ISSN 0002–354X (print)
УДК 514.765.1

Поступило в редакцию 26.09.2016
Received 26.09.2016

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

В работе представлена локальная классификация трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность. Рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований с неразрешимым стабилизатором. Описаны все инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна.

Ключевые слова: нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

NORMAL CONNECTIONS ON REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES WITH AN UNSOLVABLE TRANSFORMATION GROUP

(Communicated by Academician V. I. Korzyuk)

In this article we present the local classification of three-dimensional reductive homogeneous spaces allowing a normal connection. We consider the case, when the Lie group of transformations is unsolvable and the stabilizer is usolvable too. We describe all invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections. We study the holonomy algebras of homogeneous spaces, and sind when the invariant connection is normal.

Keywords: normal connection, reductive space, transformation group, holonomy algebra.

Редуктивные пространства, обобщающие римановы глобально симметрические пространства, исследуются в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, а также Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия [2]. Многообразия с нулевым кручением (т. е. плоской нормальной связностью) исследовали Д. И. Перепелкин, Ф. Фабрициус-Бьерре, итоги этих исследований подведены в монографии Б. Чена [3]. Среди трехмерных редуктивных однородных пространств широкий класс образуют пространства с неразрешимой группой преобразований, которые и рассматриваются в работе.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., напр., [4]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $\mathrm{Diff}(M)$, т. е. достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве $T_x M$ – это фактор-действие присоединенного действия G на $\overline{\mathfrak{g}}$: $s(x+\mathfrak{g})=(Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s\in G, x\in\overline{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM=\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$x(y+\mathfrak{g})=[x, y]+\mathfrak{g} \text{ для всех } x\in\mathfrak{g},\ y\in\overline{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$, $x\in M$, на T_xM имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\overline{G}$ эффективна на $\overline{G}/G$ [1]. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Пусть $M=\overline{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа Ли $\overline{G}$ действует транзитивно и эффективно. Однородное пространство $\overline{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ для $\overline{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна.

Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\overline{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (см., напр., [5]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное.

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda\big|_{\mathfrak{m}}=0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Для канонической связности каждая геодезическая, исходящая из o, имеет вид $f_t(o)$, где $f_t=\exp(tx)$, $x\in\mathfrak{m}$. Каждое редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y=1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y\in\mathfrak{m}$. Такая связность называется *естественной связностью без кручения* (относительно разложения $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью первого рода*. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T\in\mathrm{Inv}\,T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R\in\mathrm{Inv}\,T_3{}^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x, y]_{\mathfrak{m}},\quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x), \Lambda(y)]-\Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y\in\overline{\mathfrak{g}}.$$

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda:\overline{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), V]+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), V]]+\ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)]-\Lambda([x, y])\,|\,x, y\in\overline{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x)\,|\,x\in\overline{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально $\mathfrak{a}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем и Г. Ваном в более общей ситуации. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^*\subset\mathfrak{a}\subset\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{a}$.

Будем описывать пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\overline{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\overline{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1=e_{n-2}, u_2=e_{n-1}, u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [6], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Т е о р е м а. *Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что* $\overline{\mathfrak{g}}$ *и* $\mathfrak{g}$ *неразрешимы, локально имеют следующий вид:*

3.3.1.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

,

3.3.2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

,

3.3.3.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0

,

3.4.1	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0	0

,

3.4.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

,

3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.1	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0

,

3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы. Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр [7]:

$\underline{\dim\mathfrak{g}=3}$

3. $\begin{bmatrix} x & y & \\ z & -x & \\ & & \end{bmatrix}$; 4. $\begin{bmatrix} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{bmatrix}$; 5. $\begin{bmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{bmatrix}$;

$\underline{\dim\mathfrak{g}=5}$

3. $\begin{bmatrix} & u & v \\ & x & y \\ & z & -x \end{bmatrix}$.

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.3 эквивалентна одной и только одной из пар 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3. Действительно, пусть $E=\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Заметим, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}=\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, где

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_2,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_1,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2.$$

Поэтому, $[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_3u_3, [u_1,u_3]=\beta_1u_1, [u_2,u_3]=\gamma_2u_2$. Используя тождество Якоби, видим, что $a_1=0$, $\beta_1=\gamma_2$, а $\alpha_3\gamma_2=0$. Рассмотрим следующие случаи:

1. $\alpha_3=\gamma_2=0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 3.3.1.

