ISSN 0002–354X (print)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.21+519.6

Поступило в редакцию 26.09.2016
Received 26.09.2016

А. Д. Егоров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ИТО В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

Получены приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решений стохастических линейных уравнений Ито в гильбертовом пространстве. Подход основан на использовании функциональных квадратурных формул.

Ключевые слова: стохастические уравнения в гильбертовом пространстве, математические ожидания от решений, приближенные формулы.

A. D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

APPROXIMATE FORMULAS FOR CALCULATING THE MATHEMATICAL EXPECTATION OF FUNCTIONALS OF SOLUTION OF THE ITO EQUATIONS IN A HILBERT SPACE

(Communicated by Corresponding Member L. A. Yanovich)

Approximate formulas for evaluation of mathematical expectation of functionals of solution of the linear stochastic Ito equations in the Hilbert space are obtained. The approach is based on using the functional quadrature formulas.

Keywords: stochastic differential equations in Hilbert spaces, mathematical expectations from solutions, approximate formulas.

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного вычисления математических ожиданий функционалов от случайных процессов, индексированных пространственной и временной переменными. Актуальность исследования обусловлена использованием процессов такого вида в теории стохастических дифференциальных уравнений с частными производными [1–5]. Получены приближенные формулы для математических ожиданий функционалов от решений линейных уравнений Ито с аддитивным шумом и некоторых видов уравнений с мультипликативным шумом в бесконечномерных пространствах. В качестве ведущего процесса рассматривается винеровский процесс со значениями в гильбертовом пространстве. Вопросы построения приближенных формул для вычисления математических ожиданий функционалов от решений данного класса задач ранее не рассматривались. Отметим, что непосредственное применение сеточных аппроксимаций решений стохастических дифференциальных уравнений с частными производными (см., напр., [6]) для вычисления математических ожиданий функционалов от решений малоэффективно в силу невозможности найти распределение аппроксимирующих траекторий решения и в связи с трудностью оценки погрешности при последующем применении метода статистического моделирования к вычислению ожиданий функционала от аппроксимирующих траекторий. Необходимые определения и основные положения, касающиеся теории случайных процессов, индексированных пространственной и временно́й переменными, и в общем случае случайных процессов, принимающих значения в бесконечномерных пространствах, можно найти в [1–2].

Пусть $\mathfrak{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $X = X(t, \omega)$, $(t \in [0, T], \omega \in \Omega)$, гауссовский случайный процесс, принимающий значения в $\mathfrak{H}$. По определению, процесс X называется гауссовским, если для любого $n \in \mathbf{N}$ и произвольных положительных чисел $t_1, \ldots, t_n \in [0, T]$ случайная величина $(X(t_1), \ldots, X(t_n)) \in \mathfrak{H}^n$ является гауссовской. Будем предполагать, что среднее значение процесса $m(t) = E[X(t)] = 0$. Обозначим через $\langle \xi, X \rangle$ линейный непрерывный функционал на $C([0, T], \mathfrak{H})$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\langle \xi, X \rangle = \int_0^T (\xi(t), X(t))_{\mathfrak{H}} dt$, где $\xi = \xi(t)$ $(t \in [0, T])$ – функция, принимающая значения в $\mathfrak{H}$ (см., напр., [7, с. 807]). Тогда

$$E[\exp\{i\langle \xi, X \rangle\}] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(K\xi, \xi)_{\mathfrak{H}\otimes[0, T]}\right\},$$

где $(K\xi, \eta)_{\mathfrak{H}\otimes[0, T]} = (RQ\xi, \eta)_{\mathfrak{H}\otimes[0, T]} = \int_0^T\int_0^T R(t, s)(\xi(t), \eta(s))_{\mathfrak{H}}\, dtds$; K – линейный оператор в $\mathfrak{H} \otimes [0, T]$, заданный ядром $B(t, s) = R(t, s)(Q\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$; Q – ядерный оператор в $\mathfrak{H}$ и $R(t, s)$ – вещественнозначная симметричная функция, определяющие гауссовское распределение случайного вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_n)) \in \mathfrak{H}^n$. (Заметим, что точки в выражении $B(t, s) = R(t, s)(Q\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ указывают на элементы пространства $\mathfrak{H} \otimes [0, T]$.)

