Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **сентябрь–октябрь** **Том 60 № 5**

УДК 517:983

Н. А. ЕВХУТА[1], О. Н. ЕВХУТА[1], П. П. ЗАБРЕЙКО[2]

NL-ПРОИЗВОДНЫЕ И NL-ПРИМИТИВНЫЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ И ИНТЕГРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

[1]Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова, Новочеркасск, Российская Федерация
evhuta@gmail.com
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru

В сообщении для вещественных функций вещественного переменного изучаются взаимосвязи между классическими производными и введенными авторами NL-производными, производными обычных функций, рассматриваемых как обобщенные, производными Радона–Никодима. Устанавливаются теоремы об NL-производных суммы и произведения функций, а также об NL-производных сложной и обратной функций. Показано, как понятие NL-производных для функций между банаховыми пространствами сводится к понятию NL-производных скалярных функций одного переменного.

Ключевые слова: производные, производные Ньютона–Лейбница, производные Радона–Никодима, первообразные (неопределенный интеграл Курцвейля–Хенстока), множества меры нуль, ничтожные множества.

N. A. EVKHUTA[1], O. N. EVKHUTA[1], P. P. ZABREIKO[2]

NL-DERIVATIVES AND NL-PRIMITIVES IN CALCULUS

[1]Platov South-Russian State Polytechnic University, Novocherkassk, Russian Federation
evhuta@gmail.com
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus
zabreiko@mail.ru

For the real functions of a real variable, the relations between the notions of ordinary derivatives and NL-derivatives (introduced by the authors), the derivatives of ordinary functions considered as distributions, and the Radon–Nikodym derivatives are studied. The theorems on the NL-derivatives of the sum and product of functions, as well as on the NL-derivatives of composite and inverse functions are given. The reduction of the notion of the NL-derivatives between the Banach spaces to the derivatives of the scalar functions of a real variable is considered as well.

Keywords: derivatives, Newton–Leibnitz derivatives, Radon–Nikodym derivatives, primitives (Kurzweil–Henstock indefinite integral), sets with zero measure, negligible sets.

В работах [1; 2] в связи с анализом сходимости метода Ньютона–Канторовича (см., напр., [3; 4]) приближенного решения операторных уравнений было предложено следующее определение обобщенной производной. Именно, если X и Y – банаховы пространства, Ω – область в X, $f:\Omega\to Y$ – непрерывная функция, $g:\Omega\to L(X,Y)$ – функция со значениями в пространстве $L(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y, то g называется NL-*производной* функции f (а функция f NL-*примитивной* функции g), если для любого отрезка $[a,b]=\{(1-\lambda)a+\lambda b:0\le\lambda\le 1\}\subset\Omega$ с началом a и концом b верно равенство

$$f(b)-f(a)=\int_a^b g(x)dx=\int_0^1 g((1-\lambda)a+\lambda b)(b-a)d\lambda. \qquad (1)$$

Здесь первый интеграл понимается как криволинейный вдоль отрезка $[a, b]$, по определению равный второму, который является обычным интегралом от скалярной или векторной функции, определенный на отрезке $[0, 1]$.

Ниже на протяжении всего сообщения этот интеграл понимается в смысле Курцвейля–Хенстока [5–8]. Напомним определение этого интеграла. Число I называется *интегралом Курцвейля–Хенстока* от определенной на промежутке $[a, b]$ скалярной функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая определенная на $[a, b]$ положительная функция $\delta(x)$, что для всякого разбиения $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_s = b$ с отмеченными точками $\xi_\sigma \in [x_{\sigma-1}, x_\sigma]$, $\sigma = 1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющего условию $[x_{\sigma-1}, x_\sigma] \subset (\xi_\sigma - \delta(x_\sigma), \xi_\sigma + \delta(x_\sigma))$ (такие разбиения всегда существуют!), верно неравенство $\left| I - \sum\limits_{\sigma=1}^{s} f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1}) \right| < \varepsilon$. Аналогично определяется интеграл Курцвейля–Хенстока и для векторных функций с заменой в последнем неравенстве символа абсолютной величины $|\cdot|$ на символ нормы $\|\cdot\|$. Понятие интеграла Курцвейля–Хенстока совпадает с введенными много ранее интегралами Перрона и Данжуа, определения которых были существенно более сложными. Интеграл Курцвейля–Хенстока обобщает понятие интегралов Римана и Лебега и охватывает различные понятия несобственных интегралов.