2. $\alpha_3\neq 0, \gamma_2=0$. Тогда отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i)=e_i, i=1,2,3,\ \pi(u_1)=u_1,\ \pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=\frac{1}{\alpha_3}u_3,$$

показывает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.3.2.

3. $\alpha_3=0, \gamma_2\neq 0$. Отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i)=e_i, i=1,2,3,\ \pi(u_1)=u_1,\ \pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=\gamma_2u_3,$$

показывает, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.3.3 эквивалентны.

Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$, мы видим, что пары 3.3.1 и 3.3.2 не эквивалентны. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.1 не эквивалентны. Поскольку $Z\bar{\mathfrak{g}}_2=\mathbb{R}u_3$ и $Z\bar{\mathfrak{g}}_3=0$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.2 не эквивалентны. Заметим, что $\mathfrak{g}$ полупроста, у пары 3.3.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{-2u_2,-2u_1,u_3\},\{-4e_1+2u_2,-4e_2-2u_1,-4e_3\}\}$, у пары 3.3.2 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{u_3,-u_2,u_1\},\{2e_2+2u_1+u_3,-2e_3,e_1-u_2\}\}$, у пары 3.3.3 – $\{\{-2u_2,-2u_1,u_3\},\{-4e_1+2u_2,-4e_2-2u_1,-4e_3\}\}$.

Аналогично, любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.4 эквивалентна одной и только одной из пар 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, $\mathfrak{g}$ полупроста, у пары 3.4.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{u_2,-u_3,u_1\},\ \{e_2,-e_3-u_2,e_1+u_1\}\}$, у пары 3.4.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, у пары 3.4.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ также полупроста. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.5 эквивалентна одной и только одной из пар 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, $\mathfrak{g}$ полупроста, у пары 3.5.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{-u_2,u_1,-u_3\},\{e_3,u_2-e_2,e_1-u_3\}\}$, у пары 3.5.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, у пары 3.5.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ также полупроста. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 5.3 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

5.3.1.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	e_1	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	$-e_2$	0	0	u_1
e_3	$-e_2$	0	0	e_5	$-2e_3$	0	0	u_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_5$	0	$2e_4$	0	u_3	0
e_5	$-e_1$	e_2	$2e_3$	$-2e_4$	0	0	u_2	$-u_3$
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	$-u_3$	$-u_2$	0	0	0
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	u_3	0	0	0

,

5.3.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	e_1	$-3e_1$	$-(1/2)e_5 + (1/2)u_1$	$-e_4$
e_2	0	0	0	e_1	$-e_2$	$-3e_2$	$-e_3$	$(1/2)e_5 + (1/2)u_1$
e_3	$-e_2$	0	0	e_5	$-2e_3$	0	0	u_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_5$	0	$2e_4$	0	u_3	0
e_5	$-e_1$	e_2	$2e_3$	$-2e_4$	0	0	u_2	$-u_3$
u_1	$3e_1$	$3e_2$	0	0	0	0	$-3u_2$	$-3u_3$
u_2	$(1/2)e_5 - (1/2)u_1$	e_3	0	$-u_3$	$-u_2$	$3u_2$	0	0
u_3	e_4	$-(1/2)e_5 - (1/2)u_1$	$-u_2$	0	u_3	$3u_3$	0	0

.

У пары 5.3.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, разложение Леви $\mathfrak{g}$ имеет вид $\{\{e_1, e_2\}, \{-(1/2)e_1 + e_5, e_2 - 2e_3, 2e_4\}\}$. В случае 5.3.1 алгебра голономии нулевая, т. е. связность не является нормальной, этот случай не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр.

Все вещественные пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 3 (где алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ и подалгебра $\mathfrak{g}$ неразрешимы), допускающие нормальную связность, имеют вид 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 5.3.2 (см. [7]). При этом пространство 5.3.2 не является редуктивным (не существуют разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), так как не выполняется условие $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Остальные пространства являются редуктивными (с каноническим разложением). Аффинные связности на этих пространствах имеют вид

Пара	Аффинная связность
3.3.1 3.3.2 3.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
3.4.1 3.4.2 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.1 3.5.2 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.3.2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{1,2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая:

3.3.1, 3.3.2, 3.3.3	$r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3	p_{12} – любое
3.5.1, 3.5.2, 3.5.3	p_{23} – любое

В случае 5.3.2 канонической связности не существует.

