Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **сентябрь–октябрь** **Том 60 № 5**

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС И ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ГРАФА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
vbened@im.bas-net.by

В данной работе в два раза уменьшена нижняя граница порядка графов, полученная В. Никифоровым, для которых выполняется обобщение достаточного спектрального признака гамильтоновости графа, предложенного ранее.

Ключевые слова: матрица смежности, спектральный радиус, гамильтонов цикл, минимальная степень, индуцированный подграф.

V. I. BENEDIKTOVICH

SPECTRAL RADIUS AND HAMILTONICITY OF A GRAPH

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
vbened@im.bas-net.by

In this article, the lower graph order boundary obtained by V. Nikiforov, for which the generalization of the sufficient spectral criterion of Hamiltonicity of a graph is valid, has been reduced twice.

Keywords: Adjacency matrix, spectral radius, Hamiltonian cycle, minimum degree, induced subgraph.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный граф порядка n и размера m, и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A = A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей). Наибольшее собственное значение λ_1 называется *спектральным радиусом* (или *индексом*) графа G, который будем обозначать через $\rho(G)$. Поскольку матрица A является симметрической, спектральный радиус $\rho(G)$ является положительным действительным корнем характеристического полинома $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ этой матрицы.

Для произвольной вершины $v \in V(G)$ будем обозначать ее *окружение* через $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ и $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Тогда *степень вершины* $v_i \in V(G)$ равна $\deg_G(v_i) = |N(v_i)|$, которую кратко будем обозначать через $d_{v_i} = d_i$. Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – *последовательность степеней* графа G, упорядоченная по возрастанию: $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Тогда $d_1 = \delta$ называется *минимальной степенью.*

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются ($V(G) \cap V(H) = \varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H. $\overline{H}$ обозначает *дополнение* графа H. Для произвольного подмножества вершин $U \subset V(G)$ графа G $G[U]$ обозначает *индуцированный* этим множеством подграф в G.

Для любых натуральных чисел $k \geq 1$ и $n \geq k + 2$ обозначим

$$L_k(n) = K_1 \vee (K_{n-k-1} + K_k).$$

Другими словами, граф $L_k(n)$ состоит из двух графов K_{n-k} и K_{k+1}, имеющих единственную общую вершину.

Для любых натуральных чисел $k \ge 1$ и $n \ge 2k+1$ обозначим

$$M_k(n) = K_k \vee (K_{n-2k} + kK_1) = K_k \vee (K_{n-2k} + \overline{K_k}).$$

Другими словами, граф $M_k(n)$ состоит из графа K_{n-k} и k независимых вершин, каждая из которых соединена с некоторыми фиксированными k вершинами графа K_{n-k}.

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа G, называются *гамильтоновыми*. Граф G, содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым*, или *трассируемым*. Заметим, что графы $L_k(n)$ и $M_k(n)$ с минимальной степенью $\delta = k$ не являются гамильтоновыми. Граф G называется *гамильтоново-связным*, если для любых его двух вершин u и v существует гамильтонова цепь графа G с концевыми вершинами u и v.

Напомним понятие *замыкания* графа, введенное Оре в [1; 2], и развитое Бонди и Хваталом в [3]. Фиксируем целое число $k \ge 0$. Для заданного графа G выполним следующую операцию: если существуют две несмежные вершины u и v с $d_u + d_v \ge k$, то добавим ребро uv к множеству $E(G)$. *k-замыканием* графа G называется граф $cl_k(G)$, полученный из графа G с помощью последовательного применения этих операций, пока это возможно. Оказывается, что k-замыкание графа G единственно, т. е. не зависит от порядка, в котором добавляются ребра [3]. Отметим некоторые свойства k-замыкания $cl_k(G)$ графа G [1; 2]:

1) Если u и v произвольные несмежные вершины $cl_k(G)$, то $d_{cl_k(G)}(u) + d_{cl_k(G)}(v) \le k-1$.

2) Граф G порядка n гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоново его n-замыкание $cl_n(G)$.

