ISSN 0002–354X (print)
УДК 517.958

Поступило в редакцию 06.10.2016
Received 06.10.2016

Академик В. И. Корзюк[1], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В одномерном случае для волнового уравнения рассматривается смешанная задача с интегральным условием. Показывается при определённых условиях гладкости и условиях согласования заданных функций существование и единственность классического решения. Для численного решения поставленной задачи необходимо решать несложные интегральные уравнения Вольтерры второго рода.

Ключевые слова: волновое уравнение, метод характеристик, интегральное условие, классическое решение, смешанная задача.

Academician V. I. Korzyuk[1], I. I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH THE INTEGRAL CONDITION

The mixed problem with the integral condition for the wave equation is considered in the one-dimension case. Existence and uniqueness of the classical solution is proved under certain smoothness and consistency conditions. For numerical solution of a given problem the simple second-type Voltaire integral equations should be solved.

Keywords: wave equation, characteristics method, integral condition, classical solution, mixed problem.

В данном сообщении рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с интегральным условием. В работах [1; 2] рассматриваются гиперболические уравнения второго порядка с нелокальными условиями. Однако в них исследуется обобщенное решение поставленной задачи, а не классическое.

В данной работе изучается именно классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным условием. Следует отметить, что нелокальное условие здесь представляет собой интегральное уравнение второго рода с ядром, зависящим от двух переменных. В результате получены необходимые и достаточные условия для существования единственного классического решения. Решение поставленной задачи может быть построено с помощью метода последовательных приближений. Подход, предложенный в данном сообщении, позволяет получить численное решение поставленной задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in Q,\ Q = [0, +\infty) \times [0, l] \tag{1}$$

с условием Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1),\ \partial_{x0} u(0, x_1) = \psi(x_1),\ x_1 \in [0, l], \tag{2}$$

интегральным условием

$$u(x_0, 0) + \int_0^l K(x_0, s) u(x_0, s)\, ds = \mu^{(0)}(x_0),\ x_0 \in [0, +\infty) \tag{3}$$

и граничным условием

$$u(x_0, l) = \mu^{(l)}(x_0),\ x_0 \in [0, +\infty), \tag{4}$$

где $K : \mathbb{R}^2 \supset Q \ni (x_0, s) \to K(x_0, s) \in \mathbb{R}$.

Требуется найти классическое решение задачи (1)–(4) из класса $C^2(\overline{Q})$.

Общее решение неоднородного уравнения. Применим подход, описанный в [3], а также будем использовать аналогичные обозначения. Область Q разделим на области $Q^{(k)},\ k=1,2,...$ прямыми $x_0=\dfrac{(k-1)l}{a},\ k=1,2,...,$ так, как показано на рисунке. В свою очередь, каждая из полученных областей $Q^{(k)}$ разбивается с помощью характеристических прямых $x_1=-(k-1)l+ax_0$ и $x_1=kl-ax_0$ на подобласти $Q_j^{(k)},\ \ j=\overline{1,4},$ в каждой из которых ищется решение исходной задачи. Общее решение неоднородного уравнения (1) для каждой из областей $Q_j^{(k)},\ \ j=\overline{1,4},$ можно записать как

$$u_j^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau+p_j^{(k)}(x_1-ax_0)+g_j^{(k)}(x_1+ax_0),\ \ k=1,2,..., \tag{5}$$

где $\overline{f}$ – продолжение функции f на $\mathbb{R}$ по второй независимой переменной.

Здесь функции $p_1^{(k)},\, p_3^{(k)}\in C^2([-(k-1)l,-(k-2)]l)$ и $p_2^{(k)},\, p_4^{(k)}\in C^2([-kl,-(k-1)l])$, а функции $g_1^{(k)},\, g_2^{(k)}\in C^2([(k-1)l,kl])$ и $g_3^{(k)},\, g_4^{(k)}\in C^2([kl,(k+1)l]),\ f\in C^{0,1}(\overline{Q})$. Под классом $C^{0,1}$ понимается класс непрерывных функций от двух аргументов, которые имеют непрерывную частную производную первого порядка по второму аргументу.

