Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **сентябрь–октябрь** **Том 60 № 5**

ФИЗИКА

УДК 530.12

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

ВЕКТОРНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУПП КЭРРОЛЛА И ГАЛИЛЕЯ: ЭЛЕКТРОДИНАМИКА КЭРРОЛЛА С ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
tea@dragon.bas-net.by

Показано, что галилеевские и кэрролловские бусты с размерными параметрами являются частными случаями векторной параметризации соответствующих преобразований математической группы Галилея. В бикватернионах над алгеброй дуальных чисел реализован ряд представлений группы Кэрролла и построены две системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно кэрролловских бивекторных полей, порождаемых внешними источниками. Показано, что определение напряженностей полей через потенциалы возможно только в однозарядовом случае и только для одной из систем уравнений кэрролловской электродинамики.

Ключевые слова: бикватернионы, векторная параметризация, группа Кэрролла, дуальные числа, уравнения электродинамики.

E. A. TOLKACHEV

VECTOR PARAMETRIZATION OF THE GALILEO AND CARROLL GROUPS: CARROLL ELECTRODYNAMICS WITH EXTERNAL SOURCES

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
tea@dragon.bas-net.by

It is shown that the Galileo and Carroll boosts with dimensional parameters are the special cases of vector parameterization of the corresponding transformations of the mathematical Galileo group. In the biquaternions over the algebra of dual numbers, a number of the representations of the Carroll group are realized and two systems of the linear partial differential equations relative to the Carroll bivector fields generated by external sources are constructed. It is shown that the definition of the field strengths in terms of the potentials is possible only if there are the sources of the same type, and only for one system of the equations of Carroll electrodynamics.

Keywords: biquaternions, vector parameterization, Carroll group, dual number, electrodynamics equations.

Введение. Как известно [1], бикватернионный формализм позволяет связать векторную параметризацию конечных преобразований группы Лоренца с векторной параметризацией группы Галилея путем дискретной замены в формулах мнимой единицы ($i^2 = -1$) на дуальную единицу ($j^2 = 0$) без обращения к известной процедуре непрерывной контракции Иненю–Вигнера соответствующих алгебр Ли. В рамках такого подхода бикватернионные уравнения Максвелла порождают две системы уравнений нерелятивистской электродинамики Леви–Леблонда [2] в пространстве–времени Галилея–Ньютона без процедуры разложения по параметру малости или устремления модуля скорости света c к бесконечности. При этом, однако, остаются проблемы рескейлинга полей и изменения физического смысла внешних источников [3]. В последнее время возобновился интерес [4] к «ультрарелятивистскому» пределу $c \to 0$, превращающему пространство Минковского в пространство–время Кэрролла [5]. Предпринимаются попытки построения кэрролловского предела ОТО [6; 7], струн [8] и бран [9]. Однако наиболее часто обращаются к уравнениям электродинамики в пространстве–времени Кэрролла [4]. Как правило, все ограничивается построением двух систем свободных уравнений, как предела уравнений Максвелла, и доказательством их ковариантности относительно группы Кэрролла. В настоящей работе показано, что галилеевские и кэрролловские бусты являются частными физическими случаями размерной векторной параметризации соответствующих, вообще говоря, безразмерных преобразований математической группы Галилея. Выяснена их связь с обычной (брадионной) и псевдотахионной параметризациями группы Лоренца. С использованием общего подхода к описанию групп, параметризованных бикватернионами над алгеброй дуальных чисел [10], реализован ряд представлений групп Галилея и Кэрролла и построены линейные дифференциальные уравнения в частных производных относительно бивекторных полей, порождаемых внешними источниками двух типов. Показано, что определение напряженностей полей через потенциалы в присутствии внешних источников возможно только для одной из систем уравнений электродинамики в пространстве–времени Кэрролла.

