Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 сентябрь–октябрь Том 60 № 5

УДК 539.12

В. В. КИСЕЛЬ[1], Е. М. ОВСИЮК[2], Я. А. ВОЙНОВА[3], О. В. ВЕКО[4], В. М. РЕДЬКОВ[5]

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 И АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*
vasiliy-bspu@mail.ru
[2]*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь*
e.ovsiyuk@mail.ru
[3]*Гимназия г. Калинковичи, Беларусь*
vekoolga@mail.ru
[4]*Кочищанская средняя школа Ельского района, Беларусь*
voinyuschka@mail.ru
[5]*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
v.redkov@dragon.bas-net.by

Обобщенное уравнение Даффина–Кеммера для частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом исследуется в присутствии внешнего однородного магнитного поля. На основе использования техники проективных операторов проведено разделение переменных. Задача сведена к системе уравнений для трех независимых функций, решения построены в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Найдены три серии уровней энергии, отвечающих связанным состояниям частицы в магнитном поле. Если требовать, чтобы уровни энергии имели физический смысл при всех значениях главного квантового числа ($n = 0, 1, 2, ...$), то на описывающий аномальный магнитный момент параметр необходимо накладывать ограничения – они найдены в явном виде. Также рассмотрена нейтральная векторная частица. В этом случае связанных состояний не существует, а проявление аномального магнитного момента сводится к присутствию зависящего от величины и знака параметра аномального магнитного момента масштабного фактора в аргументе волновых функций.

Ключевые слова: векторный бозон, аномальный магнитный момент, магнитное поле, точные решения.

V. V. KISEL[1], E. M. OVSIYUK[2], O. V. VEKO[3], Y. A. VOYNOVA[4], V. M. RED'KOV[5]

QUANTUM MECHANICS OF A SPIN 1 PARTICLE WITH THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN THE MAGNETIC FIELD

[1]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*
vasiliy-bspu@mail.ru
[2]*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus*
e.ovsiyuk@mail.ru
[3]*Gymnasium, Kalinkovichi, Belarus*
vekoolga@mail.ru
[4]*Secondary school, Kochischany, Yelsk region, Belarus*
voinyuschka@mail.ru
[5]*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
v.redkov@dragon.bas-net.by

The generalized Duffin–Kemmer equation for a spin 1 particle with the anomalous magnetic moment in the external uniform magnetic field is investigated. The separation of variables in the wave equation is performed on the basis of projective operator techniques. The problem is reduced to a system of differential equations for three independent functions that have been solved in terms of the confluent hypergeometric functions. Three series of the energy levels are found. To assign them the physical sense at all values of the main quantum number $n = 0, 1, 2, ...$, special restrictions on anomalous magnetic moment values must be imposed – they are formulated in explicit form. Otherwise, only some part of the energy levels corresponds to the bound states. The neutral spin 1 particle is considered as well. In this case, no bound states exist in the systems. The main qualitative manifestation of the anomalous magnetic moment is the space scaling of the arguments of the wave functions in comparison with a particle without such a moment.

Keywords: vector boson, anomalous magnetic moment, magnetic field, exact solutions.

Введение. Петрашем [1] была предложена 20-компонентная теория для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом. В присутствии внешних электромагнитного и гравитационного полей теория была исследована в [2–4]; было показано, что после исключения дополнительного вектор-биспинора уравнение для основного биспинора сводится к общековариантному уравнению Дирака, содержащему, помимо минимального и паулиевского членов взаимодействий, дополнительное взаимодействие частицы со спином 1/2 с внешним гравитационным полем, осуществляемое через скалярную кривизну $R(x)$. Аналогичное обобщение волнового уравнения для спина 1 было предложено впервые Шамали и Капри [5]; см. также [6].

В работах [7; 8] обобщенное уравнение Дирака было решено точно во внешних магнитном и электрическом полях. В данной работе обобщенное уравнение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом решено в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Используется 10-мерный матричный формализм Даффина–Кеммера, наличие аномального магнитного момента учитывается с помощью дополнительного члена взаимодействия в волновом уравнении.