Имеет место формула

$$E[g(\langle X, \eta_1 \rangle, \ldots, \langle X, \eta_n \rangle)] = \int_{R^n} g(u) p_{\eta_1, \ldots, \eta_n}(u) d^n(u),$$

где $p_{\eta_1, \ldots, \eta_n}(u)$ – гауссовская плотность распределения вектора $(\langle X, \eta_1 \rangle, \ldots, \langle X, \eta_n \rangle)$, элементы матрицы ковариаций которого имеют вид $(K\eta_k, \eta_j)_{\mathfrak{H}\otimes[0, T]}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$; $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $d^n u = du_1 \cdots du_n$.

Наиболее часто встречающимся в приведенных ссылках и в приложениях процессом рассматриваемого нами вида является Q-винеровский процесс $W \equiv W(t) = W(t, \omega)$, $(t \in [0, T], \omega \in \Omega)$, определяемый корреляционной функцией $B(t, s) = (t \wedge s)(Q\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$, где используется обозначение $(t \wedge s) = \min(t, s)$. В [2] показано, что имеет место представление $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k$, где $\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(W(t), e_k)_{\mathfrak{H}}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – вещественнозначные взаимно независимые винеровские процессы, $e_k, \lambda_k, k = 1, 2, \ldots,$ – ортонормированные собственные функции, образующие базис в $\mathfrak{H}$, и соответствующие собственные значения оператора Q. В частности, имеет место представление

$$(K\xi_k, \xi_j)_{\mathfrak{H}\otimes[0, T]} = \int_0^T\int_0^T (t \wedge s)(Q\xi_k(t), \xi_j(s))_{\mathfrak{H}} dtds.$$

В качестве естественного класса функционалов от процесса $X = X(t, \omega)$, для которых нами построены приближенные формулы вычисления математического ожидания, рассмотрен класс функционалов, достаточно хорошо аппроксимируемых функциональными многочленами. Произвольный функциональный многочлен степени n от траекторий процесса $X = X(t, \omega)$ в этом случае можно представить в виде $P_n(X) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_k=1}^{\infty} c_{j_1, \ldots, j_k} \prod_{l=1}^{k} \langle \xi_{j_l}, X \rangle$, где $\langle \xi_{j_l}, X \rangle = \int_0^T (\xi_{j_l}(t), X(t))_{\mathfrak{H}} dt$, $p_0, c_{j_1, \ldots, j_k}$ – вещественные константы. Приближенная формула, точная для многочленов третьего порядка, имеет вид

$$E[F(X(\cdot))] \approx J(F) \equiv \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right) F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2T} \int_{-T}^{T} F(1_{[0, \cdot]}(|u|)\mathrm{sign}(u) e_k) du. \tag{1}$$

Приближенные формулы, точные для многочленов произвольного фиксированного порядка n, могут быть с использованием (1) выписаны в явном виде в соответствии с общей методикой построения таких формул для функциональных интегралов в линейных пространствах [8; 9].

Имеет место составная приближенная формула третьей степени точности, сходящаяся к точному значению математического ожидания интегрируемого функционала:

$$E[F(X(\cdot))] \approx J_N(F) \equiv E\left[F\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\sum_{j=1}^{N}\xi_{kj}\gamma_j(\cdot)e_k\right)\right]+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{2T}\int_{-T}^{T}F(1_{[0,\cdot]}(|u|)\mathrm{sign}(u)e_k)\,du- \quad (2)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{2T}\int_{-T}^{T}F\left(\mathrm{sign}(u)\sum_{j=1}^{N}(1_{[0,*]}(|u|),\gamma_j(*))_{\mathcal{H}_W}\,\gamma_j(\cdot)\,e_k\right)du,$$

где $\xi_{kj}=(\beta_k,\gamma_j)_{\mathcal{H}_W}\equiv(\beta_k(*),\gamma_j(*))_{\mathcal{H}_W}$; $\mathcal{H}_W$ – пространство Камерона–Мартина, порожденное случайным процессом $\beta_k(t)$ (для каждого k свой экземпляр одного и того же пространства $\mathcal{H}_W$); $j=1,2,\ldots,$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_W$ [8; 9].

В частных случаях при задании конкретных пространств $\mathfrak{H}$ и операторов Q приближенные формулы могут упроститься. Так, в случае когда $\mathfrak{H}=L_2[a,b]$ и Q задан факторизуемым ядром $Q(x,y)$ вида $Q(x,y)=\int_a^b q(x,v)q(y,v)dv$, имеет место следующая приближенная формула третьей степени точности:

$$E[F(X(\cdot))]\approx(1-(b-a))F(0)+\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_a^b F(1_{[0,\cdot]}(|u|)\mathrm{sign}(u)q(*,v))\,dvdu. \quad (3)$$

Точность данных формул для многочленов доказывается непосредственным вычислением правой и левой частей равенств (1)–(3).