Основная часть. Напомним, что закон умножения бикватернионов в векторной форме естественно соединяет в себе все операции векторной алгебры

$$Q_1Q_2 = Q_{10}Q_{20} - (\underline{Q}_1\underline{Q}_2) + Q_{10}\underline{Q}_2 + Q_{20}\underline{Q}_1 + [\underline{Q}_1\underline{Q}_2],$$

где $Q_{a=1,2}$ – бикватернионы, представимые в виде $Q = Q_0 + \underline{Q}$, а $(\underline{Q}_1\underline{Q}_2)$ и $[\underline{Q}_1\underline{Q}_2]$ – аналоги скалярного и векторного произведений. Для бикватернионов над гиперкомплексными числами определены операции гиперкомплексного – $Q^* = Q_0^* - \underline{Q}^*$ и кватернионного – $\bar{Q} = Q_0 - \underline{Q}$ сопряжений, первое из которых является автоморфизмом, второе – антиавтоморфизмом алгебры бикватернионов $\overline{Q_1Q_2} = \bar{Q}_2\bar{Q}_1$. С их помощью в пространстве бикватернионов можно выделить инвариантные классы

$$S_0 = \bar{S}_0,\ \ S_0 = \pm S_0^*;\quad \underline{F} = -\underline{F};\quad V = -\bar{V}^*;\quad \tilde{V} = \bar{\tilde{V}}^* \tag{1}$$

относительно следующих преобразований с помощью произвольных бикватернионов L

$$S_0' = LS_0\bar{L};\quad \underline{F}' = L\underline{F}\bar{L};\quad V' = LV\bar{L}^*;\quad \tilde{V}' = L\tilde{V}\bar{L}^*. \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать только специальные преобразования, осуществляемые бикватернионами с единичной нормой $L\bar{L} = 1,$ представимыми в виде

$$L = (1 + \underline{q}\ \ \underline{\bar{q}})^{-1/2}(1 + \underline{q}), \tag{3}$$

где $\underline{q} = \underline{\text{o}} + I\underline{\tilde{\beta}}$ – бикватернионный аналог вектор-параметра Ф. И. Федорова, подчиняющийся закону композиции [11],

$$L_3 = L_1L_2 \to \underline{q}_3 = \frac{\underline{q}_1 + \underline{q}_2 + [\underline{q}_1\underline{q}_2]}{1 - (\underline{q}_1\underline{q}_2)} \equiv <\underline{q}_1\underline{q}_2>, \tag{4}$$

а I равно i или j. Строго говоря, в определении (3) перед дробью должен стоять знак ±, что несущественно, пока рассматриваются только билинейные преобразования вида (2). Очевидно, что преобразования (2), (3) сохраняют норму бикватернионов (1). Преобразования (2), (3) с мнимыми вектор-параметрами $\underline{q} \equiv I\underline{\tilde{\beta}}$ называются бустами, а с действительными $\underline{q} \equiv \underline{\text{o}}$ – преобразованиями группы вращений – $SO(3)$.

В силу нелинейности (4), при $i^2 = -1$ неколлинеарные бусты группы не образуют, в отличие от случая $j^2 = 0$, когда вектор-параметры бустов при композиции просто складываются $\underline{\tilde{\beta}}_3 = \underline{\tilde{\beta}}_1 + \underline{\tilde{\beta}}_2$. При этом, подставляя в (4) $L^G = [1 + \underline{\text{o}}^2 + 2j(\underline{\text{o}}\underline{\tilde{\beta}})]^{-1/2}(1 + \underline{\text{o}} + j\underline{\tilde{\beta}}),$ убеждаемся, что композиция вращений не зависит от наличия бустов, поскольку всегда

$$\underline{\text{o}}_3 = <\underline{\text{o}}_1, \underline{\text{o}}_2>, \tag{5а}$$

но не наоборот

$$\underline{\tilde{\beta}}_3 = [1 - (\underline{\text{o}}_1\underline{\text{o}}_2)]^{-2}\{[1 - (\underline{\text{o}}_1\underline{\text{o}}_2)](\underline{\tilde{\beta}}_1 + \underline{\tilde{\beta}}_2 + [\underline{\text{o}}_1\underline{\tilde{\beta}}_2] - [\underline{\text{o}}_2\underline{\tilde{\beta}}_1]) + (\underline{\text{o}}_1 + \underline{\text{o}}_2 + [\underline{\text{o}}_1\underline{\text{o}}_2])[(\underline{\text{o}}_1\underline{\tilde{\beta}}_2) + (\underline{\text{o}}_1\underline{\tilde{\beta}}_2)]\}. \tag{5б}$$