Для некоторых функций интеграл Курцвейля–Хенстока совпадает с собственным или несобственным интегралом Римана или интегралом Лебега в случае $Y = \mathbb{R}$ или Бохнера в случае банахова пространства. Однако в общем случае использование интегралов Римана и Лебега/Бохнера существенно сужает класс NL-дифференцируемых функций.

Функция g равенствами (1) определяется неоднозначно; если функции g_1 и g_2 таковы, что на каждом отрезке $[a, b] \subset \Omega$ они совпадают почти всюду, то

$$\int_0^1 g_1((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)d\lambda = \int_0^1 g_2((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)d\lambda,$$

и поэтому каждая из них является NL-производной функции f. Если такие функции считать эквивалентными, то производная g определяется с точностью до эквивалентности; для любой из них можно использовать обычное обозначение: $g = f'$. Отсюда, в частности, следует, что значения $f'(x)$ NL-производной в точках $x \in \Omega$ не определены. В свою очередь, нетрудно видеть, что в случае связной области Ω NL-примитивная определяется с точностью до постоянной.

Метка NL в определениях NL-производной и NL-примитивной является сокращением имен Ньютона и Лейбница. Использование таких обозначений связано с тем, что в скалярном случае равенство (1) превращается по существу в обычную формулу Ньютона–Лейбница. Таким образом, предложенное определение обобщенной производной мотивируется тем, что оно по заданной непрерывной функции f приводит к функции $f' = g$, для которой справедлива формула Ньютона–Лейбница. Определение соответствующей примитивной по существу совпадает с понятием интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом; ниже термином «неопределенный интеграл» называется именно интеграл Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом.

Естественно возникает вопрос о том, как согласуются приведенные определения с классическими определениями анализа. Этот вопрос оказывается нетривиальным даже в скалярном случае, т. е. когда $X = Y = \mathbb{R}$.

Цель сообщения – рассмотреть взаимоотношения между классическими определениями производных и вышеописанным новым определением.

NL-производные и классические производные. Итак, рассмотрим скалярный случай ($X = Y = \mathbb{R}$); пусть $\Omega = (a, b)$ и $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Первым здесь является вопрос о том, когда обычная производная $f'(x)$ функции $f(x)$ является NL-производной.

Т е о р е м а 1. *Пусть непрерывная функция f дифференцируема в каждой точке (a, b) за исключением счетного множества N. Тогда производная f', доопределенная в точках N любым способом, является* NL-*производной.*

Теорема непосредственно вытекает из соответствующего утверждения о справедливости формулы Ньютона–Лейбница для интеграла Курцвейля–Хенстока [5; 6].

Заметим, что теорема 1 становится неверной, если вместо интеграла Курцвейля–Хенстока в определении NL-производной использовать интеграл Римана или Лебега, так как производная функции может оказаться не интегрируемой по Риману или Лебегу (см., напр., [9–12]). Однако в случае интеграла Курцвейля–Хенстока каждая производная, согласно теореме 1, всегда интегрируема в смысле Курцвейля–Хенстока.

В рассматриваемом скалярном случае NL-производная определена с точностью до значений на множествах меры нуль. Требование о счетности «исключительного» множества N заменить предположением о том, что оно имеет нулевую меру, нельзя. Это показывает известный пример функции Кантора. Тем самым возникает вопрос о характеристике несчетных множеств $N \subset (a, b)$ (если такие множества существуют), для которых утверждение теоремы 1 сохраняет силу.

Множество $N \subset \mathbb{R}$ будем называть *ничтожным*, если оно имеет меру нуль и не содержит несчетных совершенных подмножеств. Счетные множества, очевидно, являются ничтожными. Существование несчетных ничтожных множеств и некоторые их свойства обсуждались в [10; 11; 13; 14]. Там же изучались и *вполне несовершенные* (т. е. не содержащие несчетных совершенных подмножеств) множества; заметим, что вполне несовершенные множества, не являющиеся ничтожными, неизмеримы.

