Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **сентябрь–октябрь** **Том 60 № 5**

УДК 517.984

А. Б. АНТОНЕВИЧ, АЛИ А. ШУКУР

О РОСТЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В КРУГЕ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
antonevich@bsu.by; shukur.math@gmail.com

В работе введен экспоненциальный порядок роста аналитической функции φ в круге и установлена связь между скоростью роста коэффициентов разложения функции и ее порядком. Дано приложение к описанию поведения нормы резольвенты $R(B,\lambda)$ ограниченного линейного оператора при приближении λ к спектру.

Ключевые слова: рост аналитической функции, резольвента, дискретный оператор взвешенного сдвига.

A. B. ANTONEVICH, ALI A. SHUKUR

GROWTH OF THE ANALYTIC FUNCTION ON THE DISC

Belarusian State University, Minsk, Belarus
antonevich@bsu.by; shukur.math@gmail.com

In this article, the order of exponential of growth of analytical function φ on the disc is introduced, and the relation between the order of the function φ and its coefficients is obtained. An application of this result gives us the description of the behavior of the resolvent $\| R(B,\lambda) \|$ of linear bounded operator where λ approaches the spectrum.

Keywords: growth of analytical function, resolvent, discrete weighted shift operator.

Введение. Пусть аналитическая функция $\varphi(z)$ разложена в степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} \varphi_n z^n$$

и пусть

$$M(r) = M_{\varphi}(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|.$$

В случае целой функции, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости, вопрос о связи между экспоненциальным порядком роста функции $M(r)$ на бесконечности и поведением коэффицентов φ_n подробно изучен [1; 2].

В работе рассмотрены аналогичные вопросы в случае рядов с конечным радиусом сходимости (который без ограничения общности считаем равным 1), описана связь между экспоненциальным порядком роста функции $M(r)$ при $r \to 1$ и поведением коэффициентов разложения. Среди известных ранее результатов в этом направлении отметим утверждение о связи между порядком степенного роста и поведением коэффициентов [3]: если $\varphi_n \approx n^{\alpha}$ (и радиус сходимости ряда равен 1), то при $r \to 1$ функция $M(r)$ имеет степенной рост

$$M(r) \approx \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-r)^{\alpha+1}}.$$

В работе даны также приложения полученных результатов к описанию поведения резольвент некоторых линейных ограниченных операторов, что явилось основной мотивировкой для проведенного исследования.

Порядок роста аналитической функции и поведение коэффициентов. Напомним определение порядка экспоненциального роста целой функции φ. Пусть существуют положительные α такие, что при всех достаточно больших r для функции $M_\varphi(r)$ выполняется неравенство

$$M_\varphi(r) \le e^{r^\alpha}.$$

Точная нижняя грань таких значений α называется порядком функции экспоненциального роста $\varphi(z)$, обозначим его через $\gamma(\varphi)$.

Порядок целой функции $\varphi(z)$ может быть найден по формуле

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_\varphi(r)}{\ln r}.$$

Пусть для числовой последовательности φ_n существуют числа β, что

$$|\varphi_n| \le e^{-\frac{n}{\beta}\ln n}.$$

Нижняя грань таких β называется *порядком убывания последовательности* φ_n:

$$\beta(\varphi_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{-\ln\varphi_n}.$$

Классический результат о целых функциях заключается в следующем.

Т е о р е м а 1. *Порядок функции выражается через коэффициенты ее степенного разложения равенствами*

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{|\varphi_n|}}.$$

Ниже мы рассматриваем функции φ, аналитические в единичном круге. Тогда функция $M_\varphi(r)$ определена на интервале [0, 1). Функция φ имеет конечный порядок при $r \to 1$, если существуют α, такие что

$$|M_\varphi(r)| \le ce^{(1-r)^{-\alpha}}$$

для $r_0 < r \le 1$ и порядок функции есть точная нижняя грань таких α. Порядок функции можно найти по формуле

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_\varphi(r)}{\ln(1-r)}.$$

Для рассматриваемых функций коэффициенты разложения неограничены. Пусть существуют константы ζ, такие, что

$$|\varphi_n| \le e^{n^\zeta}.$$

Точная нижняя грань таких ζ называется *порядком роста последовательности* φ_n, обозначим его через $\beta(\varphi_n)$.

Связи между поведением функции $\varphi(z)$ и поведением коэффициентов φ_n в разных постановках рассматривались многими авторами. Например, Г. Фабер [4; 5] исследовал функции, представимые в виде $\varphi(z) = G\left(\frac{1}{1-z}\right)$, где G является целой аналитической функцией. Такие функции определены не только в единичном круге, но и на всей комплексной плоскости, за исключением точки 1. Оказалось, что порядок роста функции G не определяется по порядку роста коэффициентов φ_n. Поэтому Г. Фабер использовал вспомогательную целую функцию $A(z)$, такую, что $A(n) = \varphi_n$ и получил связь между порядками роста: $\gamma(G) = \frac{\gamma(A)}{1-\gamma(A)}$. Это утверждение описывает поведение рассматриваемой функции $\varphi(z)$ в окрестности точки 1.