Разделение переменных. Обобщенное уравнение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом задается в виде [3; 4]

$$\left(\beta_\mu D_\mu + \frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\nu]} P J_{[\mu\nu]} + M\right)\Psi = 0\,, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \Psi_\mu \\ \Psi_{[\mu\nu]} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

используются 10-мерные матрицы Даффина–Кеммера; $J_{[\mu\nu]} = \beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu$; P – проективный оператор, выделяющий из Ψ векторную составляющую Ψ_μ ($P + \overline{P} = I$); $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

В тензорной форме уравнения имеют вид (используется метрика с мнимой единицей)

$$D_\mu \Psi_\nu - D_\nu \Psi_\mu + M\Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad D_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\nu]}\Psi_\nu + M\Psi_\mu = 0.$$

Вводим матрицу $Y = iJ_{[12]}$; она удовлетворяет уравнению $Y^3 = Y$, что позволяет ввести три проективных оператора и разбить волновую функцию Ψ в сумму трех составляющих:

$$P_0 = 1 - Y^2, \Psi_0 = P_0\Psi, \quad P_\pm = \frac{1}{2}Y(Y \pm 1), \quad \Psi_\pm = P_\pm \Psi.$$

Преобразуя уравнение (1) к цилиндрическим координатам (учитываем однородное магнитное поле $\vec{B} = (0,0,B)$), затем применяя подстановки

$$\Psi_0 = e^{ip_4x_4} e^{ip_3x_3} e^{im\phi} f_0(r), \quad \Psi_\pm = e^{ip_4x_4} e^{ip_3x_3} e^{i(m\pm1)\phi} f_\pm(r),$$

находим радиальные уравнения в следующей алгебраической форме:

$$(i\hat{p} + M) f_0 + \beta_+ \hat{a}_{m+1} f_+ - \beta_- \hat{b}_{m-1} f_- = 0,$$

$$(i\hat{p} + \Gamma P + M) f_+ - \beta_- \hat{b}_m f_0 = 0\,, \quad (i\hat{p} - \Gamma P + M) f_- + \beta_+ \hat{a}_m f_0 = 0. \tag{2}$$

В (2) использованы обозначения

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(+\frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r}\right), \quad \hat{b}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r}\right),$$

$$eB/2 = B_0, \quad \lambda_3\lambda_3^*(2eB/M) = \Gamma, \quad ip_3\beta_3 + ip_4\beta_4 = i\hat{p}. \tag{3}$$

После необходимых вычислений с использованием алгебры β-матриц систему радиальных уравнений можно преобразовать к более простой форме

$$(i\hat{p} + M) f_0 + \beta_+ \hat{a}_{m+1} f_+ - \beta_- \hat{b}_{m-1} f_- = 0\,,$$

$$(A+M)f_+ - \beta'_- \hat{b}_m f_0 = 0, \quad (C+M)f_- + \beta'_+ \hat{a}_m f_0 = 0,$$

где использованы обозначения

$$\frac{M+\Gamma\overline{P}}{M+\Gamma} i\hat{p} = A, \quad \frac{M+\Gamma\overline{P}}{M+\Gamma}\beta_- = \beta'_-, \quad \frac{(M-\Gamma\overline{P})}{M-\Gamma} i\hat{p} = C, \quad \frac{M-\Gamma\overline{P}}{M-\Gamma}\beta_+ = \beta'_+.$$

Введем в рассмотрение операторы со свойствами (пусть $p^2 = p_3^2 + p_4^2$)

$$\overline{(i\hat{p}+M)}(i\hat{p}+M) = p^2 + M^2, \ \overline{(A+M)}(A+M) = p^2 + M^2,$$

$$\overline{(C+M)}(C+M) = p^2 + M^2;$$

с точностью до нормировки эти формулы определяют обратные матрицы. Тогда систему уравнений можно переписать в существенно более простом виде:

$$\left(i\hat{p}+M\right)(p^2+M^2)f_0 + \beta_+\hat{a}_{m+1}(p^2+M^2)f_+ - \beta_-\hat{b}_{m-1}(p^2+M^2)f_- = 0, \tag{4a}$$

$$(p^2+M^2)f_+ - \overline{(A+M)}\beta'_-\hat{b}_m f_0 = 0, \quad (p^2+M^2)f_- + \overline{(C+M)}\beta'_+\hat{a}_m f_0 = 0. \tag{4b}$$