Перейдем далее к рассмотрению приближенных формул для математических ожиданий функционалов от решения уравнения Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве с ведущим Q-винеровским процессом:

$$X(t)=x_0+\int_0^t AX(s)ds+BW_t,\ t\in[0,T], \quad (4)$$

где $A:D(A)\subset H\to H$ и $B:U\to H$ – линейные операторы. Предполагается, что соответствующая детерминированная задача $u'(t)=Au(t), u(0)=x_0\in H$, хорошо поставлена, т. е. A генерирует сильно непрерывную полугруппу $S(\cdot)$ в H. Предсказуемый H-значный случайный процесс $t\in[0,T]$ называется слабым решением уравнения (1), если почти все его траектории интегрируемы по Бохнеру и для всех $\varsigma\in D(A^*)$ и всех $t\in[0,T]$ имеет место равенство

$$\langle X(t),\varsigma\rangle=\langle x_0,\varsigma\rangle+\int_0^t\langle X(s),A^*\varsigma\rangle ds+\langle BW_t,\varsigma\rangle \text{ п. н.}$$

Определяется процесс $W_A(t)=\int_0^t S(t-s)BdW_s$, называемый стохастической сверткой [2]. В предположении $\int_0^T\|S(r)B\|^2_{L_2(U_0,H)}dr=\int_0^T Tr[S(r)BQB^*S^*(r)]dr<\infty$ процесс $W_A(\cdot)$ является гауссовским непрерывным в среднем квадратичном и имеет предсказуемую версию; мера, соответствующая процессу $W_A(t)$, является симметричной гауссовской мерой на пространстве $L_2([0,T];H)$ с ковариационным оператором

$$\mathcal{K}\varphi(t)=\int_0^T g(t,s)\varphi(s)ds,\ g(t,s)=\int_0^{t\wedge s}S(t-r)BQB^*S^*(s-r)dr, \quad (5)$$

где B^*, S^* – сопряженные операторы. В указанных предположениях уравнение (4) имеет единственное слабое решение, которое дается формулой

$$X(t)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-s)BdW_s,\ t\in[0,T]. \quad (6)$$

В качестве естественного класса функционалов от процесса $X = X(t, \omega)$, для которых построены приближенные формулы вычисления математического ожидания, рассмотрен класс функционалов, аппроксимируемых функциональными многочленами от функций, принимающих значения в H.

Т е о р е м а 1. *Пусть U и H – гильбертовы пространства функций, ядро оператора Q представимо в виде* $Q(x, y) = \int_V q(x, v)q(y, v)p(v)dv$, $(Q^{1/2}h)(v) = \int_V q(v, x)h(x)dx$, $p_0 = \left(\int_V p(v)dv\right)^{-1}$. *Тогда имеет место следующая приближенная формула, которая является точной в случае, когда F является функциональным многочленом степени $n \le 3$:*

$$E[F(X(\cdot))] \approx \frac{p_0}{2T}\int_V\int_{-T}^{T} p(v)F(T^{1/2}p_0^{-1}1_{[0,\cdot]}(|u|)\mathrm{sign}(u)\times$$

$$S(\cdot - u)BQ^{1/2} + S(\cdot)x_0)\,dudv \equiv J(F),$$

Точность формулы доказывается непосредственным вычислением с использованием (5), (6). Приведем доказательство точности формулы для мономов второго порядка:

$$J((g, X(t) - S(t)x_0)_H(h, X(s) - S(s)x_0)_H) =$$

$$\int_V\int_0^{t\wedge s} p(v)(g, S(t-u)BQ^{1/2}(v))_H(h, S(t-u)BQ^{1/2}(v))_H\,dudv =$$

$$\int_V\int_0^{t\wedge s} p(v)(B^*S^*(t-u)g, Q^{1/2}(v))_H(B^*S^*(t-u)h, Q^{1/2}(v))_H\,dudv =$$

$$\int_0^{t\wedge s}(B^*S^*(t-u)g \otimes B^*S^*(t-u)h, \int_V Q^{1/2}(v)\otimes Q^{1/2}(v)p(v)dv)_{H\otimes H}du =$$

$$\int_0^{t\wedge s}(B^*S^*(t-u)g \otimes B^*S^*(t-u)h, \int_V Q^{1/2}(v)\otimes Q^{1/2}(v)p(v)dv)_{H\otimes H}du =$$

$$\int_0^{t\wedge s}(QB^*S^*(t-u)g, B^*S^*(t-u)h)_H du = \left(\int_0^{t\wedge s} S(t-u)BQB^*S^*(t-u)dug, h\right)_H,$$

что совпадает с точным значением (5).