Кроме того, нам понадобится следующее утверждение [2]:

3) Если граф G является 2-связным графом порядка n и $d_u + d_v \ge n+1$ для любых двух различных несмежных вершин u и v, то граф G является гамильтоново-связным.

Как известно, *задача распознавания* гамильтоновости или трассируемости заданного графа является NP-полной. Недавно для решения этой проблемы стала применяться спектральная теория графов.

Здесь продолжается изучение следующей проблемы, тесно связанной с известной проблемой Брюалди–Золхайда [4].

Проблема. Для заданного графа F, каким максимальным спектральным радиусом должен обладать граф G на n вершинах, не содержащий подграфа, изоморфного графу F?

Мы рассматриваем случай, когда F является гамильтоновым циклом [5].

Поскольку условие $\delta \ge 2$ является тривиальным необходимым условием для гамильтоновости графа, то в дальнейшем мы будем это предполагать.

В данной работе в два раза уменьшена нижняя граница порядка графов, полученная В. Никифоровым в [6], для которых выполняется обобщение достаточного спектрального признака гамильтоновости графа, данного в [5].

Т е о р е м а 1. *Пусть $k \ge 2$ и G – простой граф порядка $n > \dfrac{k^3+7k+4}{2}$ с $\delta \ge k$, отличный от графов $L_k(n)$ и $M_k(n)$. Тогда если его спектральный радиус $\rho(G) \ge n-k-1$, то граф G гамильтонов.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть $k \ge 2$ и G – простой граф порядка $n > \dfrac{k^3+7k+4}{2}$ с $\delta \ge k$. Тогда если G является собственным подграфом $L_k(n)$ или $M_k(n)$, то его спектральный радиус удовлетворяет неравенству $\rho(G) < n-k-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть G является собственным подграфом $M_k(n)$. В силу того, что для произвольного графа G и любого его пографа H выполняется неравенство $\rho(H) \le \rho(G)$, можно предполагать, что граф G получается из графа $M_k(n)$ с помощью удаления только одного ребра uv. В графе $M_k(n)$ обозначим через X вершины степени k, через Y множество соседних вершин для X, а через Z – оставшиеся $n-2k$ вершин. Поэтому $u, v \in Y \cup Z$ и априори возможны три случая: 1) $\{u, v\} \subset Y$; 2) $u \in Y, v \in Z$; 3) $\{u, v\} \subset Z$. Обозначим полученный граф G для каждого из этих случаев через G_i, $i = 1, 2, 3$, соответственно.

Покажем, что наибольший спектральный радиус из них имеет граф G_3. Для этого напомним понятие операции Кельманса [7]. Для заданного графа G и двух выделенных его вершин u, v построим новый граф G^*, заменив все ребра vx на ребра ux для всех $x \in N(v) \setminus N[u]$. Новый граф G^*, полученный таким образом, имеет тот же порядок и размер, что и исходный граф G, и все вершины, отличные от u и v, сохраняют свою степень. Кроме того, вершины u, v смежны в G^* тогда и только тогда, когда они смежны в G. Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1 [8; 9]. *Пусть G – произвольный граф и пусть G^* – граф, полученный из G с помощью операции Кельманса. Тогда* $\rho(G) \le \rho(G^*)$.

На основании этой леммы справедлива

Л е м м а 2. *Для графов G_i, $i = 1, 2, 3$, соответствующих случаям 1)–3), выполняется следующая последовательность неравенств*: $\rho(G_1) \le \rho(G_2) \le \rho(G_3)$.

Действительно, пусть в графе G_1 вершины $u, v \in Y$ несмежны, и w – произвольная вершина из Z. Тогда применим операцию Кельманса для случая $v =: w, u =: v, x =: u = N(w) \setminus N[v]$. Тогда по лемме 1 $\rho(G_1) \le \rho(G_2)$. Аналогично, пусть в графе G_2 вершины $u \in Y, v \in Z$ несмежны, и w – произвольная вершина из Z. Тогда применим операцию Кельманса для случая $v =: w, u =: u, x =: v = N(w) \setminus N[u]$. Тогда по лемме 1 $\rho(G_2) \le \rho(G_3)$.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть только граф G_3.