Уравнение (4a) с использованием (4b) преобразуется к виду матричного дифференциального уравнения относительно одной компоненты f_0:

$$\left[(i\hat{p}+M)(p^2+M^2) + \beta_+\hat{a}_{m+1}\overline{(A+M)}\beta'_-\hat{b}_m + \beta_-\hat{b}_{m-1}\overline{(C+M)}\beta'_+\hat{a}_m\right]f_0 = 0. \tag{5}$$

Фактически достаточно решить уравнение (5) относительно f_0; две другие компоненты f_+, f_+ вычисляются по f_0 с помощью уравнений из (4b).

Нужно знать явный вид введенных выше обратных операторов. Для решения этой задачи достаточно установить вид минимальных полиномов [3] соответствующих матриц. После выполнения необходимых вычислений устанавливаем, что требуемые обратные операторы должны быть квадратичными по соответствующим матрицам; они задаются соотношениями

$$\overline{(M+i\hat{p})} = \frac{1}{M}\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right],$$

$$\overline{(A+M)} = \frac{p^2+M^2}{M}\left[1 - \frac{M+\Gamma}{p^2+M^2+M\Gamma}A + \frac{M+\Gamma}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}A^2\right],$$

$$\overline{(C+M)} = \frac{p^2+M^2}{M}\left[1 - \frac{M-\Gamma}{p^2+M^2-M\Gamma}C + \frac{M-\Gamma}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}C^2\right], \tag{11}$$

где

$$A = \frac{M+\Gamma\overline{P}}{M+\Gamma}i\hat{p}, \quad A^2 = -\frac{M\hat{p}^2}{M+\Gamma}, \qquad C = \frac{M-\Gamma\overline{P}}{M-\Gamma}i\hat{p}, \quad C^2 = -\frac{M\hat{p}^2}{M-\Gamma}.$$

С учетом этого уравнение для компоненты $f_0(r)$ можно привести к виду

$$\{(p^2+M^2) + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2+M\Gamma)}\frac{1}{M+\Gamma}\times$$

$$[(p^2+M^2+M\Gamma)(i\hat{p})^2\beta_+ - M(p^2+M^2+M\Gamma)i\hat{p}\beta_+ + (p^2+M^2)(p^2+M^2+M\Gamma)\beta_+ -$$

$$(p^2+M^2)\beta_+ i\hat{p}(M+\Gamma P) + (p^2+M^2)\beta_+(i\hat{p})^2](M+\Gamma\overline{P})\beta_- +$$

$$\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2-M\Gamma)}\frac{1}{M-\Gamma}\times$$

$$[(p^2+M^2-M\Gamma)(i\hat{p})^2\beta_- - M(p^2+M^2-M\Gamma)i\hat{p}\beta_- + (p^2+M^2)(p^2+M^2-M\Gamma)\beta_- -$$

$$(p^2+M^2)\beta_- i\hat{p}(M-\Gamma P)+(p^2+M^2)\beta_-(i\hat{p})^2](M-\Gamma\bar{P})\beta_+\}f_0=0\,.$$

Дальше предстоит учесть явный вид составляющих в компоненте f_0 (она зависит от функций f_3, f_4, f_{12}, f_{34}) и явный вид всех матриц. После необходимых вычислений можно привести задачу к набору из четырех уравнений

$$f_{34}=-\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4), \tag{6a}$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m+\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m+p^2+M^2\right](p_4 f_3 - p_3 f_4)=0, \tag{6b}$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m+\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m+p^2+M^2\right](p_3 f_3 + p_4 f_4)=p^2\left(\frac{2B_0}{M}-\Gamma\right)f_{12}, \tag{6c}$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m+\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m+p^2+M^2\right]f_{12}=\Gamma\left(-\frac{2B_0}{M}+\Gamma\right)f_{12}+\left(-\frac{2B_0}{M}+\Gamma\right)(p_3 f_3+p_4 f_4). \tag{6d}$$

Анализ уравнений (6a) и (6b) очевиден. Система (6c), (6d) решается через диагонализацию матрицы смешивания. Для этого введем функции

$$\Phi_1=(p_3 f_3+p_4 f_4)+\lambda_1 f_{12}, \quad \Phi_2=(p_3 f_3+p_4 f_4)+\lambda_2 f_{12},$$