Искать решение задачи (1)–(4) будем с помощью метода характеристик [4]. Для этого мы сначала рассмотрим задачу в области $Q^{(k)}$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} &u^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a},x_1\right)=\varphi^{(k)}(x_1),\\ &\partial_{x_0}u^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a},x_1\right)=\psi^{(k)}(x_1),\ x_1\in[0,l], \end{aligned} \tag{6}$$

интегральным условием (3) и граничным условием (4). Здесь $u^{(k)}$ – решение задачи (1), (3), (4), (6) в области $Q^{(k)}$. Функции $\varphi^{(k)},\psi^{(k)}$ выражаются из решения аналогичной задачи в области $Q^{(k-1)}$, где $\varphi^{(k)}(x_1)=u^{(k-1)}\left(\dfrac{(k-1)l}{a},x_1\right),\ \ \psi^{(k)}(x_1)=\partial_{x0}u^{(k-1)}\left(\dfrac{(k-1)l}{a},x_1\right)$, причем $\varphi^{(1)}\equiv\varphi,\ \psi^{(1)}\equiv\psi$.

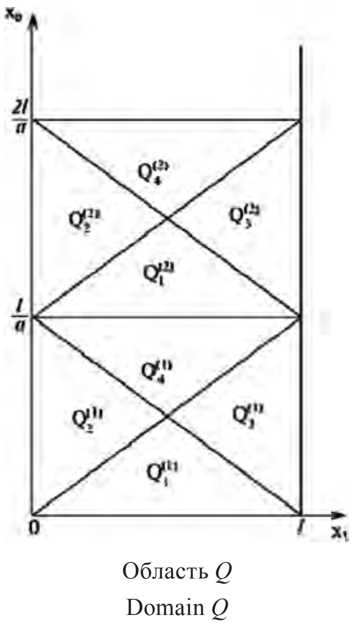
Задача Коши. В области $Q_1^{(k)}$ задаются начальные условия (6). Тогда функции $p_1^{(k)},g_1^{(k)}$ определяются формулами

$$p_1^{(k)}(z)=\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(z+(k-1)l)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{z+(k-1)l}\psi^{(k)}(\xi)d\xi-\frac{1}{2}C,\ \ z\in[-(k-1)l,-(k-2)l], \tag{7}$$

$$\begin{aligned} g_1^{(k)}(z)=\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(z-(k-1)l)+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{z-(k-1)l}\psi^{(k)}(\xi)d\xi+\\ \frac{1}{2}C,\ \ z\in[(k-1)l,kl]. \end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, решение в области $Q_1^{(k)}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{\varphi^{(k)}(x_1-ax_0+(k-1)l)+\varphi^{(k)}(x_1+ax_0-(k-1)l)}{2}+\\ \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-ax_0+(k-1)l}^{x_1+ax_0-(k-1)l}\psi^{(k)}(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$



Область Q
Domain Q

Функция $p_1^{(k)}$, определенная по формуле (7) в области $Q_1^{(k)}$, определена и в области $Q_3^{(k)}$, где имеет такой же вид. Функция $g_1^{(k)}$, определенная по формуле (8) в области $Q_1^{(k)}$, задана и в области $Q_2^{(k)}$, где также представима в виде (8).

Граничное условие на правой границе. Как показано в [4], решение задачи (1), (4), (6) в области $Q_3^{(k)}$ имеет вид

$$u_3^{(k)}(\mathbf{x}) = \mu^{(l)}\left(\frac{x_1 + ax_0 - l}{a}\right) - \frac{\varphi^{(k)}((k+1)l - x_1 - ax_0) - \varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + (k-1)l)}{2} +$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-ax_0+(k-1)l}^{l-x_1-ax_0+kl}\psi^{(k)}(\xi)d\xi - \frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{x_1+ax_0-l}{a}}\int\limits_{2l-x_1-ax_0+a\tau}^{x_1+ax_0-a\tau}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{10}$$

а функция $g_3^{(k)}$ задается формулой

$$g_3^{(k)}(z) = \mu^{(l)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(l - z + kl) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{l-z+kl}\psi^{(k)}(\xi)d\xi -$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{z-l}{a}}\int\limits_{2l-z+a\tau}^{z-a\tau}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2}C,\ z\in[kl,(k+1)l]. \tag{11}$$

Интегральное условие. Условие (2) представляет собой уравнение с интегральным оператором второго рода. Подставив в него общее решение (5) в области $Q_2^{(k)}$, получим уравнение относительно неизвестной функции $p_2^{(k)}$

$$p_2^{(k)}(-ax_0) + \int\limits_0^l K(x_0,s)p^{(k)}(s - ax_0)ds = \mu^{(0)}(x_0) - g^{(k)}(ax_0) - \int\limits_0^l K(x_0,s)g^{(k)}(s + ax_0)ds -$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{-a(x_0-\tau)}^{a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau - \frac{1}{2a}\int\limits_0^l\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{s-a(x_0-\tau)}^{s+a(x_0-\tau)}K(x_0,s)\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau ds. \tag{12}$$