Формулы более высокого порядка точности могут быть получены аналогично приведенным в [8; 9] для интегралов по гауссовой мере.

П р и м е р 1. Пусть $H = L^2(R)$, $Au = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $D(A)$ – пространство Соболева, $D(B) = U = L^2(R)$, B – интегральный оператор в $L^2(R)$ с ядром $b(x, y)$, $Q(x, y) = \int_R q(x, v)q(y, v)p(v)dv$. В этом случае $S(t)f(x) = e^{tA}f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_R \exp\left\{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}\right\}f(y)dy$ и имеет место формула

$$E[F(X(\cdot))] \approx \frac{p_0}{2T}\int_{-T}^{T}\int_R F(T^{1/2}p_0^{-1}1_{[0,\cdot]}(|u|)\mathrm{sign}(u)\times$$

$$\int_R q(v, z)\int_R b(z, y)S(y - *, \cdot)\,dydz + S(*, \cdot)x_0)\,dudv.$$

Линейные уравнения Ито с мультипликативным шумом в общем случае имеют вид

$$dX(t) = AX(t)dt + B(X(t))dW(t),\ X(0) = g \in H,\ t \in [0, T],$$

где $W(t)$, $t \ge 0$, Q-винеровский процесс на $U_1 \supset U$; $A: D(A) \subset H \to H$ – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы $S(t) = e^{tA}$, $B: D(B) \subset U \to L_2^0$ – линейный оператор, $L_2^0 = L_2(U_0; H)$ – пространство операторов Гильберта–Шмидта из U_0 в H; $U_0 = Q^{1/2}U$. Явный вид решения может быть получен только в специальных случаях. В частности, в [2] приведены условия существования сильного решения уравнения

$$dX = g + AXdt + \sum_{k=1}^{N} B_k X d\beta_k, \ \ X(0) = g \in H, \tag{7}$$

где $B_k : D(B_k) \subset H \to H$, $B_k : D(B_k) \subset H \to H$, $k = 1, 2, \ldots, N$, являются генераторами полугрупп $S(t) = e^{tA}$ и $S_k(t) = e^{tB_k}$ соответственно; $\beta_1(\cdot), \ldots, \beta_N(\cdot)$ – независимые винеровские процессы, определенные выше, операторы $B_1, \ldots, B_N$ генерируют взаимно коммутирующие C_0-группы S_k, $k = 1, 2, \ldots, N$; в предположении, что выполнены условия существования решения уравнения $v'(t) = U^{-1}(t) C U(t) v(t)$, $v(0) = g$, решение уравнения может быть представлено в виде $X(\cdot) = U(\cdot) v(\cdot)$, где $U(t) = \prod_{k=1}^{N} S_k(\beta_k(t))$. Однако даже при наличии явного решения приближенные формулы для вычисления математического ожидания от решения данного уравнения в общем случае не построены даже при требовании их точности для мономов второго порядка $(g, X_t)_H (h, X_s)_H$. Ниже рассмотрены два частных случая уравнения (7), для которых нами получены приближенные формулы, одна из которых точна для функциональных полиномов третьей степени, а другая точна для линейных функционалов и функционала специального вида.

Т е о р е м а 2. *Пусть задано уравнение (7), где $B_1 \equiv B = bI, b \in R$, I – тождественный оператор, $t \in [0,1]$, и выполняются приведенные выше условия существования сильного решения. Тогда имеет место следующая приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьей степени от решения*

$$E[F(X(\cdot))] \approx F(1) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \int_{-1}^{1} F(\theta(u, \cdot, l) e^{A(\cdot)} g)\, du \equiv J(F),$$