где λ_1, λ_2 – решения уравнения $\lambda^2-\lambda\Gamma+p^2=0$:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\Gamma+\sqrt{\Gamma^2-4p^2}\right), \quad \lambda_2=\frac{1}{2}\left(\Gamma-\sqrt{\Gamma^2-4p^2}\right).$$

Для функций Φ_1, Φ_2 получаем раздельные уравнения с похожей структурой:

$$(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m+\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m+p^2+M^2+\lambda'_{1,2})\Phi_{1,2}=0, \quad \lambda'_{1,2}=\left(\frac{2B_0}{M}-\Gamma\right)\lambda_{1,2}.$$

Получение спектров энергии. В явном виде два последних уравнения записываются так:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\varepsilon^2-M^2-p_3^2-\lambda'_{1,2}-\frac{(m-B_0 r^2)^2}{r^2}\right)\Phi_{1,2}=0.$$

Вводим переменную $x=|B_0|r^2$, уравнение для Φ_1 примет вид

$$\left[4|B_0|\left(x\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}\right)-\frac{|B_0|(m-xB_0/|B_0|)^2}{x}+\varepsilon^2-M^2-p_3^2-\lambda'_1\right]\Phi_1=0.$$

Для определенности полагаем $B_0=-|B_0|$:

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}-\frac{(m+x)^2}{4x}+\frac{\varepsilon^2-M^2-p_3^2-\lambda'_1}{4|B_0|}\right]\Phi_1=0.$$

Используем подстановку $\Phi_1=x^A e^{-Cx}\bar{\Phi}_1$, $A=+|m|/2$, $c=1/2$, в результате получаем

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2}+(|m|+1-x)\frac{d}{dx}-\left(\frac{|m|+m+1}{2}-\frac{\varepsilon^2-M^2-p_3^2-\lambda'_1}{4|B_0|}\right)\right]\bar{\Phi}_1=0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение; условие обрыва ряда до полинома имеет вид

$$\frac{|m|+m+1}{2}-\frac{\varepsilon^2-M^2-p_3^2-\lambda'_1}{4|B_0|}=-n;$$

откуда следует правило квантования

$$\Phi_1, \qquad \varepsilon_1^2-M^2-p_3^2=2|B_0|(m+|m|+1+2n)+\lambda'_1;$$

для решений Φ_2 имеем спектр с похожей структурой:

$$\Phi_2, \qquad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m+|m|+1+2n)+\lambda'_2.$$

Введем упрощающие обозначения:

$$2|B_0|(|m+|m|+1+2n) = N, \quad -p^2 = \varepsilon^2 - p_3^2 = E > 0, \quad \frac{2B_0}{M} - \Gamma = x,$$

$$\lambda'_1 = \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}), \quad \lambda'_2 = \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}),$$

тогда формулы квантования представляются в виде

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E_1 - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E_2 - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}).$$

Эти формулы легко разрешаются относительно E (следим одновременно за двумя возможностями):

$$2E - 2M^2 - 2N - x\Gamma = \pm x\sqrt{\Gamma^2 + 4E},$$

или

$$z \equiv 2N + 2M^2 + x\Gamma, \qquad (2E - z)^2 = x^2(\Gamma^2 + 4E).$$

Тогда

$$E^2 - E(z + x^2) + \frac{z^2 - x^2\Gamma^2}{4} = 0,$$

и корни равны

$$E_1 = \frac{z + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z + x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}.$$

Чтобы оба корня E_1, E_2 были вещественными и положительными (это отвечает физическим спектрам), нужно требовать

$$(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z + x^2 > 0, \quad z^2 - x^2\Gamma^2 > 0. \tag{7a}$$

Рассматриваем третье неравенство в (7a):

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad (2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0;$$

для его выполнения при всех значениях N достаточно требовать положительности параметра $x\Gamma > 0$ (напоминаем, что сейчас рассматривается случай $B_0 = -|B_0| < 0$)

$$x\Gamma > 0 \iff \left(\frac{2|B_0|}{M} + \Gamma\right)\Gamma < 0 \iff -\frac{2|B_0|}{M} < \Gamma < 0. \tag{7b}$$

Второе неравенство из (7a) $z + x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0$ с учетом (7b) выполняется автоматически. Первое неравенство $2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0$ выполняется в силу положительности z: $z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, x\Gamma > 0$. Поскольку в рассмотренном случае $B_0 = -|B_0| < 0$ и (см. (3)) имеем равенство

$$\Gamma = \pm 4\frac{-|B_0|}{M}\lambda_3\lambda_3^*;$$

то можно использовать только возможность с верхним знаком, когда $\Gamma < 0$.