Кроме того, нелинейность (4) при $i^2=-1$ влечет за собой безразмерность комплексного вектор-параметра $\underline{q}=\underline{o}+i\tilde{\underline{\beta}}$. При $j^2=0$ из (5а) следует безразмерность только действительной части $\underline{q}=\underline{o}+j\underline{\beta}$. Его мнимая часть – $\tilde{\underline{\beta}}$, согласно (5б), может с одинаковым успехом рассматриваться как размерная, так и безразмерная величина. Соответственно, в первом случае компоненты бикватернионов, «смешиваемые» преобразованиями (2), должны иметь одинаковую размерность, а во втором – либо одинаковую, либо разную.

Хорошо известно [11], что при $i^2=-1$ композиция двух произвольных бустов – $\tilde{\underline{\beta}}_a \equiv \underline{n}_a th\theta_a/2$, где $\underline{n}_a^2=1$, всегда может быть представлена как композиция буста и вращения. При этом параметры $\underline{\beta}_a=2\tilde{\underline{\beta}}_a(1+\tilde{\underline{\beta}}_a^2)^{-1/2}=i\underline{n}_a th\theta_a$ удовлетворяют обезразмеренному релятивистскому закону сложения скоростей

$$\underline{\beta}_3=\frac{[\underline{\beta}_1-\hat{\underline{\beta}}_2(\underline{\beta}_1\hat{\underline{\beta}}_2)]\sqrt{1-\beta_2^2}+\hat{\underline{\beta}}_2[\beta_2+(\underline{\beta}_1\hat{\underline{\beta}}_2)]}{1+(\underline{\beta}_1\underline{\beta}_2)}, \tag{6}$$

где «шляпка» обозначает единичный вектор. Трансформационные свойства бикватернионов $x=ix_0+\underline{x}$, принадлежащих классу V из (1), относительно бустов имеют вид безразмерных преобразований Лоренца

$$x_0'=\frac{x_0+(\underline{\beta}\underline{x})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \underline{x}'=\underline{x}-\hat{\underline{\beta}}(\hat{\underline{\beta}}\underline{x})+\frac{\hat{\underline{\beta}}(\hat{\underline{\beta}}\underline{x})+\underline{\beta}x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{7}$$

Подстановка

$$x_0=ct, \quad \underline{\beta}=\frac{V}{c}\hat{\underline{V}}, \tag{8а}$$

где размерности $[c]=[\underline{x}][t]^{-1}$, $[V]=[c]$, приводит их к стандартному виду

$$t'=\frac{t+\dfrac{(\underline{V}\ \underline{x})}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \underline{x}'=\underline{x}-\hat{\underline{V}}(\hat{\underline{V}}\ \underline{x})+\frac{\hat{\underline{V}}(\hat{\underline{V}}\ \underline{x})+\underline{V}t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{9а}$$

Однако возможен и псевдотахионный вариант трактовки преобразований (7), когда

$$x_0=ct, \quad \underline{\beta}=\frac{c}{U}\hat{\underline{U}}, \quad [U]=[c], \tag{8б}$$

и

$$t'=\frac{t+\dfrac{(\underline{x}\hat{\underline{U}})}{U}}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{U^2}}}, \quad \underline{x}'=\underline{x}-(\underline{x}\hat{\underline{U}})\hat{\underline{U}}+\frac{\dfrac{c^2}{U}t+(\underline{x}\hat{\underline{U}})}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{U^2}}}\hat{\underline{U}}. \tag{9б}$$