Здесь

$$p^{(k)}(z) = \begin{cases} p_1^{(k)}(z), & z\in[-(k-1)l,-(k-2)l],\\ p_2^{(k)}(z), & z\in[-kl,-(k-1)l],\end{cases}\qquad g^{(k)}(z) = \begin{cases} g_1^{(k)}(z), & z\in[(k-1)l,kl],\\ g_3^{(k)}(z), & z\in[kl,(k+1)l].\end{cases}$$

В области $Q_2^{(k)}$ на отрезке $x_1\in[0,l]$, $\forall x_0\in\left[\frac{(k-1)l}{a},\frac{kl}{a}\right]$ определены две функции: $p_1^{(k)}$, которая известна, и $p_2^{(k)}$, которую требуется отыскать. Граница между двумя этими функциями проходит по характеристике $x_1 = -(k-1)l + ax_0$. Используя этот факт, уравнение (12) можно переписать как

$$p_2^{(k)}(-ax_0) + \int\limits_0^{-(k-1)l+ax_0} K(x_0,s)p_2^{(k)}(s - ax_0)ds = \mu^{(0)}(x_0) - g^{(k)}(ax_0) -$$

$$\int\limits_0^l K(x_0,s)g^{(k)}(s + ax_0)ds - \int\limits_{-(k-1)l+ax_0}^{l} K(x_0,s)p_1^{(k)}(s - ax_0)ds -$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{-a(x_0-\tau)}^{a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau - \frac{1}{2a}\int\limits_0^l\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{s-a(x_0-\tau)}^{s+a(x_0-\tau)}K(x_0,s)\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau ds.$$

Введя замену $x_0 = -\frac{z}{a}$, получим уравнение

$$p_2^{(k)}(z) + \int\limits_0^{-(k-1)l-z} K\left(-\frac{z}{a},s\right)p_2^{(k)}(s+z)ds = M(z),$$

где

$$M(z) = \mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) - g^{(k)}(-z) - \int\limits_0^l K\left(-\frac{z}{a},s\right)g^{(k)}(s-z)ds - \int\limits_{-(k-1)l-z}^{l} K\left(-\frac{z}{a},s\right)p_1^{(k)}(s+z)ds -$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{-\frac{z}{a}}\int\limits_{a\tau+z}^{-a\tau-z}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau - \frac{1}{2a}\int\limits_0^l\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{-\frac{z}{a}}\int\limits_{s+a\tau+z}^{s-a\tau-z}K\left(-\frac{z}{a},s\right)\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

После замены переменной интегрирования $s=\tau-z$ получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода для нахождения неизвестной функции $p_2^{(k)}$:

$$p_2^{(k)}(z)+\int\limits_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a},\tau-z\right)p_2^{(k)}(\tau)d\tau = M(z). \tag{13}$$

Решение данного уравнения существует в классе $C^2([-kl,-(k-1)l])$ и является единственным тогда, когда выполнены следующие условия гладкости функций: $M\in C^2([-kl,-(k-1)l])$, $K\in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a},\frac{kl}{a}\right]\times[0,l]\right)$. Легко показать, что $p_2^{(k)}(z)=\tilde{p}_2^{(k)}(z)-\frac{C}{2}$, где $\tilde{p}_2^{(k)}(z)$ – функция из $C^2([-kl,-(k-1)l])$, которая не содержит произвольных констант C. При подстановке $p_j^{(k)}$, $g_i^{(k)}$, $j=1,2,\ \ i=1,3$, в общее решение (5) произвольная постоянная C уничтожается. Таким образом решение в области $Q_2^{(k)}$ не имеет произвольной константы и может быть найдено по формуле

$$u_2^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau+p_2^{(k)}(x_1-ax_0)+g_1^{(k)}(x_1+ax_0). \tag{14}$$

В области $Q_4^{(k)}$ решение находится по формуле

$$u_4^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0}\int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau+p_2^{(k)}(x_1-ax_0)+g_3^{(k)}(x_1+ax_0). \tag{15}$$

Условия согласования. Для того чтобы решение задачи (1), (3), (4), (6) было из класса $C^2(\overline{Q^{(\mathrm{k})}})$, необходимо и достаточно, чтобы функции $p_1^{(k)},p_2^{(k)}$ были согласованы в точке $z=-(k-1)l$ вместе со своими производными до второго порядка включительно, а функции $g_1^{(k)},g_3^{(k)}$ – в точке $z=kl$ вместе со своими производными до второго порядка включительно. Обозначим $\frac{d^i}{dz^i}p_2^{(k)}(-(k-1)l)-\frac{d^i}{dz^i}p_1^{(k)}(-(k-1)l)=\delta_i^{(k)},\ i=\overline{0,2}$, и $\frac{d^i}{dz^i}g_3^{(k)}(kl)-\frac{d^i}{dz^i}g_1^{(k)}(kl)=\sigma_i^{(k)},\ i=\overline{0,2}$. Условия согласования функций $g_1^{(k)},g_3^{(k)}$ и их производных рассмотрены в [4] и имеют вид