Формулировка приведенной ниже теоремы выглядит похоже на этот результат Г. Фабера; отличие заключается в том, что мы используем только порядок коэффициентов φ_n, но при этом получаем описание поведения функции $\varphi(z)$ только в пересечении окрестности точки 1 с единичным кругом.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\varphi(z)=\sum_0^\infty \varphi_n z^n$ *и радиус сходимости ряда есть* 1. *Функция* φ *имеет конечный порядок* $0<\gamma<\infty$ *тогда и только тогда, когда последовательность* φ_n *имеет порядок роста* $0<\beta<1$ *и при этом*

$$\beta(\varphi_n)=\frac{\gamma}{\gamma+1},\ \gamma(\varphi)=\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для функции φ выполнено неравенство

$$M_\varphi(r)\le e^{(1-r)^{-\gamma}}$$

для $r_0<r\le 1$. Согласно неравенству Коши, для коэффициентов аналитической функции имеем

$$|\varphi_n|\le \frac{M_\varphi(r)}{r^n}\le e^{(1-r)^{-\gamma}}r^{-n}.$$

В доказательстве теоремы 1 в аналогичном месте находится в явном виде минимум по r функции, стоящей в правой части неравенства. В рассматриваемом случае минимум не находится в явном виде, но требуемая оценка получается, если оценить $|\varphi_n|$ через значения правой части в точке

$$r_n=1-\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{-1}{\gamma+1}}.$$

В результате имеем оценку вида

$$|\varphi_n|\le ce^{n^\beta}, \tag{1}$$

где c есть константа и $\beta=\dfrac{\gamma}{\gamma+1}.$ Отсюда следует оценка для порядка роста φ_n :

$$\beta(\varphi_n)\le\frac{\gamma}{\gamma+1}. \tag{2}$$

Получим теперь оценку порядка роста функции через порядок роста коэффициентов. Пусть для последовательности коэффициентов φ_n выполнено неравенство (1). Для заданного $r<1$ выберем число m_r таким образом, что для $n>m_r$

$$|e^{n\beta}r^n|\le|e^{n\beta}r^{m_r}|\le\frac{1}{e^{n\beta}}. \tag{3}$$

Как легко проверить, последнее неравенство выполнено, если положить

$$m_r=\left[C\frac{1}{1-r}^{\frac{1}{1-\beta}}\right].$$

Тогда

$$M_\varphi(r)\le\sum_{0\le n\le m_r}|\varphi_n|r^n+\sum_{n>m_r}\frac{1}{e^{n\beta}}.$$

В силу (3), ряд в последней сумме сходится и

$$\sum_{n>m_r}\frac{1}{e^{n\beta}}\le C_0=\sum_1^\infty\frac{1}{e^{n\beta}}$$

для любого m_r. Пусть $\mu(r)=\max_n|\varphi_n|r^n$. В силу (3) выполнено неравенство

$$\mu(r)\le e^{\left(\frac{\beta}{1-r}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}}r^{\left(\frac{\beta}{1-r}\right)^{1-\beta}}.$$

Таким образом мы получаем, что $\varphi(r)\le(1+m_r)\mu(r)+C_0$, т. е.

$$\varphi(r) \le c e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\gamma}},$$

где c константа и $\gamma = \dfrac{\beta}{1-\beta}$. Отсюда следует оценка порядка роста функции $M_{\varphi}(r)$:

$$\gamma(\varphi) \le \frac{\beta}{1-\beta}. \tag{4}$$

Из (2) и (4) мы получаем точные связи между порядками $\varphi(r)$ и φ_n:

$$\gamma(\varphi) = \frac{\beta(\varphi_n)}{1-\beta(\varphi_n)}.$$

О росте резольвенты ограниченного линейного оператора. В качестве приложения рассмотрим задачу о нахождении порядка роста резольвенты для некоторых ограниченных линейных операторов.

Пусть B есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой оператора B*, если существует обратный к $B - \lambda I$. Множество регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора B и обозначается $\rho(B)$. Операторно-значная функция $R(\lambda, B) = (B - \lambda I)^{-1}$, определенная на резольвентном множестве, называется *резольвентой оператора.* Резольвента является аналитической операторно-значной функцией от λ. Множество $\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B)$ называется *спектром оператора*, а число $R(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$ называется *спектральным радиусом* оператора. Имеется ряд утверждений, связывающих поведение резольвенты при приближении λ к спектру с другими свойствами оператора, поэтому описание такого поведения является одной из классических задач теории операторов [6–9]. Если $R(B) = 1$, то при $|\lambda| > 1$ резольвента задается в виде ряда

$$R(\lambda, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n$$

и для нормы резольвенты имеют место оценки

$$\frac{1}{|1-|\lambda||} \le \| R(\lambda, B) \| \le \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \| B^n \| := \varphi_B\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{5}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть B – произвольно линейный ограниченный оператор, спектр которого есть единичная окружность S^1. При некотором $0 < \beta < 1$ выполнено*

$$\| B^n \| \le C e^{n^{\beta}}, \quad n \ge 1,$$

тогда и только тогда, когда норма резольвенты оператора B имеет вид

$$\| R(\lambda, B) \| \le C \exp[(1-|\lambda|)^{-\gamma}], \ |\lambda| > 1,$$

где C – константа и $\gamma = \dfrac{\beta}{1-\beta}$.