Соответственно из (6) имеем два закона сложения параметров размерности скорости

$$\underline{V}_3\equiv\underline{V}_1\underset{\le c}{\oplus}\underline{V}_2=\frac{[\underline{V}_1-\hat{\underline{V}}_2(\underline{V}_1\hat{\underline{V}}_2)]\sqrt{1-\dfrac{V_2^2}{c^2}}+\hat{\underline{V}}_2[V_2+(\underline{V}_1\hat{\underline{V}}_2)]}{[1+\dfrac{(\underline{V}_1\underline{V}_2)}{c^2}]}, \tag{10а}$$

$$\underline{U}_3\equiv\underline{U}_1\underset{\ge c}{\oplus}\underline{U}_2=\frac{U_1U_2+c^2(\hat{\underline{U}}_1\hat{\underline{U}}_2)}{(U_1+U_2)^2-c^2[1-(\hat{\underline{U}}_1\hat{\underline{U}}_2)^2]}\times$$
$$\{[\hat{\underline{U}}_1-\hat{\underline{U}}_2(\hat{\underline{U}}_1\hat{\underline{U}}_2)]\sqrt{U_2^2-c^2}+\hat{\underline{U}}_2[U_1+(\hat{\underline{U}}_1\underline{U}_2)]\}. \tag{10б}$$

Нетрудно видеть, что при любом конечном значении $c \neq 0$ и $\hat{\underline{V}} = \hat{\underline{U}}$ формулы (9), (10) связаны подстановкой $VU = c^2$, которая неоднократно возникала при попытках построения теории тахионов [12]. Позднее эта формула обсуждалась в работе [13], где была высказана мысль, что тахионы являются псевдочастицами, так как физически выглядят как брадионы с дуальной, времениподобной 4-скоростью.

Двум размерным параметрам $\underline{V}$ и $\underline{U}$ соответствуют два предельных перехода. Использование (8а) позволяет устремить $c \to \infty$ в (9а) и (10а), а (8б) – найти предел $c \to 0$ в (9б), (10б) [5]. Очевидно, что в первом случае конус в пространстве Минковского разворачивается в пространство R^3, ограничение на модуль скорости исчезает, как и пространственно подобная внешность конуса. Возникает абсолютная одновременность событий в пространстве расслоения с базой – осью времени, над каждой точкой которой существует слой R^3. Естественно, при этом из (9а) и (10а) следуют преобразования Галилея и нерелятивистский закон сложения скоростей

$$t' = t, \quad \underline{x}' = \underline{x} + \underline{V}t, \qquad V_3 = \underline{V}_1 + \underline{V}_2. \tag{11а}$$

Во втором случае изотропный конус вырождается в ось времени, движение в обычном смысле становится невозможным, поскольку R^3 возникает из внешности конуса, состоящей из причинно несвязанных точек, в каждой из которых течет свое время. С геометрической точки зрения пространство описывается четырехмерной нулевой гиперповерхностью в $R^{4.1}$ [6]. Формально из (9б), (10б) имеем

$$t' = t + \left(\underline{x}\frac{\hat{\underline{U}}}{U}\right) \equiv t + (\underline{x}\ \ \underline{v}), \quad \underline{x}' = \underline{x},$$
$$\underline{U}_3 = \frac{U_2^2\underline{U}_1 + U_1^2\underline{U}_2}{(U_1 + U_2)^2} \leftrightarrow \frac{\hat{\underline{U}}_3}{U_3} = \frac{\hat{\underline{U}}_1}{U_1} + \frac{\hat{\underline{U}}_2}{U_2} \leftrightarrow \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2. \tag{11б}$$

Формулы (11б) описывают бусты в пространстве Кэрролла [5], образующие подгруппу десяти параметрической группы Кэрролла, включающей, наряду с группой вращений, постоянные сдвиги пространственно-временных координат.

Отличительной чертой развиваемого подхода является выбор единой обезразмеривающей константы c. Использование же бикватернионов над алгеброй дуальных чисел дает возможность универсальной формулировки линейных уравнений первого порядка в частных производных для гиперкомплексных бивекторов в пространствах Галилея–Ньютона и Кэрролла.

Прежде всего, заметим, что формулы (11), полученные в результате предельных манипуляций с константами, автоматически следуют из (2)–(4) при $\underline{q} = j\tilde{\underline{\beta}} \equiv j\frac{\beta}{2}$. Преобразование бикватерниона $x = -t + j\underline{x}$ при галилеевских бустах, когда $\underline{\beta} = \underline{V}$

$$x' = -t' + j\underline{x}' = Gx\overline{G}^* = \left(1 - j\frac{\underline{V}}{2}\right)(-t + j\underline{x})\left(1 - j\frac{\underline{V}}{2}\right) = -t + j[\underline{x} + \underline{V}t] \tag{12}$$

представляет собой бикватернионную запись первой из формул (11а). Галилеевский закон сложения скоростей следует из композиции вектор-параметров (4).