Т е о р е м а 2. *Пусть множество $N \subset [a, b]$ обладает тем свойством, что каждая непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, дифференцируемая во всех точках (a, b) за исключением множества N, является неопределенным интегралом от своей производной, доопределенной в точках N любым способом. Тогда множество N является ничтожным.*

Эта теорема вытекает из подобия совершенных множеств канторовскому множеству нулевой меры. Это подобие позволяет построить непрерывную функцию, не являющуюся константой, для которой обычная производная почти всюду существует и равна нулю. Для такой функции существующая почти всюду производная является интегрируемой, однако для нее формула Ньютона–Лейбница очевидным образом не верна для любого промежутка, на котором она не постоянная, и, тем самым, эта функция не имеет NL-производной.

Достаточно естественной является гипотеза, что при замене предположения о счетности множества N на его ничтожность утверждение теоремы 1 сохранится. Тем более, что справедливо следующее утверждение (теорема Шеефера, см., напр., [11]): *если определенная на промежутке (a, b) непрерывная функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке, за исключением ничтожного множества N, и эта производная почти всюду равна нулю, то функция f является постоянной*. Из этой теоремы следует

Т е о р е м а 3. *Пусть функция f дифференцируема в каждой точке (a, b) за исключением ничтожного множества N, и пусть производная функции f, доопределенная на множестве N произвольным образом, интегрируема в смысле Курцвейля–Хенстока. Тогда производная f', доопределенная в точках N любым способом, является* NL-*производной.*

Справедлив ли полный аналог теоремы 1 (при замене счетности множества N на его ничтожность), авторам неизвестно.

Классическая теорема Лебега [9; 14] фактически утверждает, что *существующая почти всюду производная абсолютно непрерывной функции является* NL-*производной*. Это утверждение может быть существенно усилено. Говорят [5; 6], что непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *имеет на множестве N ничтожную вариацию*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать положительное число η и положительную функцию $\delta(\cdot)$ такие, что для любого набора отрезков $[u_\sigma, v_\sigma]$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ и точек $\xi_\sigma \in N \cap [u_\sigma, v_\sigma]$ с $[x_{\sigma-1}, x_\sigma] \subseteq (\xi_\sigma - \delta(\xi_\sigma), \xi_\sigma + \delta(\xi_\sigma))$ и $\sum_{\sigma=1}^{s} |v_\sigma - u_\sigma| < \eta$ справедливо неравенство

$$\sum_{\sigma=1}^{s} |f(x_\sigma) - f(x_{\sigma-1})| < \varepsilon.$$

Одна из теорем из [5; 6] о справедливости формулы Ньютона–Лейбница для интеграла Курцвейля–Хенстока может быть переформулирована следующим образом:

Т е о р е м а 4. *Пусть функция f дифференцируема в каждой точке (a, b) за исключением ничтожного множества N и пусть функция f имеет на N ничтожную вариацию. Тогда производная f', доопределенная в точках N любым способом, является* NL-*производной.*

Вышеприведенные теоремы дают ответ, когда обычная производная является NL-производной. Естественно рассмотреть вопрос и о том, когда NL-производная является обычной производной. Для интегралов Курцвейля–Хенстока справедлив аналог теоремы Лебега о том, что *производная по верхнему пределу неопределенного интеграла Курцвейля–Хенстока от интегрируемой функции существует и равна подынтегральной функции почти всюду.* Однако (как и в случае с интегралами Римана и Лебега) вопрос о существовании производной неопределенного интеграла в фиксированной точке (за исключением случая непрерывности в этой точке подынтегральной функции) оказывается весьма нетривиальным. Существуют более сложные условия на поведение подынтегральной функции, гарантирующие существование производной неопределенного интеграла в заданной точке и совпадение этой производной со значением подынтегральной функции в этой точке. В частности, известно следующее утверждение: *производная неопределенного интеграла в фиксированной точке равна значению подынтегральной функции в этой точке, если подынтегральная функция ограничена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке аппроксимативно непрерывна*.