Обозначим через Φ класс функций φ, удовлетворяющих следующим условиям: φ есть аналитическая функция в единичном круге $|\lambda| < 1$, у которой радиус сходимости степенного ряда $\varphi(z) = \sum_1^{\infty} \varphi_n z^n$ есть 1 и при этом $\varphi_n > 0$, $\varphi_1 = 1$. Такие функции могут иметь произвольный (в том числе не экспоненциальный) рост. Функции вида φ_B, входящие в оценку резольвенты сверху (5), принадлежат этому классу. В [10] показано, что для любой функции φ из класса Φ существует оператор, резольвента которого растет быстрее этой функции. Таким образом, следствие содержит условия на оператор, при которых резольвента имеет экспоненциальный рост.

Для произвольного оператора функция $\varphi_B(|\lambda|)$ из (5) может при $|\lambda| \to 1$ иметь существенно большую скорость роста, чем резольвента, т. е. в общем случае оценка сверху грубая. Следующий результат утверждает, что для операторов взвешенного сдвига оценка сверху в (5) является точной по порядку.

Пусть $l_p(\mathbb{N}), (p \ge 1)$ есть пространство последовательностей комплексных чисел $u = (u(k))$, для которых конечна норма

$$\| u \|_p = \left[\sum_{1}^{+\infty} | u(k) |^p \right]^{1/p}.$$

Оператором взвешенного сдвига называется оператор в $l_p(\mathbb{Z})$, действующий по формуле [11]

$$B(u)(k) = a(k)u(k+1), \tag{6}$$

где $a = (a(k))$ – заданная ограниченная числовая последовательность.

Т е о р е м а 4. *Пусть B есть оператор (6), для которого* $R(B) = 1$. *Резольвента* $R(\lambda, B)$ *имеет порядок роста* γ *тогда и только тогда, когда последовательность норм* $\| B^n \|$ *имеет порядок роста* $\beta = \frac{\gamma}{\gamma+1} < 1$.

В частности, если при $k \to +\infty$ коэффициенты оператора B имеют асимптотическое представление

$$a(k) \sim 1 + \frac{c}{|k|^\nu}, \text{ при } \nu < 1,$$

то последовательность норм $\| B^n \|$ имеет порядок роста $\beta = 1 - \nu$, а резольвента имеет порядок роста

$$\gamma = \frac{1-\nu}{\nu}.$$

Это утверждение следует из теоремы 2 и следующей леммы.

Л е м м а. *Пусть B – оператор (6). Для резольвенты, определенной при* $|\lambda| > 1$, *имеет место аналог неравенства Коши: для любого числа* $m \geq 0$ *выполнено*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n \right\| \geq \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \| B^m \|.$$

Заключение. Заметим, в [10] приведен класс операторов взвешенного сдвига в пространстве $l_1(\mathbb{N})$, для которых норма резольвенты совпадает с оценкой сверху и, тем самым, вычисляется в явном виде. При $p > 1$ в пространствах $l_p(\mathbb{N})$ норма резольвенты не вычисляется и не совпадает с оценкой сверху через функцию $\varphi_B\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ и теорема описывает только порядок роста.

Список использованной литературы

1. *Holland, A. S. B.* Introduction to the theory of Entire functions / A. S. B. Holland. – New York; London: Academic press, 1973.

2. *Маркушевич, А. И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – Москва, 1950.

3. *Евграфов, М. А.* Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – Москва, 1957.

4. *Faber, G.* Beitrag zur Theorie der ganzen funktionen / G. Faber // Math. Ann. – 1911. – Vol. 70. – P. 48–68.

5. *Bieberbach, L.* Analytische Fortsetzung / L. Bieberbach. – Springer Verlag, 1955.

6. *Nagy, B.* A resolvent condition implying power boundedness / B. Nagy, J. A. Zemanek // Studia Math. – 1999. – Vol. 134. – P. 143–151.

7. *Nevanlinna, O.* Resolvent conditions and powers of operators / O. Nevanlinna // Studia Math. – 2011. – Vol. 145. – P. 113–134.

8. *Nevanlinna, O.* On the growth of the resolvent operators for power bounded operators / O. Nevanlinna // Banach center publiction. – 1997. – Vol. 28. – P. 247–264.

9. *Zabreko, P. P.* Error estimates of successive approximations and spectral properties of linear operators / P. P. Zabreko // Numercal functional analysis and optimization. – 1990. – Vol. 7–8. – P. 823–838.

10. *Антоневич, А. Б.* Оценка резольвент для дискретных взвешенного операторов / А. Б. Антоневич, Али А. Шукур // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 22. – С. 48–52.

11. *Antonevich, A. B.* Linear functional equation.operator approach / A. B. Antonevich. – Birkhauser, 1996.

Поступило в редакцию 11.04.2016