Знак минус перед временем выбран для удобства прослеживания связи с формулами для пространства Минковского, в котором преобразования Лоренца (2), (3) бикватернионов $x = ict + \underline{x}$ и $-ix = -ct + i\underline{x}$ очевидно приводят к одинаковым выражениям для их компонент. Преобразования Галилея бикватернионов $x = jt + \underline{x}$ и $\tilde{x} = -t + j\underline{x}$ различаются существенно.

Так как матричный аналог (12) — $\begin{pmatrix} -t' \\ \underline{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\underline{V} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ \underline{x} \end{pmatrix} \equiv B_G \begin{pmatrix} -t \\ \underline{x} \end{pmatrix}$, то, согласно общим правилам, трансформационные свойства компонент «градиента» определяются матрицей $(B_G^T)^{-1}$, где T – знак транспонирования $\begin{pmatrix} -\partial'_t \\ \nabla'_a \end{pmatrix} = (B_G^T)^{-1}\begin{pmatrix} -\partial_t \\ \nabla_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & V_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\partial_t \\ \nabla_a \end{pmatrix}$. Это позволяет ввести бикватернионный дифференциальный оператор $\nabla_G = -j\partial_t + \underline{\nabla}$ с законом преобразования

$$\nabla' = -j\partial'_t + \underline{\nabla}' = G\nabla\overline{G}^* = \left(1 - j\frac{\underline{V}}{2}\right)(-j\partial_t + \underline{\nabla})\left(1 - j\frac{\underline{V}}{2}\right) = -j[\partial_t - (\underline{V}\underline{\nabla})] + \underline{\nabla}. \quad (13)$$

Теперь есть все необходимое для записи Галилей-ковариантного уравнения первого порядка относительно векторного бикватерниона $\underline{F}_G^*$ (1), динамика которого определяется внешними источниками V_G и $\tilde{V}_G$ (1)

$$\nabla_G \underline{F}_G^* = \underline{f}_{G1} - j\underline{f}_{G2} = V_G + \tilde{V}_G = (jV_{G0} + \underline{V}_G) + (\tilde{V}_{G0} + j\underline{\tilde{V}}_G). \quad (14)$$

Из (2) следует, что уравнение (14) сохраняет свой вид при преобразованиях Галилея, если источники принадлежат к двум последним классам из (2). Эти уравнения могут быть с одинаковым успехом интерпретированы как магнитная и электрическая системы Леви–Леблонда [2]. Подставляя в (14) $\underline{f}_{G1} = \underline{B}_G$, $\underline{f}_{G2} = \underline{E}_G$, $\tilde{V}_G = 0$, $V_G \equiv J_{Ge} = j\rho_{Ge} + \underline{j}_{Ge}$, получаем «магнитную» систему

$$\partial_t \underline{B}_G + [\underline{\nabla}\underline{E}_G] = 0, \ [\underline{\nabla}\underline{B}_G] = \underline{j}_{Ge}, \ (\underline{\nabla}\underline{B}_G) = 0, \ (\underline{\nabla}\underline{E}_G) = \rho_{Ge}, \quad (15а)$$

а при $\underline{f}_{G1} = \underline{E}_G$, $\underline{f}_{G2} = -\underline{B}_G$, $\tilde{V}_G = -\rho_{Ge} + j\underline{j}_{Ge}$, $V_G = 0$ – «электрическую»

$$[\underline{\nabla}\underline{E}_G] = 0, \ -\partial_t \underline{E}_G + [\underline{\nabla}\underline{B}_G] = \underline{j}_{Ge}, \ (\underline{\nabla}\underline{B}_G) = 0, \ (\underline{\nabla}\underline{E}_G) = \rho_{Ge}. \quad (15б)$$