где $\theta(u, t, l) = b^{1/2}[l/2] \exp\{b|u|/2\} 1_{[0,\cdot]}(|u|) \mathrm{sign}(u) + \exp\{2b \min(\cdot, |u|)\}$, $A(t) = tA$, $[l/2]$ *– целая часть числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить точность формулы для мономов $\bigotimes_{n=1}^{m} X(t_n)$, $m = 1, 2, 3$. Вычислим

$$E\left[\bigotimes_{n=1}^{3} X(t_n)\right] = E\left[\bigotimes_{n=1}^{3} \left(e^{(\beta(t) - (b^2/2)t) I} e^{tA} g\right)\right] =$$

$$E\left[\prod_{n=1}^{3} e^{\beta(t_n) - (b^2/2) t_n}\right] \bigotimes_{n=1}^{3} (e^{t_n A} g) = \exp\left\{\sum_{n=2}^{3} \sum_{j=1}^{n-1} (t_n \wedge t_j)\right\} \bigotimes_{n=1}^{3} (e^{t_n A} g).$$

Имеем далее

$$J\left(\bigotimes_{n=1}^{3} X(t_n)\right) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \int_{-1}^{1} \bigotimes_{n=1}^{3} (\theta(u, t_n, l) e^{t_n A} g)\, du =$$

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \int_{-1}^{1} \prod_{n=1}^{3} \theta(u, t_n, l)\, du \bigotimes_{n=1}^{3} (e^{t_n A} g) = \exp\left\{\sum_{n=2}^{3} \sum_{j=1}^{n-1} (t_n \wedge t_j)\right\} \bigotimes_{n=1}^{3} (e^{t_n A} g)$$

(см. [10, скалярный случай]), т. е. совпадает с точным значением момента. Точность формулы для полиномов меньше третьей степени доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (7), когда $H = L^2(R)$, $Au = u_{xx}$, $D(A) = H^2(R)$, $b \in R$, $D(B) = H^1(R)$, $U = R$, $W(t) = \beta(t)$. В этом случае можно выписать явное решение $X(t) = e^{(1 - b^2/2) tA} e^{B\beta(t)} g$ в предположении выполнения условия $1 - b^2/2 > 0$. Предварительно вычислим математическое ожидание функционала $F(X) = (X_t, X_s)_H$ от решения; для этого мы перепишем решение в виде $X(t, x) = e^{(1 - b^2/2) tB^2} e^{B\beta(t)} g$:

$$E[(X_t, X_s)_H] = E\left[\left(e^{(1-b^2/2)tB^2} e^{B\beta(t)} g, e^{(1-b^2/2)tB^2} e^{B\beta(t)} g\right)_H\right] =$$

$$E\left[\left(e^{b(\beta(t)+\beta(s))B + (1-b^2/2)(t+s)B^2} g, g\right)_H\right] = \left(e^{(1-b^2/2)(t+s)B^2} E\left[e^{b(\beta(t)+\beta(s))B}\right] g, g\right)_H =$$

$$\left(e^{(1-b^2/2)(t+s)B^2 + b^2/2(t+s+2(t\wedge s))B^2} g, g\right)_H = \left(e^{(t+s)B^2 + b^2 (t \wedge s) B^2} g, g\right)_H.$$

(используем симметричность операторов, коммутируемость B, B^2 и полугрупповое свойство операторных экспонент, а также представление $b(\beta(t)+\beta(s)) = b\int_0^1 (1_{[0,t]}(\tau)+1_{[0,s]}(\tau))d\beta(\tau) \equiv \eta$, где η является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией $t+s+2(t\wedge s)$).

Т е о р е м а 3. *Имеет место приближенная формула*

$$E[F(X_{(\cdot)})] \approx \nabla F(e^{tB^2}g) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F\left(b1_{[0,\cdot]}(|u|)\operatorname{sign}(u)e^{(\cdot)B^2}Be^{\frac{1}{2}ub^2B^2}g\right)du \equiv J(F(X_{(\cdot)})),$$

где $\nabla F(g) = \frac{1}{2}(F(g)-F(-g))$ *– точная для постоянного функционала, линейных функционалов от решения и точная для скалярного произведения* $(X_t, X_s)_H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точность формулы для постоянного функционала $F(f)=\text{const}$ и линейных функционалов $(X_{(\cdot)}, f)$, $f\in H$, вытекает из свойств оператора ∇ и кососимметричности подынтегральной функции в правой части формулы. Докажем точность приближенной формулы для функционала $(X_t, X_s)_H$. Имеем