Напомним еще одно понятие. Разбиение π множества вершин $V(G)$ на попарно непересекающиеся подмножества $C_1, \ldots, C_r$ называется *равномерным*, если число соседей в C_j вершины u из C_i равно константе b_{ij}, не зависящей от выбора вершины u. Это определение эквивалентно следующему: все индуцированные подграфы $G[C_i]$, $i = 1, \ldots, r$, являются регулярными и ребра, соединяющие два различных подмножества C_i и C_j, образуют *бирегулярный* граф. Ориентированный (мульти)граф с r вершинами и b_{ij} дугами от i-й вершины к j-й называется *частным графа G по разбиению* π и обозначается через G / π. Матрица смежности этого ориентированного (мульти) графа G / π имеет компоненты $A(G / \pi)_{ij} = b_{ij}, i, j = \overline{1, r}$. Справедлива следующая техническая лемма.

Л е м м а 3 [10]. *Если π – равномерное разбиение множества вершин графа G, то спектральный радиус матрицы $A(G / \pi)$ равен спектральному радиусу матрицы $A(G)$.*

Рассмотрим следующее разбиение π графа G_3: $C_1 = X = \{1, \ldots, k\}$, $C_2 = Y = \{k+1, \ldots, k\}$, $C_3 = \{u, v\} = \{2k+1, 2k+2\}$, $C_4 = Z \setminus \{u, v\} = \{2k+3, \ldots, n\}$. Нетрудно убедиться, что это разбиение является равномерным и матрица смежности частного графа G_3 / π равна

$$A(G_3 / \pi) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ k & k-1 & 2 & n-(2k+2) \\ 0 & k & 0 & n-(2k+2) \\ 0 & k & 2 & n-(2k+3) \end{pmatrix}.$$

Значит, по лемме 3 спектральный радиус $\rho(G_3)$ должен быть корнем характеристического полинома матрицы $A(G_3 / \pi)$, который, как нетрудно вычислить, равен

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + (k+4-n)\lambda^3 + (-k^3 + 3k - 3n + 7)\lambda^2 +$$
$$(-2k^3 + nk^2 - 3k^2 + 2k - 2n + 4)\lambda - 4k^3 + 2k^2 n - 4k^2.$$

Покажем теперь, что все корни этого характеристического полинома лежат левее числа $n - k - 1$. Действительно, имеем

$$\chi(\lambda)\big|_{n-k-1} = 2n^2 - (4k + k^3 + 2)n + k^4 - k^3 + 2k.$$

Это выражение, как полином от n, всегда принимает положительные значения при

$$n > \frac{k^3 + 4k + 2 + \sqrt{(k^3 + 4k + 2)^2 - 8(k^4 - k^3 + 2k)}}{4} = \frac{k^3 + 4k + 2 + \sqrt{k^6 + 12k^3 + 16k^2 + 4}}{4}.$$

Но нетрудно видеть, что при $k \geq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{k^3+7k+4}{2} > \frac{k^3+4k+2+\sqrt{k^6+12k^3+16k^2+4}}{4},$$

равносильное неравенству

$$20k^4+84k^2+80k+12>0,$$

справедливому при любых $k \geq 1$.

Для первой производной имеем

$$\chi'(\lambda)\big|_{n-k-1} = n^3-3kn^2+(2k^2+3)n-(k^3+k^2+3k+2).$$

Заметим, что при $n > \dfrac{k^3+7k+4}{2}$ выполняется неравенство $n-3k > \dfrac{k^3+k+4}{2}$, поэтому

$$\chi'(\lambda)\big|_{n-k-1} > \left(\frac{k^3+7k+4}{2}\right)^2\left(\frac{k^3+k+4}{2}\right)+(2k^2+3)\left(\frac{k^3+7k+4}{2}\right)-(k^3+k^2+3k+2) =$$

$$\frac{1}{8}(k^9+15k^7+12k^6+71k^5+120k^4+157k^3+276k^2+300k+96)>0$$

при любых $k \geq 1$.