Напомним, что системы (15) получаются из двух равнозначных бикватернионных записей уравнений Максвелла в пространстве Минковского ($i^2 = -1$) [1]

$$\begin{aligned}(-i\partial_{ct} + \underline{\nabla})(\underline{B} - i\underline{E}) &= \{i(\underline{\nabla}\underline{E}) + i^2\partial_{ct}\underline{E} + [\underline{\nabla}\underline{B}]\} + \{-(\underline{\nabla}\underline{B}) - i(\partial_{ct}\underline{B} + [\underline{\nabla}\underline{E}])\} = c^{-1}(ic\rho_e + \underline{j}_e),\\ (-i\partial_{ct} + \underline{\nabla})(\underline{E} + i\underline{B}) &= \{-(\underline{\nabla}\underline{E}) + i(-\partial_{ct}\underline{E} + [\underline{\nabla}\underline{B}])\} + \{-i(\underline{\nabla}\underline{B}) - i^2\partial_{ct}\underline{B} + [\underline{\nabla}\underline{E}]\} = c^{-1}(-c\rho_e + i\underline{j}_e),\end{aligned} \quad (16)$$

при $i \to j$, $j^2 = 0$. В уравнениях (15) нет размерной константы c, в отличие от уравнений, получаемых из (16). Соответственно поля и токи имеют различные размерности.

«Магнитную» систему (15а) правильнее называть «домаксвелловской» [14]. Очевидно, что при стандартном введении потенциалов ее первое и третье уравнения превращаются в тождества. Из второго следует, что $(\underline{\nabla}\underline{j}_{Ge}) \equiv 0$, т. е. все токи замкнуты, порождают магнитные поля и не зависят от плотностей электрических источников. «Разомкнуть» токи и объединить их с зарядами в уравнение непрерывности Максвеллу удалось после введения токов смещения, отсутствующих в (15а). «Электрическая» же система (15б), в сущности, является формальным «неологизмом».

Применим теперь описанный подход к самосогласованному построению уравнений электродинамики в пространстве Кэрролла, параметризуемом бикватернионами $\tilde{x} \equiv x_C = jt + \underline{x}$. Тогда при галилеевских бустах вместо (12), (13) из (11б) имеем

$$\underline{x}' = \underline{x}, \ t' = t + \left(\underline{x}\frac{\hat{\underline{U}}}{U}\right) = t + (\underline{x}\underline{\beta}_C) \to \partial'_t = \partial_t, \ \underline{\nabla}' = \underline{\nabla} - \frac{\hat{\underline{U}}}{U}\partial_t = \underline{\nabla} - \underline{\beta}_C\partial_t. \quad (17)$$

Это позволяет по аналогии с (14) выписать искомые уравнения

$$\begin{gathered}\nabla_C \underline{F}_C^* = (\partial_t + j\underline{\nabla})(\underline{f}_{C1} - j\underline{f}_{C2}) = -j(\underline{\nabla}\underline{f}_{C1}) + \partial_t \underline{f}_{C1} - j\partial_t \underline{f}_{C2} + j[\underline{\nabla}\underline{f}_{C1}] =\\ V_C + \tilde{V}_C = (jV_{C0} + \underline{V}_C) + (\tilde{V}_{C0} + j\underline{\tilde{V}}_C) \to\\ -\partial_t \underline{f}_{C2} + [\underline{\nabla}\underline{f}_{C1}] = \underline{\tilde{V}}_C, \ \partial_t \underline{f}_{C1} = \underline{V}_C, \ (\underline{\nabla}\underline{f}_{C1}) = -V_{C0}, \ \tilde{V}_{C0} = 0,\end{gathered} \quad (18)$$

где при бустах кэрролловские токи и поля преобразуются по правилам

$$V'_C = j[V_{C0} + (\underline{\beta}_C\underline{V}_C)] + \underline{V}_C, \quad \tilde{V}_C = \tilde{V}_{C0} + j(\underline{\tilde{V}}_C - \underline{\beta}_C\tilde{V}_{C0}), \quad \underline{f}'_{C1} = \underline{f}_{C1}, \ \underline{f}'_{C2} = \underline{f}_{C2} - [\underline{\beta}_C\underline{f}_{C1}]. \quad (19)$$