$$J((X_t, X_s)_H) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(b1_{[0,t]}(|u|)\operatorname{sign}(u)e^{tB^2}Be^{\frac{1}{2}|u|b^2B^2}g,\ b1_{[0,s]}(|u|)\operatorname{sign}(u)e^{sB^2}Be^{\frac{1}{2}|u|b^2B^2}g\right)_H =$$

$$\int_0^{t\wedge s}\left(be^{tB^2}Be^{\frac{1}{2}ub^2B^2}g,\ be^{sB^2}Be^{\frac{1}{2}ub^2B^2}g\right)_H du = \int_0^{t\wedge s}\left(b^2e^{(t+s)B^2}Be^{ub^2B^2}g, g\right)_H du =$$

$$\int_0^{t\wedge s}\left(b^2e^{(t+s)B^2}B^2e^{ub^2B^2}g, g\right)_H du = \int_0^{t\wedge s}\left(e^{(t+s)B^2}\frac{d}{du}e^{ub^2B^2}g, g\right)_H du =$$

$$\left(e^{(t+s)B^2}\int_0^{t\wedge s}\frac{d}{du}e^{ub^2B^2}g\,du, g\right)_H = \left(e^{(t+s)B^2+(t\wedge s)b^2B^2}g, g\right)_H - (g,g)_H,$$

где мы использовали соотношения $\frac{d}{du}e^{ub^2B^2}g = b^2B^2e^{ub^2B^2}g$ и $\int_0^t \frac{d}{du}e^{ub^2B^2}g\,du = e^{ub^2B^2}g - g$. Теорема доказана.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф15-035).

Acknowledgement. The work was sponsored by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Agreement no. Ф15-035).

Список использованных источников

1. Далецкий, Ю. Л. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах / Ю. Л. Далецкий. – М.: Наука, 1983. – 383 с.
2. Da Prato, G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge University Press, 1992. – 454 p.
3. Gawarecki, G. Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions with Applications to Stochastic Partial Differential Equations / G. Gawarecki, V. Mandrekar. – Springer, 2011. – 274 p. doi: 10.1007/978-3-642-16194-0.
4. A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations / R. C. Dalang [et al.]. – Springer, 2006. – 222 p.
5. Hairer, M. An Introduction to Stochastic PDEs / M. Hairer. – The University of Warwick/Courant Institute, 2009. – 78 p.
6. Jentzen, A. Taylor Approximations for Stochastic Partial Differential Equations / A. Jentzen, P. E. Kloeden. – Philadelphia: SIAM Press, 2011. – 235 p.
7. Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
8. Egorov, A. D. Functional integrals: Approximate evaluations and applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 418 p.
9. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
10. Egorov, A. Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. Egorov, K. Sabelfeld // Monte Carlo methods and applications. – 2010. – Vol. 16, N 2. – P. 95–127. doi: 10.1515/mcma.2010.003.

References

1. Daletskii Yu. L. *Measures and differential equations in infinite spaces*. Moscow, Nauka, 1983. 383 p. (in Russian)
2. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge University Press, 1992. 454 p.

3. Gawarecki G., Mandrekar V. *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions with Applications to Stochastic Partial Differential Equations.* Springer, 2011. 274 p. doi: 10.1007/978-3-642-16194-0.

4. Dalang R. C., Khoshnevisan D., Mueller C., Nualart D., Xiao Y. *A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer, 2006. 222 p.

5. Hairer M. *An Introduction to Stochastic PDEs*. The University of Warwick, Courant Institute, 2009. 78 p.

6. Jentzen A., Kloeden P. E. *Taylor Approximations for Stochastic Partial Differential Equations.* Philadelphia, SIAM Press, 2011. 235 p.

7. Edvards R. *Functional analysis. Theory and applications*. Moscow, Mir, 1969. 1071 p. (in Russian)

8. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional integrals: Approximate evaluations and applications.* Kluwer Academic Publishers, 1993. 418 p.

9. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *An introduction to the theory and applications of functional integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian)

10. Egorov A., Sabelfeld K. Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations. *Monte Carlo methods and applications*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 95–127. doi: 10.1515/mcma.2010.003.

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by.

Information about the author

Egorov Aleksandr Dmitrievich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: egorov@im.bas-net.by.

Для цитирования

Егоров, А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито в гильбертовом пространстве / А. Д. Егоров // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 7–13.

For citation

Egorov A. D. Approximate formulas for calculating the mathematical expectation of functionals of solution of the Ito equations in a Hilbert space. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 7–13. (in Russian)