Для второй производной имеем

$$\chi''(\lambda)\big|_{n-k-1} = 6n^2-12kn+(4k^2+2).$$

Это выражение, как полином от n, всегда принимает положительные значения при

$$n > \frac{12k+\sqrt{144k^2-24(4k^2+2)}}{4} = k+\frac{\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{3}}.$$

Однако нетрудно убедиться, что при любых $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{k^3+7k+4}{2} > k+\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}.$$

Наконец, для третьей производной имеем

$$\chi'''(\lambda)\big|_{n-k-1} = 18(n-k)>0$$

при любых $n>k,$ что выполняется в силу предыдущего неравенства.

Таким образом, по теореме Фурье–Бюдана [11], правее числа $n-k-1$ нет корней характеристического полинома $\chi(\lambda)$. Откуда мы заключаем, что $\rho(G_3) < n-k-1$.

Пусть теперь G является собственным подграфом $L_k(n)$. Снова можно предполагать, что граф G получается из графа $L_k(n)$ с помощью удаления только одного ребра uv. Обозначим через $Y=\{w\}$ единственную вершину, принадлежащую одновременно графам K_{n-k} и K_{k+1} в графе $L_k(n)$. Далее, пусть $X = V(K_{k+1})\setminus\{w\}$ и $Z = V(K_{n-k})\setminus\{w\}$. Из неравенства $\delta(G) \geq k$ следует, что $u,v \in Y \cup Z$ и априори возможны два случая: 1) $u \in Y, v \in Z$; 2) $\{u,v\} \subset Z$. Обозначим полученный граф G для каждого из этих случаев через G_i, $i=1,2,$ соответственно.

В силу свойства операции Кельманса нетрудно убедиться, что граф G_2 имеет наибольший спектральный радиус. Поэтому достаточно рассмотреть только граф G_2.

Выберем следующее разбиение π графа G_2: $C_1 = X = \{1,\ldots,k\}$, $C_2=\{w\}=\{k+1\}$, $C_3=\{u,v\}=\{k+2,k+3\}$, $C_4=\{n-k-3,\ldots,n\}$. Нетрудно убедиться, что это разбиение является равномерным и матрица смежности частного графа G_2/π равна

$$A(G_2/\pi) = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 2 & n-(k+3) \\ 0 & 1 & 0 & n-(k+3) \\ 0 & 1 & 2 & n-(k+4) \end{pmatrix}.$$

Значит, по лемме 3 спектральный радиус $\rho(G_2)$ должен быть корнем характеристического полинома матрицы $A(G_2/\pi)$, который, как нетрудно вычислить, равен

$$\chi(\lambda)=\lambda^4+(5-n)\lambda^3+(-k^2+kn-k-4n+11)\lambda^2+$$
$$(-4k^2+4kn-6k-5n+11)\lambda-4k^2+4kn-8k-2n+4.$$

Покажем теперь, что все корни этого характеристического полинома лежат левее числа $n-k-1$. Действительно, имеем

$$\chi(\lambda)\big|_{n-k-1}=2n^2-7kn+(5k^2-3k).$$

Это выражение, как полином от *n*, всегда принимает положительные значения при

$$n>\frac{7k+\sqrt{49k^2-8(5k^2-3k)}}{4}=\frac{7k+\sqrt{9k^2+24k}}{4}.$$

Но при $k\ge 1$ выполняется неравенство

$$\frac{k^3+7k+4}{2}>\frac{7k+\sqrt{9k^2+24k}}{4},$$

равносильное неравенству

$$4k^6+28k^4+32k^3+40k^2+88k+64>0,$$

справедливому при любых $k\ge 1$.