$$\begin{gathered}
\mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)-\varphi^{(k)}(l)=\sigma_0^{(k)},\\
\frac{1}{a}\left(\mu'^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)-\psi^{(k)}(l)\right)=\sigma_1^{(k)},\\
\frac{1}{a^2}\mu''^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)-\varphi''^{(k)}(l)-\frac{1}{a^2}f\left(\frac{(k-1)l}{a},l\right)=\sigma_2^{(k)}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Далее находим условия согласования для функций $p_1^{(k)},p_2^{(k)}$ и их производных. Из уравнения (13) выражаем функцию $p_2^{(k)}$ как

$$p_2^{(k)}(z)=-\int\limits_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a},\tau-z\right)p_2^{(k)}(\tau)d\tau+M(z). \tag{17}$$

Приравнивая (17) и (7) в точке $z=-(k-1)l$, получаем условие согласования функций $p_1^{(k)},p_2^{(k)}$:

$$\mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)-\varphi^{(k)}(0)-\int\limits_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\varphi^{(k)}(s)ds=\delta_0^{(k)}. \tag{18}$$

Условие согласования функций $p_1'^{(k)},p_2'^{(k)}$ имеет вид

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{a}\mu'^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)+K\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\delta_k^{(0)}+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)-\\
\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial x_0}K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\varphi^{(k)}(s)ds-\frac{1}{a}\int\limits_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\psi^{(k)}(s)ds=\delta_1^{(k)}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Условие согласования на функции $p_1''^{(k)}$ и $p_2''^{(k)}$ в точке $z=-(k-1)l$ представляется следующим образом:

$$K\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\delta_1^{(k)}-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial x_0}K\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\delta_k^{(0)}+\frac{1}{a^2}\mu''^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)-$$
$$\frac{1}{a^2}\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\varphi^{(k)}(s)ds-\varphi''^{(k)}(0)-\frac{1}{a^2}\int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)f\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)ds- \tag{20}$$
$$\frac{2}{a^2}\int_0^l\frac{\partial}{\partial x_0}K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\psi^{(k)}(s)ds-\int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\varphi''^{(k)}(s)ds-\frac{1}{a^2}f\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)=\delta_2^{(k)}.$$

Л е м м а 1. *Пусть заданные функции* $\varphi^{(k)}(x_1)\in C^2([0,l])$, $\psi^{(k)}(x_1)\in C^1([0,l])$, $\mu^{(0)},\mu^{(l)}\in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a},\frac{kl}{a}\right]\right)$, $K\in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a},\frac{kl}{a}\right]\times[0,l]\right)$, $f\in C^{0,1}\left(\left[\frac{(k-1)l}{a},\frac{kl}{a}\right]\times[0,l]\right)$. *Единственное решение задачи (1), (3), (4), (6)* $u^{(k)}(\mathbf{x})\in C^2(\overline{Q^{(k)}})$ *существует тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (16), (18)–(20), т. е. при* $\sigma_i^{(k)}\equiv 0,\delta_i^{(k)}\equiv 0, i=\overline{0,2}$, *и* $u^{(k)}(\mathbf{x})=u_j^{(k)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\overline{Q_j^{(k)}}$.

Классическое решение в области $\overline{Q}$. Далее рассматривается вопрос существования единственного классического решения задачи (1)–(4) во всей области $\overline{Q}=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}Q^{(k)}}$.

Л е м м а 2. *Пусть для задачи (1)–(4)* $u^{(k)}$ *– решение в области* $Q^{(k)}$, $u^{(k-1)}$ *– решение в области* $Q^{(k-1)}$ *и в каждой из этих областей выполняются условия леммы 1. Тогда при определении функций*

$$\varphi^{(k)}(x_1)=u_4^{(k-1)}\left(\frac{(k-1)l}{a},x_1\right)=g_3^{(k-1)}(x_1)+p_2^{(k-1)}(x_1)+\frac{1}{2a}\int_{\frac{(k-2)l}{a}}^{\frac{(k-1)l}{a}}\int_{x_1-a\tau-(k-1)l}^{x_1-a\tau+(k-1)l}\overline{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

$$\psi^{(k)}(x_1)=\partial_{x_0}u_4^{(k-1)}\left(\frac{(k-1)l}{a},x_1\right)=-a\frac{d}{dx_1}g_3^{(k-1)}(x_1)+a\frac{d}{dx_1}p_2^{(k-1)}(x_1)+$$
$$\frac{1}{2}\int_{\frac{(k-2)l}{a}}^{\frac{(k-1)l}{a}}\overline{f}(\tau,x_1-a\tau-(k-1)l)+\overline{f}(\tau,x_1-a\tau+(k-1)l)d\tau,$$