Легко получить аналогичные результаты в случае противоположной ориентации магнитного поля $B_0 = +|B_0|$:

$$\Phi_1, \qquad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_1.$$

$$\Phi_2, \qquad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_2.$$

Используя прежние обозначения, формулы квантования представляются так же

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}),$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

эти формулы разрешаются относительно E:

$$E_1 = \frac{z + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z + x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}.$$

Чтобы оба корня E_1, E_2 были вещественными и положительными, нужно, как и прежде, требовать

$$(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z + x^2 > 0, \quad z^2 - x^2\Gamma^2 > 0.$$

Первое неравенство

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad (2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0$$

выполняется при (напоминаем, что рассматривается случай $B_0 = +|B_0| < 0$)

$$x\Gamma > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (-\frac{2|B_0|}{M} + \Gamma)\Gamma > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma < 0.$$

Формально возможную область положительных значений $\Gamma > 0, \Gamma > 2|B_0|/M$ рассматриваем как отвечающую нефизической ситуации, поскольку в нее не попадают заведомо разрешенные как угодно близкие к нулю значения Γ. Два оставшихся неравенства выполняются автоматически:

$$z + x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0;$$

$$2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0 \quad (z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, \ x\Gamma > 0).$$

Спектр энергии, отвечающий уравнению (6a) для функции $(p_4 f_3 - p_3 f_4)$, имеет вид

$$B_0 = -|B_0|, \qquad \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m + |m| + 1 + 2n),$$

$$B_0 = +|B_0|, \qquad \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n).$$

Нейтральная векторная частица в магнитном поле. Самостоятельный интерес представляет случай электрически нейтрального векторного бозона с аномальным магнитным моментом. В данном случае система уравнений относительно компонент f_3, f_4, f_{12}, f_{34} упрощается:

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4), \tag{8a}$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right](p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0, \tag{8b}$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right](p_3 f_3 + p_4 f_4) = -p^2\Gamma f_{12}, \tag{8c}$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right] f_{12} = \Gamma^2 f_{12} + \Gamma(p_3 f_3 + p_4 f_4). \tag{8d}$$

Анализ уравнений (8a) и (8b) очевиден. Система (8b)–(8d) решается через диагонализацию матрицы смешивания. Введем обозначения:

$$\Delta = \frac{1}{\Gamma}\Big[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\Big], \quad (p_3 f_3 + p_4 f_4) = \Phi_1, \quad f_{12} = \Phi_2;$$

систему уравнений (8c), (8d) можно переписать короче в матричном виде так:

$$\Delta\begin{vmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -p^2\\ 1 & \Gamma\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{vmatrix} \;\Rightarrow\; \Delta\, S\begin{vmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{vmatrix} = S\begin{vmatrix}0 & -p^2\\ 1 & \Gamma\end{vmatrix} S^{-1} S\begin{vmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{vmatrix}.$$

Требуем

$$S\begin{vmatrix}0 & -p^2\\ 1 & \Gamma\end{vmatrix} S^{-1} = \begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}, \qquad S = \begin{vmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{vmatrix};$$

получаем

$$\begin{vmatrix}-\lambda_1 & 1\\ -p^2 & (\Gamma-\lambda_1)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}s_{11}\\ s_{12}\end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix}-\lambda_2 & 1\\ -p^2 & (\Gamma-\lambda_2)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}s_{21}\\ s_{22}\end{vmatrix} = 0.$$

Решения выглядят так:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}), s_{11} = 1, \quad s_{12} = \lambda_1;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}), \, s_{21} = 1, \, s_{22} = \lambda_2.$$