Для первой производной имеем

$$\chi'(\lambda)\big|_{n-k-1}=n^3+(1-4k)n^2+(5k^2-4k+4)n+(-2k^3+3k^2-8k).$$

Заметим, что при $n>\dfrac{k^3+7k+4}{2}$ выполняется неравенство $n-4k+1>\dfrac{k^3-k+6}{2}>0$ при $k\ge 1$. Кроме того, $5k^2-4k+4>0$ при $k\ge 1$, поэтому

$$\chi'(\lambda)\big|_{n-k-1}>\left(\frac{k^3+7k+4}{2}\right)^2\left(\frac{k^3-k+6}{2}\right)+(5k^2-4k+4)\left(\frac{k^3+7k+4}{2}\right)+(-2k^3+3k^2-8k)=$$
$$\frac{1}{8}(k^9+13k^7+14k^6+55k^5+116k^4+155k^3+230k^2+304k+160)>0$$

при любых $k\ge 1$.

Для второй производной имеем

$$\chi''(\lambda)\big|_{n-k-1}=6n^2+(4-16k)n+(10k^2+4).$$

Это выражение, как полином от *n*, всегда принимает положительные значения при

$$n>\frac{16k-4+\sqrt{(16k-4)^2-24(10k^2+4)}}{12}=\frac{4k-1+\sqrt{k^2-8k-5}}{3}.$$

Однако нетрудно убедиться, что при любых $k\ge 1$ справедливо неравенство

$$\frac{k^3+7k+4}{2}>\frac{4k-1+\sqrt{k^2-8k-5}}{3}.$$

Наконец, для третьей производной имеем

$$\chi'''(\lambda)\big|_{n-k-1}=18n-24k+6>9k^3+39k+42>0$$

при любых $k\ge 1$.

Таким образом, по теореме Фурье–Бюдана [11] правее числа $n-k-1$ нет корней характеристического полинома $\chi(\lambda)$. Откуда мы заключаем, что $\rho(G_2)<n-k-1$. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1 проведем от противного. Предположим, что граф G негамильтонов. Тогда в силу очевидных неравенств

$$\delta(cl_n(G)) \geq \delta(G) \geq k$$

и

$$\rho(cl_n(G)) \geq \rho(G) \geq n-k-1$$

и того, что негамильтоновость графа G равносильна негамильтоновости его замыкания $cl_n(G)$, можно предполагать, что $G = cl_n(G)$, а значит, для любой пары i и j несмежных вершин графа G выполняется неравенство

$$d_i + d_j \leq n-1. \tag{1}$$

Покажем, что $G = L_k(n)$ или $G = M_k(n)$. Тогда в силу теоремы 2 будет справедлива теорема 1.

Согласно теореме Хватала [12], существует натуральное число s, такое, что выполняются неравенства $d_s \leq s < \frac{n}{2}$ и $d_{n-s} \leq n-s-1$ для возрастающей последовательности степеней графа G: $\delta = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n = \Delta$. Поэтому имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{gathered} 2m = \sum_{i=1}^{n} d_i = (d_1 + \ldots + d_s) + (d_{s+1} + \ldots + d_{n-s}) + (d_{n-s+1} + \ldots + d_n) \leq \\ s^2 + (n-2s)(n-s-1) + s(n-1) = n^2 - (2s+1)n + (3s^2 + s). \end{gathered} \tag{2}$$

Кроме того, в силу неравенств $\rho(G) \geq n-k-1$, $\delta \geq k$ из условий теоремы, известной верхней оценки для спектрального радиуса [13]:

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta+1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2},$$

а также убывания функции $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(2m - xn)}$ на промежутке $[1; n-1]$ получаем, что справедливо неравенство

$$n-k-1 \leq \frac{k-1+\sqrt{(k+1)^2 + 4(2m-kn)}}{2}.$$

Откуда после преобразований имеем

$$n^2 - (2k+1)n + (2k^2 + k) \leq 2m. \tag{3}$$

Вместе с неравенством (2) это дает

$$n^2 - (2k+1)n + (2k^2 + k) \leq n^2 - (2s+1)k^2 + (3s^2 + s).$$

Откуда получаем

$$2(s-k)n \leq (3s^2 + s) - (2k^2 + k). \tag{4}$$

Покажем, что (4) выполняется только при $s = k$. Действительно, если $s \geq k+1$, то из неравенства (4) следует

$$n \leq s + k + \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2(s-k)}. \tag{5}$$

