – коэффициенты многочленов $P(t)\in\mathcal{P}(Q)$, для которых выполняются оценки (3). Рассмотрим подкласс многочленов с одним и тем же вектором коэффициентов $\overline{a}_1$: $P(t)\in\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_1)$. Количество таких подклассов можно оценить как

$$\#\overline{a}_1=(2Q+1)^{n-1}<2^{2n}Q^{n-1}. \qquad (4)$$

Отметим, что каждой точке из множества $A_n^2(Q,\Pi)$ соответствует многочлен $P(t)\in\mathcal{P}_n(Q)$. С другой стороны, каждому многочлену $P(t)\in\mathcal{P}_n(Q)$ может соответствовать не более чем n^2 точек из множества $A_n^2(Q,\Pi)$. Тогда с учетом оценки (4) и предположения о количестве элементов множества $A_n^2(Q,\Pi)$, из принципа Дирихле следует, что найдется такой вектор $\overline{a}_{1,0}$, для которого верно

$$\#\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_{1,0})\ge c_2 2^{-2n}n^{-2}Q^2\mu\Pi. \qquad (5)$$

Оценим величину $\#\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_{1,0})$ сверху. Для этого выберем некоторый многочлен $P_0\in\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_{1,0})$ и рассмотрим разность многочленов P_0 и $P_j\in\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_{1,0})$ в точках d_i, $i=1,2$. Из оценок (3) следует

$$\left|P_0(d_i)-P_j(d_i)\right|_p=\left|(a_{0,1}-a_{j,1})d_i+(a_{0,0}-a_{j,0})\right|_p\le\mu I_i.$$

Тогда количество различных полиномов $P_j\in\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_{1,0})$ не превосходит количества целых решений системы неравенств

$$\begin{cases}\left|P_0(d_1)-P_j(d_1)\right|_p=\left|(a_{0,1}-a_{j,1})d_1+(a_{0,0}-a_{j,0})\right|_p\le\mu I_1,\\ \left|P_0(d_2)-P_j(d_2)\right|_p=\left|(a_{0,1}-a_{j,1})d_2+(a_{0,0}-a_{j,0})\right|_p\le\mu I_2.\end{cases}$$

Воспользуемся леммой при $T_1=\mu I_1, T_2=\mu I_2$. Так как $\mu I_i=p^{[\log_p Q^{-\lambda_i}]}$, $i=1,2$, и $\lambda_i<1$, то $QT_i=Q\mu I_i=Qp^{[\log_p Q^{-\lambda_i}]}>1$. В таком случае получаем

$$j\le 4\left|d_1-d_2\right|_p Q^2\mu\Pi.$$

Следовательно, $\#\mathcal{P}_n(Q,\overline{a}_{1,0})\le 4Q^2\mu\Pi$, что противоречит неравенству (5) при $c_1=4\cdot 2^{2n}n^2+1$. Это означает, что $\#A_n^2(Q,\Pi)\le c_1Q^{n+1}\mu\Pi$.

Теорема 1 доказана.

Пусть $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ – функция от p-адической переменной. Зафиксируем некоторое действительное число $\tau\in(0,1)$. Обозначим через $M_f^n(Q,\tau)$ множество всех алгебраических точек $\overline{\gamma}\in\mathbb{Z}_p^2$, которые удовлетворяют условиям:

1) $H(\overline{\gamma})\le Q$;

2) $\deg(\overline{\gamma})\le n$;

3) $\left|f(\gamma_1)-\gamma_2\right|_p\le p^{[\log_p Q^{-\tau}]}$.

Таким образом

$$M_f^n(Q,\tau)=\{\overline{\gamma}\in\mathbb{Z}_p^2:\left|f(\gamma_1)-\gamma_2\right|_p\le p^{[\log_p Q^{-\tau}]},\ H(\overline{\gamma})\le Q,\ \deg(\overline{\gamma})\le n,\ \tau\in(0,1)\}.$$

Т е о р е м а 2. *Если функция $f(\omega)$ является нормальной, то имеет место неравенство*

$$\#M_f^n(Q,\tau)\le c_2Q^{n+1-\tau},$$

где c_2 – константа, зависящая только от n.

Данная теорема доказывается применением теоремы 1, после покрытия области $D_f(Q,\tau)=\{(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{Z}_p^2:\left|f(\omega_1)-\omega_2\right|_p\le p^{[\log_p Q^{-\tau}]}\}$ цилиндрами Π.

Список использованной литературы

1. *Карацуба, А. А.* Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. – М.: Наука, 1983. – 2-е изд. – 240 с.

2. *Берник, В. И.* Распределение алгебраических чисел и точек с алгебраическими сопряженными координатами в областях малой меры / В. И. Берник, Ф. Гётце, А. Г. Гусакова / Ин-т математики НАН Беларуси, препринт № 1 (578). – Минск, 2016.

3. *Гётце, Ф.* Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 11–17.

4. *Beresnevich, V.* Metric Diophantine Approximation : aspects of recent work / V. Beresnevich, F. Ramirez, S. Velani; ed. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Peyerimhoff. – Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

5. *Beresnevich, V.* On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers / V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya // Journal of Number Theory. – 2005. – Vol. 111, N 1. – P. 33–56.

6. *Бересневич, В. В.* О диофантовых приближениях зависимых величин в *p*-адическом случае / В. В. Бересневич, Э. И. Ковалевская // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, вып. 1. – С. 22–37.

7. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967.

8. *Mahler, K.* *p*-Adic Numbers and Their Functions / K. Mahler // Cambridge Tracts in Math. – Vol. 76. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.

9. *Adams, W. W.* Transcendental numbers in the *p*-adic domain / W. W. Adams. // Amer. J. Math. – 1966. – Vol. 88, N 2. – P. 279–308.

10. *Mahler, K.* Über transzendente P-adische Zahlen / K. Mahler // Composito Math. – 1935. – Vol. 2. – P. 259–275.

Поступило в редакцию 18.08.2016