Таким образом, для функций Φ_1, Φ_2 находим раздельные уравнения:

$$\left(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2 - \Gamma\lambda_{1,2}\right)\Phi_{1,2} = 0.$$

В явном виде два последних уравнения записываются так:

$$\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 + \Gamma\lambda_{1,2} \equiv D, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + D - \frac{m^2}{r^2}\right)\Phi_{1,2} = 0.$$

Будем искать решение в виде $\Phi = r^A e^{Br} f(r)$; для функции $f(r)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{2A+1}{r} + 2B\right)\frac{df}{dr} + \left(\frac{A^2 - m^2}{r^2} + \frac{2AB + B}{r} + B^2 + D\right) f = 0.$$

На параметры A, B накладываем следующие ограничения:

$$A^2 - m^2 \equiv 0 \;\;\Rightarrow\;\; A = \pm|m|; \quad B^2 = -D \;\;\Rightarrow\;\; B = \pm i\sqrt{D},$$

тогда уравнение примет вид

$$r\frac{d^2 f}{dr^2} + (2A + 1 + 2Br)\frac{df}{dr} + (2AB + B) f = 0. \tag{9}$$

Отмечаем, что только при положительном $A = +|m|$ будем иметь решения, конечные в нуле $r = 0$: дальше будем предполагать это условие выполненным. Кроме того, из физических соображений должны требовать положительности параметра D – только тогда введение дополнительного параметра аномального магнитного момента Γ согласуется с принципом соответствия:

$$\Gamma = 0 \;\;\Rightarrow\;\; D \to D_0 = \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 > 0\,.$$

Также для определенности выбираем $B = +i\sqrt{D}$; это не уменьшает общности дальнейшего рассмотрения.

Чтобы преобразовать уравнение (9) к канонической форме вырожденного гипергеометрического уравнения, вводим новую переменную:

$$2Br = -x, \quad x\frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - x)\frac{df}{dx} - \left(A + \frac{1}{2}\right) f = 0,$$

что сопоставляется с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$F'' + (c - x)F' - aF = 0, \quad a = A + 1/2, \quad c = 2A + 1 = 2a.$$

Напоминаем, что

$$x = -2Br = -2i\sqrt{M^2 - p_3^2 + \Gamma\lambda_{1,2}}.$$

Фактически проявление аномального магнитного момента у электрически нейтральной векторной частицы сводится к появлению зависящего от величины и знака параметра Γ ($\Gamma = +|\Gamma|, -|\Gamma|$) масштабного фактора в аргументе волновых функций. Имеем два типа состояний при каждом значении Γ:

$$\lambda_{1,2}, \quad x = -2Br = -2i\sqrt{M^2 - p_3^2 + \Gamma\frac{1}{2}\left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}\right)},$$

При каждом значении Γ есть третий класс состояний, в которых параметр Γ никак себя не проявляет (см. уравнение (8b)):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)(p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0,$$

отвечают решения с обычным (немодифицированным) аргументом x (как для частицы без аномального момента)

$$x = -2Br = -2i\sqrt{M^2 - p_3^2}.$$

В заключение отметим, что аномальный магнитный момент для частицы со спином 1 проявляет себя во внешнем магнитном поле в свойствах параметров решений и спектрах квантовых чисел; причем и для заряженной и для незаряженной частиц.

Авторы благодарны участникам семинара Лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение и советы.

Список использованной литературы

1. *Petras, M.* A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, N 3. – P. 418–419.

2. *Кисель, В. В.* Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве–времени / В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков. – Препринт № 737 / Институт физики НАНБ. – Минск, 2002. – 25 с.

3. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве-времени / А. А. Богуш [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.

4. *Редьков, В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

5. *Shamaly, A.* Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A. Z. Capry // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, N 14. – P. 1467–1470.

6. *Кисель, В. В.* Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / В. В. Кисель. – Минск, 1984. – 11 с.

7. Квантовая механика электрона в магнитном поле, учет аномального магнитного момента / Е. М. Овсиюк [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 4. – С. 67–73.

8. Частица со спином 1/2 и аномальным моментом в однородном электрическом поле / Е. М. Овсиюк [и др.] // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер. 4. Фізіка, матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 22–28.

Поступило в редакцию 12.09.2016