

# ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

---

МИНСК. БЕЛОРУССКАЯ НАУКА. 2017. ТОМ 61. № 1

---

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований, включен в базу данных  
Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

**В. Г. Гусаков**

Председатель Президиума Национальной академии наук Беларуси

Редакционная коллегия

**С. А. Чижик**

первый заместитель Председателя Президиума Национальной академии наук Беларуси

*(заместитель главного редактора)*

**С. Я. Клиш**

заместитель Председателя Президиума Национальной академии наук Беларуси *(заместитель главного редактора)*

**А. В. Кильчевский**

главный ученый секретарь Национальной академии наук Беларуси *(заместитель главного редактора)*

**Т. П. Петрович**

*(ведущий редактор журнала)*

**И. М. Богдевич** – Институт почвоведения и агрохимии Национальной академии наук Беларуси

**П. А. Витязь** – Президиум Национальной академии наук Беларуси

**И. Д. Волоотовский** – Институт биофизики и клеточной инженерии Национальной академии наук Беларуси

**И. В. Гайшун** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

**С. В. Гапоненко** – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований

**А. Е. Дайнеко** – Институт мясо-молочной промышленности Научно-практического центра

Национальной академии наук Беларуси по продовольствию

**И. В. Залуцкий** – Институт физиологии Национальной академии наук Беларуси

**О. А. Ивашкевич** – Белорусский государственный университет

**Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

**Н. С. Казак** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

**А. А. Коваленя** – Президиум Национальной академии наук Беларуси

**Ф. Ф. Комаров** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко

Белорусского государственного университета

**И. В. Котляров** – Институт социологии Национальной академии наук Беларуси

**В. А. Лабунов** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**А. П. Ласковнев** – Президиум Национальной академии наук Беларуси

- О. Н. Левко** – Институт истории Национальной академии наук Беларуси  
**А. И. Лесникович** – Белорусский государственный университет  
**В. Ф. Логинов** – Институт природопользования Национальной академии наук Беларуси  
**А. А. Махнач** – Научно-производственный центр по геологии  
**А. А. Михалевич** – Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси  
**М. Е. Никифоров** – Президиум Национальной академии наук Беларуси  
**В. А. Орлович** – Президиум Национальной академии наук Беларуси  
**О. Г. Пенязков** – Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси  
**Ю. М. Плескачевский** – Президиум Национальной академии наук Беларуси  
**Н. С. Сердюченко** – Президиум Национальной академии наук Беларуси  
**А. Ф. Смянович** – Республиканский научно-практический центр неврологии и нейрохирургии  
**Л. М. Томильчик** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси  
**С. А. Усанов** – Президиум Национальной академии наук Беларуси  
**Л. В. Хотылева** – Институт генетики и цитологии Национальной академии наук Беларуси  
**В. А. Хрипач** – Институт биорганической химии Национальной академии наук Беларуси  
**И. П. Шейко** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по животноводству

Р е д а к ц и о н н ы й с о в е т

- Ж. И. Алферов** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет  
Российской академии наук (Российская Федерация)  
**К. П. Валуцкас** – Национальный институт рака (Литовская Республика)  
**С. Воденичаров** – Болгарская академия наук (Республика Болгария)  
**И. М. Дунин** – Всероссийский научно-исследовательский институт племенного дела  
Министерства сельского хозяйства Российской Федерации (Российская Федерация)  
**Н. Желев** – Медицинский биотехнологический центр молекулярной и клеточной технологии  
Абертейского университета (Великобритания)  
**Н. Н. Казанский** – Институт лингвистических исследований Российской академии наук (Российская Федерация)  
**А. Карклинш** – Институт почвоведения и растениеводства Латвийского сельскохозяйственного университета в Елгаве  
(Латвийская Республика)  
**С. П. Карпов** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)  
**М. Ларссон** – Университетский центр Алба Нова Стокгольмского университета (Королевство Швеция)  
**А. Г. Наумовец** – Национальная академия наук Украины (Украина)  
**И. Д. Рашаль** – Институт биологии Латвийского университета (Латвийская Республика)  
**В. А. Садовничий** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)  
**А. Г. Тарарико** – Национальная академия аграрных наук Украины (Украина)  
**Л. Трипольская** – Литовский центр аграрных и лесных наук (Литовская Республика)  
**Тьяу Ван Минь** – Вьетнамская академия наук и технологий (Социалистическая Республика Вьетнам)  
**А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук  
(Австрийская Республика)  
**В. Ф. Чехун** – Институт экспериментальной патологии, онкологии и радиологии имени Р. Е. Кавецкого  
Национальной академии наук Украины (Украина)  
**Чжао Лян** – Хэнаньская академия наук (Китайская Народная Республика)

*Адрес редакции:*

*ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, Минск, Республика Беларусь.  
Тел.: +375 17 284-19-19; e-mail: doklady\_nanb@mail.ru  
doklady.belnauka.by*

---

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2017. Т. 61, № 1

*Выходит на русском, белорусском и английском языках*

---

Редактор Т. П. П е т р о в и ч  
Компьютерная верстка Н. И. К а ш у б а

Сдано в набор 30.01.2017. Выпуск в свет 24.02.2017. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 158 экз. Заказ 21.