Таким образом, система уравнений электродинамики Кэрролла состоит из семи уравнений относительно шести напряженностей и одного ограничения на внешние источники – требование обращения в ноль одного из зарядов. Последнее условие обеспечивает ковариантность относительно преобразований из группы Кэрролла первого уравнения в третьей строке (18). Вызывает вопрос отсутствие ограничения на $(\underline{\nabla} \underline{f}_{C2})$, которое является неотъемлемым атрибутом систем уравнений электродинамики в пространствах Минковского и Галилея–Ньютона. Частичный ответ на него следует из неинвариантности этой дивергенции относительно преобразований (17), (19) – $(\underline{\nabla} \underline{f}_{C2})' = (\underline{\nabla} \underline{f}_{C2}) + (\beta_C \tilde{V}_C)$ при $\tilde{V}_C \neq 0$. Восстановить в правах $(\underline{\nabla} \underline{f}_{C2})$ можно только при отсутствии внешних источников типа $\tilde{V}_C$. Для доказательства совместности свободной от $\tilde{V}_C$ системы (18) введем потенциал

$$\underline{F}_C^* = \underline{f}_{C1} - j\underline{f}_{C2} \equiv -\bar{\nabla}_C A = -\{(\partial_t - j\underline{\nabla})(jA_0 + \underline{A})\}_V = -\partial_t \underline{A} + j[\underline{\nabla}\underline{A}] \to \underline{f}_{C1} = -\partial_t \underline{A},\ \underline{f}_{C2} = [\underline{\nabla}\underline{A}],$$

что влечет за собой «недостающее уравнение» – тождество $(\underline{\nabla} \underline{f}_{C2}) \equiv 0$. Напомним, что и для уравнений Максвелла последовательное введение потенциалов возможно только в присутствии однотипных электрических источников.

Чтобы установить формальную связь введенных кэрролловских полей и токов с их релятивистскими партнерами, перепишем уравнения Максвелла с электрическими источниками $(-i\partial_{ct} + \underline{\nabla})(\underline{B} - i\underline{E}) = (ic\rho_e + \underline{j}_e)$ в двух эквивалентных формах

$$(\partial_{ct} + i\underline{\nabla})(\underline{B} - i\underline{E}) = (-c\rho_e + i\underline{j}_e), \quad (\partial_{ct} + i\underline{\nabla})(\underline{E} + i\underline{B}) = -\frac{1}{c}(ic\rho_e + \underline{j}_e), \quad i^2 = -1$$

и произведем замену i на j

$$(\partial_{ct} + j\underline{\nabla})(\underline{B} - j\underline{E}) = -j(\underline{\nabla}\underline{B}) + \partial_{ct}\underline{B} - j\partial_{ct}\underline{E} + j[\underline{\nabla}\underline{B}] = c^{-1}(-c\tilde{\rho}_e + j\tilde{\underline{j}}_e),$$

$$(\partial_{ct} + j\underline{\nabla})(\underline{E} + j\underline{B}) = -j(\underline{\nabla}\underline{E}) + \partial_{ct}\underline{E} + j\partial_{ct}\underline{B} + j[\underline{\nabla}\underline{E}] = -c^{-1}(jc\rho_e + \underline{j}_e).$$

Убирая константу c, и соответственно, изменяя размерности полей и токов, имеем две кэрролловские системы, в первой из которых электрический ток выступает в роли $\tilde{V}_C$

$$-\partial_t \underline{E}_C + [\underline{\nabla}\underline{B}_C] = \tilde{\underline{j}}_{Ce},\ \partial_t \underline{B}_C = 0,\ (\underline{\nabla}\underline{B}_C) = 0, \tag{20а}$$

во второй – в роли V_C из (18)

$$-\partial_t \underline{E}_C = \underline{j}_{Ge},\ \partial_t \underline{B}_C + [\underline{\nabla}\underline{E}_C] = 0,\ (\underline{\nabla}\underline{E}_C) = \rho_{Ge}. \tag{20б}$$

При отсутствии внешних источников имеем две известные системы уравнений [G]

$$-\partial_t \underline{E}_C + [\underline{\nabla}\underline{B}_C] = 0,\ \partial_t \underline{B}_C = 0,\ (\underline{\nabla}\underline{B}_C) = 0,\quad (\underline{\nabla}\underline{E}_C) = 0, \tag{21а}$$

$$\partial_t \underline{E}_C = 0,\ \partial_t \underline{B}_C + [\underline{\nabla}\underline{E}_C] = 0,\ (\underline{\nabla}\underline{E}_C) = 0,\ (\underline{\nabla}\underline{B}_C) = 0. \tag{21б}$$