Обозначим правую часть неравенства (5), как функцию от переменной s, через $f(s)$, которую в силу неравенства $s < \frac{n}{2}$ следует исследовать только на промежутке $\left[k+1; \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right]$. Нетрудно убедиться, что на интервале $\left[k+1; k+\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$ функция $f(s)$ убывает, а на интервале $\left(k+\frac{k}{\sqrt{3}}; \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right]$ – возрастает, поэтому в точке $s = k + \frac{k}{\sqrt{3}}$ функция $f(s)$ имеет минимум, а наибольшего значения она достигает в одном из концов отрезка $\left[k+1; \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right]$.

Подсчитывая значение функции $f(s)$ в точке $s = k+1$, получаем

$$f(k+1) = \frac{k^2+6k+4}{2} < \frac{k^2+7k+4}{2} < n,$$

что противоречит неравенству (5). Следовательно, должно выполняться неравенство

$$n \le f\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) \le f\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{3n^2-4n-8k^2-4k+1}{4(n-2k-1)},$$

равносильное неравенству

$$n^2 - 8kn + (8k^2+4k-1) \le 0. \qquad (6)$$

Рассматривая левую часть (6) как полином от n, заключаем, что для выполнимости (6) должно выполняться неравенство

$$n \le \frac{8k + \sqrt{64k^2 - 4(8k^2+4k-1)}}{2} = 4k + \sqrt{8k^2-4k+1}. \qquad (7)$$

Однако при $k \ge 2$ справедливо неравенство

$$4k + \sqrt{8k^2-4k+1} \le \frac{k^2+7k+4}{2}, \qquad (8)$$

равносильное неравенству

$$k^6 - 2k^4 + 8k^3 - 31k^2 + 8k + 12 \ge 0, \qquad (9)$$

которое, как легко видеть, справедливо для произвольного $k \ge 2$, причем равенство в (9) достигается только при $k = 2$.

Таким образом, неравенство (8) при условиях теоремы 1 противоречит неравенству (7), и значит, действительно, неравенство (4) выполняется только при $s = k$.

Покажем теперь, что справедливо неравенство

$$d_{k+1} \ge n - k - 1 - k^2.$$

Пусть это не так. Тогда имеем

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{k} d_i + d_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n-k} d_i + \sum_{i=n-k+1}^{n} d_i <$$
$$k^2 + (n-k-1-k^2) + (n-2k-1)(n-k-1) + k(n-1) =$$
$$n^2 - (2k+1)n + (3k^2+k),$$

что противоречит неравенству (3). Следовательно, для произвольного $i \ge k+1$ справедливо неравенство

$$d_i \ge n - k - 1 - k^2. \qquad (10)$$

Покажем теперь, что вершины $k+1, ..., n$ индуцируют клику в графе G. Действительно, пусть вершины $i, j \in \{k+1, ..., n\}$ несмежны в графе G. Тогда в силу (10)

$$d_i + d_j \ge 2n - 2k - 2 - 2k^2. \qquad (11)$$

Однако при $k \ge 2$ справедливо неравенство

$$2n - 2k - 2 - 2k^2 > n - 1, \qquad (12)$$

равносильное неравенству

$$n > 2k^2 + 2k + 1.$$

Действительно, при $k \ge 2$ имеет место неравенство

$$\frac{k^2+7k+4}{2} \ge 2k^2 + 2k + 1,$$

равносильное неравенству

$$k^3 - 4k^2 + 3k + 2 \geq 0, \tag{13}$$

которое, как легко видеть, справедливо для произвольного $k \geq 2$, причем равенство в (13) достигается только при $k = 2$.

Из неравенств (11) и (12) вытекает неравенство $d_i + d_j > n - 1$, что противоречит (1).

Пусть $X = \{1, ..., k\}$, а $Y \subset \{k+1, ..., n\}$ – множество вершин, которые имеют в X соседей. Так как $|X| = k$ и $d_i = k, i \in \{1, ..., k\}$, то $Y \neq \varnothing$ и любая вершина из X имеет соседа из множества $\{k+1, ..., n\}$.