Приведенные выше утверждения могут быть проиллюстрированы некоторыми классическими примерами.

1) Функция $|x|$ на (–1, 1) NL-дифференцируема и ее производная совпадает с sign x; во всех точках, кроме $x = 0$, это обычная производная.

2) Функция $x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}$ с $\alpha > 0$ на $(-\pi, \pi)$ NL-дифференцируема и ее производная во всех точках, кроме $x = 0$, является обычной. В нуле же функция дифференцируема, если $\alpha > 1$; обычной производной в нуле при $0 < \alpha \le 1$ нет.

3) Если непрерывная функция дифференцируема в обычном смысле почти всюду (кроме множества меры нуль), то эта производная в общем случае NL-производной не является. Пример – функция Кантора $c(x)$ (лестница Кантора).

4) Функция $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + c(x))$ ($c(x)$ – лестница Кантора) – непрерывная строго монотонная $[0,1] \to [0,1]$, производная которой почти всюду равна $\frac{1}{2}$. Обратная к ней функция $\psi : [0,1] \to [0,1]$ является абсолютно непрерывной (и даже удовлетворяет условию Липшица с постоянной 2). Поэтому она является неопределенным интегралом своей производной, а эта производная таким образом является и NL-производной. Функция $\varphi(x)$ при этом не имеет NL-производной.

NL-производные и обобщенные производные. Понятие NL-производной близко понятию обобщенной производной Соболева–Шварца. Напомним определение производной Соболева–Шварца для случая, когда это определение приводит к обычной функции.

Пусть даны две определенные на (a, b) вещественные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем первая из них непрерывна, а вторая – интегрируема по Курцвелю–Хенстоку. Функция $g(x)$ называется *обобщенной производной* функции $f(x)$, если для любой гладкой и финитной на (a, b) функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Т е о р е м а 5. *Функция g является* NL-*производной непрерывной функции f в том и только том случае, когда она является обобщенной производной функции f.*

Приведем схему доказательства этого утверждения. Пусть функция $g(x)$ является NL-производной и $\varphi(x)$ – гладкая и финитная на (a, b) функция. Тогда для $\alpha, \beta \in (a, b)$, для которых верно $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$, в силу теоремы об интегрировании по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока [6; 8], имеем

$$\int_\alpha^\beta g(x)\varphi(x)dx = -\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x g(\xi)d\xi\right)\varphi'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\varphi'(x)dx$$

и, тем самым, $g(x)$ является обобщенной производной $f(x)$. Формула интегрирования по частям здесь справедлива в силу того, что произведение интегрируемой в смысле Курцвейля–Хенстока функции на гладкую также интегрируемо по Курцвейлю–Хенстоку.

Пусть, наоборот, $g(x)$ – обобщенная производная $f(x)$ и пусть $a < \alpha < \beta < b$. Положим

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi(n(x-\alpha)) & \text{при } x \in (\alpha - 1/n, \alpha), \\ 1 & \text{при } x \in (\alpha, \beta), \\ \psi(n(\beta - x)) & \text{при } x \in (\beta, \beta + 1/n), \end{cases}$$

где $\psi(x)$ – определенная на $(-\infty, +\infty)$ гладкая функция, обращающаяся в 0 на $(-\infty, -1)$ и в 1 на $(0, +\infty)$. Тогда по определению обобщенной производной

$$\int_a^b g(x)\psi_n(x)dx = -\int_a^b f(x)\psi'_n(x)dx,$$

откуда

$$\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} g(x)\psi_n(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx + \int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx = -\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} f(x)\psi'_n(x)dx - \int_{\beta}^{\beta+1/n} f(x)\psi'_n(x)dx.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = -\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} f(x)\psi'_n(x)dx - \int_{\beta}^{\beta+1/n} f(x)\psi'_n(x)dx - \int_{\alpha-1/n}^{\alpha} g(x)\psi_n(x)dx - \int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx.$$