Далее выпишем, когда связность является естественной связностью без кручения:

Пара	Естественная связность без кручения
3.3.1	параметры нулевые
3.3.2	$p_{13} = r_{11} = r_{33} = 0$, $p_{32} = 1/2$
3.3.3	$p_{32} = r_{33} = 0$, $p_{13} = -r_{11} = 1/2$
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3	параметры нулевые
3.5.1, 3.5.2, 3.5.3	параметры нулевые
5.3.2	не существует

Тензоры кривизны и кручения на редуктивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.3.1	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.3.2	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}-r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2}-r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.3.3	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}-p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}+p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.1	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2+1 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2-1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.1	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 & 0 \\ p_{2,3}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 \\ 0 & p_{2,3}^2 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2-1 & 0 \\ p_{2,3}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2-1 \\ 0 & p_{2,3}^2+1 & 0 \end{pmatrix}$

3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}{}^2+1 & 0 \\ p_{2,3}{}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}{}^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2+1 \\ 0 & p_{2,3}{}^2-1 & 0 \end{pmatrix}$
Пара	Тензор кручения
3.3.1	$(0,0,2p_{3,2}), (p_{1,3}-r_{1,1},0,0), (0,p_{1,3}-r_{1,1},0)$
3.3.2	$(0,0,2p_{3,2}-1), (p_{1,3}-r_{1,1},0,0), (0,p_{1,3}-r_{1,1},0)$
3.3.3	$(0,0,2p_{3,2}), (p_{1,3}-r_{1,1}-1,0,0), (0,p_{1,3}-r_{1,1}-1,0)$
3.4.1	$(2p_{1,2},0,0), (0,2p_{1,2},0), (0,0,2p_{1,2})$
3.4.2	$(2p_{1,2},0,0), (0,2p_{1,2},0), (0,0,2p_{1,2})$
3.4.3	$(2p_{1,2},0,0), (0,2p_{1,2},0), (0,0,2p_{1,2})$
3.5.1	$(0,0,-2p_{2,3}), (0,2p_{2,3},0), (-2p_{2,3},0,0)$
3.5.2	$(0,0,-2p_{2,3}), (0,2p_{2,3},0), (-2p_{2,3},0,0)$
3.5.3	$(0,0,-2p_{2,3}), (0,2p_{2,3},0), (-2p_{2,3},0,0)$

В случае 3.3.1 связность нормальна, если $r_{3,3}=-2r_{1,1}$, $p_{1,3}\neq 0, p_{3,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$; в случае 3.3.2 связность нормальна, если $p_{1,3}\neq 0$, $p_{3,2}\neq 0$, тогда при $r_{3,3}=-2r_{1,1}$ алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, а при $r_{3,3}\neq -2r_{1,1}$ алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$; в случае 3.3.3 связность нормальна, если $r_{3,3}=-2r_{1,1}$, $p_{1,3}\neq 0, p_{3,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. В случае 3.4.1 связность нормальна, если $p_{1,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix}$; в случае 3.4.2 связность нормальна, если $p_{1,2}{}^2\neq 1$, тогда алгебра голономии совпадает с приведенной в случае 3.4.1; в случае 3.4.3 связность является нормальной при любом $p_{1,2}$, алгебра голономии совпадает с приведенной в случае 3.4.1. В случае 3.5.1 связность нормальна, если $p_{2,3}\neq 0$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 \\ s_1 & 0 & -s_3 \\ s_2 & s_3 & 0 \end{pmatrix}$; в случае 3.5.2 связность является нормальной, алгебра голономии совпадает с приведенной в случае 3.5.1; в случае 3.5.3 связность нормальна, если $p_{2,3}{}^2\neq 1$, тогда алгебра голономии совпадает с приведенной в случае 3.5.1.

Действительно, пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}\in\mathbb{R}$ (для всех $i,j=1,2,3$). Пусть, например, $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – локально однородное пространство 3.4.1, тогда

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \Lambda(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda(e_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$.