Покажем, что в действительности каждая вершина из Y смежна с каждой вершиной из X. Предположим, что это не так, т. е. $\exists w \in Y$ и $\exists u, v \in X$, такие, что $wu \in E(G)$, но $wv \notin E(G)$. Поскольку вершина w смежна с каждой вершиной из множества $\{k+1, ..., n\}$ и вершиной u, то имеем неравенство

$$d_w + d_v \geq (n - k) + k = n. \tag{14}$$

Полученное неравенство (14) противоречит (1).

Положим $|Y| = l$ и заметим, что $1 \leq l \leq k$, так как $d_1 = k$. Если $l = 1$, то $G = L_k(n)$. Если $l = k$, то $G = M_k(n)$. Покажем теперь, что при $1 < l < k$ граф G гамильтонов, что противоречит предположению теоремы 1.

Рассмотрим подграф $H = G[X \bigcup Y]$ порядка $k + l$. В силу того, что $K_l \vee kK_1 \subset H$ и $l \geq 2$ получаем, что граф H является 2-связным. Далее, если u и v различные несмежные вершины графа H степеней d'_u и d'_v соответственно, то они лежат в X. Поэтому $d'_u = d_u = k$ и $d'_v = d_v = k$, и значит, справедливо неравенство

$$d'_u + d'_v = 2k > k + l.$$

Поэтому граф H является гамильтоново-связным. Тогда легко видеть, что существует гамильтонов цикл и в графе G: достаточно выбрать две различные вершины $u, v \in K_l$, построить гамильтонову цепь P_1 в графе $K_{n-k-l} \vee \{u, v\}$ с концевыми вершинами u и v и добавить гамильтонову цепь P_2 из графа H: объединение $P_1 \bigcup P_2$ будет гамильтоновым циклом графа G.

Таким образом, предположение о негамильтоновости графа G приводит к противоречию с условиями теоремы 1, и тем самым она доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф16РА–003).

Список использованной литературы

1. *Ore, O.* Arc coverings of graphs / O. Ore // Ann. Mat. Pura Appl. – 1961. – Vol. 55. – P. 315–321.

2. *Ore, O.* Hamilton-connected graphs / O. Ore // J. Math. Pures Appl. – 1963. – Vol. 42. – P. 21–27.

3. *Bondy, A.* A method in graph theory / A. Bondy, V. Chvátal // Discrete Math. – 1976. – Vol. 15. – P. 111–135.

4. *Brualdi, R. A.* On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones / R. A. Brualdi, E. S. Solheid // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. – 1986. – Vol. 7, N 2. – P. 265–272.

5. *Бенедиктович, В. И.* Достаточное спектральное условие гамильтоновости графа / В. И. Бенедиктович // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 5. – С. 5–12.

6. *Nikiforov, V.* Spectral radius and Hamiltonicity of graphs with large minimum degree / V. Nikiforov // arXiv:1602.01033 [math.CO] – http://arxiv.org/abs/1602.01033. – 2016.

7. *Kelmans, A. K.* On graphs with randomly deleted edges / A. K. Kelmans // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1981. – Vol. 37. – P. 77–88.

8. *Csikvari, P.* On a conjecture of V. Nikiforov / P. Csikvari // Discrete Math. – 2009. – Vol. 309, N 13. – P. 4522–4526.

9. *Brouwer, A. E.* Spectra of graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – Springer-Verlag, 2011.

10. *Godsil, C. D.* Algebraic graph theory / C. D. Godsil, G. F. Royle. – Springer-Verlag, 2001.

11. *Прасолов, В. В.* Многочлены / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2001.

12. *Chvátal, V.* On Hamiltons ideals / V. Chvátal // J. Combin. Theory Ser. B. – 1972. – Vol. 12. – P. 163–168.

13. *Hong, Y.* A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // J. Combin. Theory. – 2001. – Vol. 81. – P. 177–183.

Поступило 11.07.2016