Заключение. Система (20а) описывает постоянное во времени, не зависящее от системы отсчета, роторное магнитное поле $\underline{B}_C$, порождаемое постоянными токами и линейно зависящими от времени «электрическими» полями $\underline{E}_C$. Переменные токи индуцируют зависящие от времени кэрролловские «электрические» поля, удовлетворяющие уравнению $\bar{\nabla}_C \nabla_C \underline{E}_C = \partial_t^2 \underline{E}_C = -\partial_t \tilde{\underline{j}}_{Ce}$, из которого следует, что линейно зависящие от времени «электрические» поля, наряду с постоянными, являются вакуумными решениями. Как следует из (21а), в отсутствие источников они еще и роторные.

Система (20б) динамически более интересна. Во-первых, из нее следует уравнение непрерывности для внешних источников. Во-вторых, в нее без ограничения общности можно добавить Кэрролл-ковариантное уравнение $(\underline{\nabla}\underline{B}_C) = 0$. Главное же в том, что при описании взаимодействия в пространстве Кэрролла в качестве «нулевого» приближения можно выбирать только систему (21б). Система же (21а) описывает «темный» фон, не проявляющий себя в электромагнитных взаимодействиях.

Выражаю благодарность Л. М. Томильчику и Ю. А. Курочкину за полезные комментарии.

Список использованной литературы

1. *Курочкин, Ю. А.* Дуальные преобразования в галилеевски инвариантной электродинамике и три вида бикватернионов / Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 8. – С. 695–697.

2. *Le Bellac, M.* Galilean electromagnetism / M. Le Bellac, J. M. Levy-Leblond // Nuov. Cim. – 1973. – Vol. 14B. – P. 217–233.

3. *Толкачев, Е. А.* Принцип относительности и уравнения галилеевски инвариантной электродинамики с источниками / Е. А. Толкачев // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 44–48.
4. Carroll versus Newton and Galilei: two dual non-Einsteinian concepts of time / C. Duval [et al.] // arXiv: gr-qc. 2014. – 1402.0657 v5. – P. 1–32.
5. *Levy-Leblond, J. M.* Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincare'/ J. M. Levy-Leblond // Annales de l'I.H.P. – 1965. – Section A. – Vol. 3, N 1. – P. 1–12.
6. *Dautcourt, G.* On the Ultrarelativistic Limit of General Relativity/ G. Dautcourt // arXiv: gr-qc. 1998. – 9801093 v1. – P. 1–8.
7. *Hartong, J.* Gauging the Carroll Algebra and Ultra-Relativistic Gravity / J. Hartong // arXiv: hep-th. 2015. – 1505011v1. – P. 1–27.
8. *Cardona, B.* Dynamics of Carroll Strings / B. Cardona, J. Gomis, J. M. Ponsa // arXiv: hep-th. 2016. – 1605.05483 v2. – P. 1–12.
9. *Clark, T. E.* AdS-Carroll Branes / T. E. Clark, T. ter Veldhuis // arXiv: hep-th. 2016. – 1605484 v1. – P. 1–47.
10. *Богуш, А. А.* Векторная параметризация некоторых групп, связанных с бикватернионами над двойными и дуальными числами / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // ДАН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 39–43.
11. *Федоров, Ф. И.* Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
12. *Mignani, R.* Generalized Lorenz transformations in four dimensions and superluminal objects / R. Mignani, R. E. Recami // N. Cim. – 1973. – Vol. 4, N 1. – P. 109–189.
13. *Filipe, L.* Tachyons and psedotachyonic relativity / L. Filipe, T. D. Ferreira // Conc. of Phys. 2007. – Vol. IV, N 1. – P. 35–69.
14. *Фущич, В. И.* Симметрия уравнений Максвелла / В. И. Фущич, А. Г. Никитин. – Киев: Наук. думка, 1983. – 200 с.

Поступило в редакцию 27.06.2016