Первые два интеграла в правой части этого равенства при $n \to \infty$ стремятся, соответственно, к $-f(\alpha)$ и $f(\beta)$. Покажем это для второго из этих интегралов. Очевидно,

$$\int_{\beta}^{\beta+1/n} f(x)\psi'_n(x)dx = -\int_{-1}^{0} f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right)\psi'(\xi)d\xi =$$

$$-f(\beta)\int_{-1}^{0}\psi'(\xi)d\xi - \int_{-1}^{0}\left[f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right) - f(\beta)\right]\psi'(\xi)d\xi.$$

Здесь первый интеграл равен 1 и поэтому первое слагаемое равно $-f(\beta)$. Второе слагаемое оценивается обычным способом:

$$\left|\int_{-1}^{0}\left[f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right) - f(\beta)\right]\psi'(\xi)d\xi\right| \le \max_{-1\le\xi\le 0}\left|f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right) - f(\beta)\right|\int_{0}^{1}|\psi'(\xi)|\,d\xi$$

и потому стремится при $n \to \infty$ к нулю. Аналогично показывается, что первый интеграл при $n \to \infty$ стремится к $f(\alpha)$.

Переходим к оценкам для третьего и четвертого интеграла. Здесь рассмотрим подробно четвертый интеграл. Нетрудно видеть, что

$$\int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+1/n}\left(\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right)'\psi_n(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+1/n}\psi_n(x)d\left(\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right) =$$

$$\psi_n(x)\left(\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right)\Big|_{\beta}^{\beta+1/n} - \int_{\beta}^{\beta+1/n}\left(\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right)d\psi_n(x) = -\int_{\beta}^{\beta+1/n}\left(\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right)d\psi_n(x).$$

Отсюда

$$\left|\int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx\right| \le \max_{\beta\le x\le\beta+\frac{1}{n}}\left|\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right| \bigvee_{\beta}^{\beta+1/n}\psi_n(x) = \max_{\beta\le x\le\beta+\frac{1}{n}}\left|\int_{\beta}^{x} g(\xi)d\xi\right|.$$

Но последнее выражение стремится при $n \to \infty$ к нулю, в силу непрерывности интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом. Третий интеграл оценивается аналогично.

Отметим еще, что утверждение теоремы 5 по существу означает, что в рассматриваемом скалярном случае понятие NL-производной совпадает с понятием производной Радона–Никодима (см., напр., [15]).

Теоремы об NL-дифференцировании. Теоремы о вычислении NL-производных по сравнению с соответствующими теоремами о вычислении обычных производных иногда не меняются, но иногда меняются довольно сильно. Так, формула

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)$$

сохраняется без изменений. Иначе обстоит дело с формулой дифференцирования произведения функций. Здесь из теоремы об интегрировании по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока (см. [6; 8]) вытекает

Т е о р е м а 6. *Пусть непрерывные функции* f_1 *и* f_2 *имеют* NL-*производные* $f_1'(x)$ *и* $f_2'(x)$. *Тогда*

$$(f_1(x)f_2(x))' = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x),$$

если правая часть этого равенства является интегрируемой функцией. Последнее имеет место, если функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *имеют ограниченные вариации.*

Нетрудно видеть, что формула для вычисления NL-производной сложной функции сводится к формуле о замене переменной под знаком интеграла (естественно, в смысле Курцвейля–Хенстока):

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f'(\xi)d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} (f' \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Наиболее общие условия справедливости этой формулы, известные авторам, приведены в [6]. Применение этих теорем приводит к следующему результату:

Т е о р е м а 7. *Пусть непрерывная функция* φ *определена на промежутке* I, *непрерывная функция* f *определена на* $\varphi(I)$; *пусть эти функции имеют* NL-*производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(t)$, *причем* f *имеет обычную производную на* $\varphi(I)$ *за исключением точек множества* M, *а* φ *имеет обычную производную в точках* I *за исключением множества* N. *Пусть множество* $\varphi^{-1}(M) \cup N$ *ничтожно и функция* $f \circ \varphi$ *имеет на этом множестве ничтожную вариацию. Тогда для* NL-*производной функции* $f \circ \varphi$ *справедливо равенство*

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f' \circ \varphi)(x)\varphi'(x).$$