где $u_4^{(k-1)}$ определена как (15), $g_3^{(k-1)}$ – в виде (11), $p_2^{(k-1)}$ – по формуле (17), функция

$$u^{(k,k-1)}(x)=\begin{cases}u^{(k)}(x), & x\in Q^{(k)},\\ u^{(k-1)}(x), & x\in Q^{(k-1)},\end{cases}$$

будет дважды непрерывно дифференцируема на множестве $\overline{Q^{(k-1)}\bigcup Q^{(k)}}$.

С л е д с т в и е. *Условия согласования для функций* $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}$, *а также для* $g_1^{(k)},g_3^{(k)}$ *и их производных до второго порядка включительно выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования для функций* $p_1^{(k-1)}$ *и* $p_2^{(k-1)}$, $g_1^{(k-1)}$ *и* $g_3^{(k-1)}$ *и их производных до второго порядка включительно соответственно.*

Т е о р е м а. *Пусть* $\mu^{(0)},\mu^{(l)}\in C^2([0,+\infty))$, $\varphi\in C^2([0,l])$, $\psi\in C^1([0,l])$, $K\in C^2(\overline{Q})$, $f\in C^{0,1}(\overline{Q})$. *Для задачи (1)–(4) существует единственное классическое решение из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда для функций* $\mu^{(0)}$, $\mu^{(l)}$, φ, ψ *выполняются однородные условия согласования (16), (18)–(20) при* $k=1$, *а именно*

$$\mu^{(l)}(0)-\varphi(l)=0,\quad \mu'^{(l)}(0)-\psi(l)=0,\quad \frac{1}{a^2}\mu''^{(l)}(0)-\varphi''(l)-\frac{1}{a^2}f(0,l)=0,$$
$$\mu^{(0)}(0)-\varphi(0)-\int_0^l K(0,s)\varphi(s)ds=0,$$

$$-\frac{1}{a}\mu'^{(0)}(0)+\frac{1}{a}\psi(0)-\int_0^l\frac{\partial}{\partial x_0}K(0,s)\varphi(s)ds-\frac{1}{a}\int_0^l K(0,s)\psi(s)ds=0,$$

$$\frac{1}{a^2}\mu''^{(0)}(0)-\frac{1}{a^2}\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}K(0,s)\varphi(s)ds-\varphi''(0)-\frac{2}{a^2}\int_0^l\frac{\partial}{\partial x_0}K(0,s)\psi(s)ds-$$

$$-\int_0^l K(0,s)\varphi''(s)ds-\frac{1}{a^2}f(0,0)-\frac{1}{a^2}\int_0^l K(0,s)f(0,s)ds=0.$$

Это решение может быть найдено как $u(\mathbf{x})=u_j^{(k)}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\overline{Q_j^{(k)}},\ j=\overline{1,4},\ k=1,2,\ldots,$ *где* $u_j^{(k)}$ *определены по формулам (9), (10), (14), (15).*

Список использованных источников

1. Дмитриев, В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения / В. Б. Дмитриев // Вестн. СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2006. – № 2(42). – С. 15–26.
2. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике / Л. С. Пулькина, О. М. Кечина // Вестн. СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2005. – № 2(36). – С. 1–9.
3. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в криволинейной полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 9–15.
4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011. – 459 с.

References

1. Dmitriev V. B. Non-local problem with the integral conditions for the wave equation. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2006, no. 2(42), pp. 15–26. (in Russian)
2. Pul'kina L. S., Kechina O. M. Non-local problem with the integral conditions for the hyperbolic equation on the characteristic rectangle. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2005, no. 2(36), pp. 1–9. (in Russian)
3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation in the curvilinear half-band. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 3, pp. 9–15. (in Russian)
4. Korzyuk V. I. *Equations of mathematical physics*. Minsk, Belarusian State University Publ., 2011. 459 p. (in Russian)

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Столярчук Иван Игоревич – магистр физико-математических наук, аспирант кафедры математической кибернетики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Stolyarchuk Ivan Igorevich – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate student of the Mathematical Cybernetics Department of the Mechanics and Mathematics Faculty, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.

Для цитирования

Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 22–27.

For citation

Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the wave equation with the integral condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 22–27. (in Russian)