Получаем $p_{1,1}=0$, $p_{1,3}=0$, $p_{2,1}=0$, $p_{2,2}=0$, $p_{3,1}=0$, $p_{3,2}=0$, $p_{3,3}=0$. $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\Rightarrow$ $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=0$. Поэтому $p_{2,3}=p_{1,2}$. Так как $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_2)$,

$$q_{1,1}=-p_{1,2},\, q_{1,2}=q_{1,3}=q_{2,1}=q_{2,2}=0,\, q_{2,3}=0,\, q_{3,1}=0,\, q_{3,2}=0,\, q_{3,3}=p_{1,2}.$$

Поскольку $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda([e_3,u_2])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_3)$, получаем

$$r_{1,1}=r_{1,2}=r_{1,3}=0,\, r_{2,1}=-p_{1,2},\, r_{2,2}=0,\, r_{3,2}=-p_{1,2},\, r_{2,3}=r_{3,1}=r_{3,3}=0.$$

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=-\Lambda(u_3),[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1),[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0,$$

$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2),[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=0$ выполняются. Таким образом,

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}-p_{1,2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{1,2} & 0 & 0\\ 0 & -p_{1,2} & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)-0=\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}^2 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}^2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-0=\begin{pmatrix}-p_{1,2}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}^2\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{1,2}^2 & 0 & 0\\ 0 & -p_{1,2}^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak{m}}-[u_1,u_2]_{\mathfrak{m}}=(2p_{1,2}\ \ 0\ \ 0),$$

$$T(u_1,u_3)=\Lambda(u_1)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_1)_{\mathfrak{m}}-[u_1,u_3]_{\mathfrak{m}}=(0\ \ 2p_{1,2}\ \ 0),$$

$$T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}}-[u_2,u_3]_{\mathfrak{m}}=(0\ \ 0\ \ 2p_{1,2}).$$

Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x)\,|\,x\in\overline{\mathfrak{g}}\}$:

$$\mathfrak{a}=\begin{pmatrix}s_2 & s_1 & 0\\ s_3 & 0 & s_1\\ 0 & s_3 & -s_2\end{pmatrix}.$$

Подалгебра $\mathfrak{h}^*=V+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, где $V=\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\,|\,x,y\in\overline{\mathfrak{g}}\}$, совпадает с подпространством, порожденным множеством V при $p_{1,2}\neq 0$ и, таким образом, $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{a}$, т. е. связность нормальна при $p_{1,2}\neq 0$. При $p_{1,2}=0$ алгебра голономии нулевая, т. е. связность не является нормальной. Для других случаев рассуждения аналогичны.

Таким образом, найдены все трехмерные редуктивные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Комракову Борису Петровичу за постановку задачи и полезные замечания.

Acknowledgement. The author are grateful to his teacher Boris Petrovich Komrakov for posing the problem and for useful comments.

Список использованных источников

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.

2. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М.: Моск. ун-т, 1960. – 307 с.

3. Chen, B. Y. Geometry of submanifoids / B. Y. Chen // Pure and Appl. Math. – 1973. – Vol. 10, N 22. – 308 p.

4. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.

5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65. doi: 10.2307/2372398.

6. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

7. Можей, Н. П. Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований. I. Неразрешимый стабилизатор / Н. П. Можей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 4. – С. 61–76.

References

1. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience Publishers, 1963.

2. Kartan E. *Riemannian geometry in an orthogonal frame*. Moscow, Moscow University Publ., 1960. 307 p. (in Russian)

3. Chen B. Y. *Geometry of submanifolds*. New York, Dekker, 1973. 308 p.

4. Onishchik A. L. *Topology of transitive transformation groups*. Moscow, Fizmatlit Publishing Company, 1995. 384 p. (in Russian)

5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. doi: 10.2307/2372398.

6. Mozhey N. P. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on it.* Kazan, Publisher University of Kazan, 2015. 394 p. (in Russian)

7. Mozhey N. P. Normal Connections on Three-Dimensional Homogeneous Spaces with a NonSolvable Transformation Group. I. A Non-Solvable Stabilizer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series], 2013, vol. 155, book 4, pp. 61–76. (in Russian)

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Department of Software Information Technology, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Для цитирования

Можей, Н. П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований / Н. П. Можей // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 28–36.

For citation

Mozhey N. P. Normal connections on reductive homogeneous spaces with an unsolvable transformation group. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 28–36. (in Russian)