В частности, эта формула справедлива, если множество $\varphi^{-1}(M) \cup N$ *не более чем счетно. Она также справедлива, если функция* $\varphi(t)$ *строго монотонна,* $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \notin N)$ *и функция* $(f' \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$ *интегрируема.*

Из общих теорем о вычислении производных остается теорема о производной обратной функции. В вышеприведенном примере 4) обратимая функция ψ NL-дифференцируема, однако обратная к ней функция $\varphi(x)$ (лестница Кантора) NL-производной не обладает. Однако верна

Т е о р е м а 8. *Пусть непрерывная функция* f *определена на промежутке* I *и имеет непрерывную обратную функцию* g, *определенную на промежутке* $f(I)$. *Пусть функция* f *имеет в каждой точке промежутка* I *за исключением точек некоторого множества* N *обычную производную, и эта производная отлична от нуля. Тогда функция*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (y \in f(I \setminus N)),$$

доопределенная в точках $f(N)$ *произвольным образом, является* NL-*производной функции* g, *если множество* $f(N)$ *ничтожно и функция* g *на этом множестве имеет ничтожную вариацию; в частности, это утверждение верно, если множество* N *счетно.*

NL-производные функций между банаховыми пространствами. Вернемся к функциям $f:\Omega \to Y$ между банаховыми пространствами X и Y (Ω – область в X). Как показывает исходное определение NL-производных, при вычислении этих производных достаточно ограничиться функциями скалярного аргумента (параметра отрезка, соединяющего произвольные точки области определения $\Omega \subset X$ функции $f:\Omega \to Y$). Таким образом, существование обычной производной Гато функции f в точках Ω оказывается достаточным для существования NL-производной. Более того, достаточно даже существования слабых производных Гато; существование последних, как известно, сводится к дифференцированию скалярных функций $\ell(f((1-\lambda)a + \lambda b))$ $(0 \le \lambda \le 1,\ a, b \in \Omega,\ \ell \in Y^*)$. В действительности, можно рассматривать скалярные функции $\ell(f((1-\lambda)a + \lambda b))$ $(0 \le \lambda \le 1,\ a, b \in \Omega,\ \ell \in H)$, где H – тотальное подпространство Y^*. При этом достаточно, чтобы эти функции обладали лишь NL-производными.

Список использованной литературы

1. *Евхута, Н. А.* Теоремы о гладкости нелинейных операторов и приближенные методы / Н. А. Евхута, О. Н. Евхута, П. П. Забрейко // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 5–10.

2. *Евхута, Н. А.* Свойства гладкости интегральных операторов Урысона и метод Ньютона–Канторовича / Н. А. Евхута, О. Н. Евхута, П. П. Забрейко // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 2. – С. 23–28.

3. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

4. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – СПб.: Невский диалект, 2004. – 816 с.

5. *Gordon, R. A.* The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock (Graduate Studies in Mathematics, 4) / R. A. Gordon. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1994. – 396 p.

6. *Bartle, R. G.* A Modern Theory of Integration (Graduate Studies in Mathematics, 32) / R. G. Bartle. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001. – 458 p.

7. *Лукашенко, Т. П.* Обобщенные интегралы / Т. П. Лукашенко, В. А. Скворцов, А. П. Солодов. – Москва, 2009, 2011. – 275 с.

8. *Лукомский, С. Ф.* Интегральное исчисление (функции одной переменной) / С. Ф. Лукомский. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2005. – С. 1–144.

9. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – Москва: Наука, 1974. – 480 с.

10. *Hobson, E. W.* The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series / E. W. Hobson. – New York: Dover Publications, Inc., 1927. – Vol. I. – 732 p.; – 1926. – Vol. II. – 780 p.

11. *Де Ла Валле-Пуссен, Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых / Ш. Ж. Де Ла Валле-Пуссен. – Москва; Ленинград: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. – Т. 1. – 464 с.

12. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

13. *Окстоби, Д.* Мера и категория / Д. Окстоби. – Москва: Мир, 1974. – 160 с.

14. *Семенов, Л. А.* О некотором классе исключительных множеств / Л. А. Семенов // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. – Ярославль, 1976. – С. 133–135.

15. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 896 с.

Поступило в редакцию 11.04.2016