Цена: индивидуальная подписка – 10,34 руб.; ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».  
Доклады НАН Беларуси, 2017

# DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

MINSK. BELARUSKAYA NAVUKA. 2017. Vol. 61. No. 1

---

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus  
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 387.

*The journal included in the List of Journal for Publication of the Results of Dissertation Research  
in the Republic of Belarus and in the Database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

## **E d i t o r - i n - C h i e f**

**V. G. Gusakov**

Chairman of the Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

## **E d i t o r i a l B o a r d**

**S. A. Chizhik**

First Vice Chairman of the Presidium of the National Academy  
of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**S. Ya. Kilin**

Vice Chairman of the Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
(*Associate Editor-in-Chief*)

**A. V. Kilchevsky**

Chief Scientific Secretary of the National Academy  
of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**T. P. Petrovich**

(*Lead editor*)

**I. M. Bogdevich** – Institute for Soil Science and Agrochemistry of the National Academy of Sciences of Belarus

**A. Ye. Daineko** – Institute for Meat and Dairy Industry of the Scientific  
and Practical Center for Foodstuffs of the National Academy of Sciences of Belarus

**I. V. Gaishun** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

**S. V. Gaponenko** – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research

**O. A. Ivashkevich** – Belarusian State University

**N. A. Izobov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

**N. S. Kazak** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

**L. V. Khotyleva** – Institute of Genetics and Cytology of the National Academy of Sciences of Belarus

**V. A. Khripach** – Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus

**F. F. Komarov** – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University

**I. V. Kotlyarov** – Institute of Sociology of the National Academy of Sciences of Belarus

**A. A. Kovalenya** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

**V. A. Labunov** – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**A. P. Laskovnev** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

**A. I. Lesnikovich** – Belarusian State University

**O. N. Levko** – Institute of History of the National Academy of Sciences of Belarus

- V. F. Loginov** – Institute for Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus  
**A. A. Makhnach** – Scientific and Practical Center on Geology  
**A. A. Mikhalevich** – Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus  
**M. Ye. Nikiforov** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
**V. A. Orlovich** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
**O. G. Penyazkov** – A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus  
**Yu. M. Pleskachevsky** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
**N. S. Serduchenko** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
**I. P. Sheiko** – Scientific and Practical Center for Animal Breeding  
**A. F. Smeyanovich** – Republican Scientific and Practical Center of Neurology and Neurosurgery  
**L. M. Tomilchik** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**S. A. Usanov** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
**P. A. Vitiaz** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus  
**I. D. Volotovskii** – Institute of Biophysics and Cell Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus  
**I. V. Zalutsky** – Institute of Physiology of the National Academy of Sciences of Belarus

#### E d i t o r i a l C o u n c i l

- Zh. Alferov** – Saint Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)  
**Chau Van Minh** – Vietnam Academy of Science and Technology (Socialist Republic of Vietnam)  
**V. F. Chekhun** – Kavetsky Institute of Experimental Pathology, Oncology and Radiology of the National Academy of Sciences (Ukraine)  
**I. M. Dunin** – All-Russian Scientific Research Institute of Breeding of the Ministry of Agriculture Economy of the Russian Federation (Russian Federation)  
**A. Karklinsh** – Institute of Soil Science and Plant of the Latvia University of Agriculture in Elgava (Republic of Latvia)  
**S. P. Karpov** – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)  
**N. N. Kazansky** – Institute for Linguistic Studies of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)  
**M. Larsson** – Alba Nova University Center of the University of Stockholm (Kingdom of Sweden)  
**A. G. Naumovets** – National Academy of Sciences of Ukraine (Ukraine)  
**I. D. Rashal** – Institute of Biology of the University of Latvia (Republic of Latvia)  
**V. A. Sadovnichiy** – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)  
**A. G. Tarariko** – National Academy of Agrarian Sciences of Ukraine (Ukraine)  
**L. Tripolskaya** – Lithuanian Centre of Agricultural and Forest Sciences (Republic of Lithuania)  
**K. P. Valuckas** – National Cancer Institute (Republic of Lithuania)  
**S. Vodenicharov** – Bulgarian Academy of Sciences (Republic of Bulgaria)  
**A. Zeilinger** – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences (Republic of Austria)  
**Zhao Liang** – Henan Academy of Sciences (People's Republic of China)  
**N. Zhelev** – Medical Biotechnology Center of Molecular and Cellular Technology of the Abertay University (Great Britain)

*Address of the Editorial Office:*

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.  
 Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: doklady\_nanb@mail.ru  
 doklady.belnauka.by*

---

DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS. 2017. VOL. 61. No. 1

*Printed in Russian, Belarusian and English languages*

---

Editor T. P. Petrovich  
 Computer Imposition N. I. Kashuba

Sent for press 30.01.2016. Output 24.02.2017. Format 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Offset paper.  
 Digital press. Printed sheets 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 158 copies. Order 21.  
 Price: individual subscription – 10,34 BYN, departmental subscription – 25,29 BYN

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".  
 Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions no. 1/18 dated of August 2, 2013. License for press no. 02330/455 dated of December 30, 2013.  
 40, F. Skorina Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka".  
 Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

<b>Можей Н. П.</b> Трехмерные редуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли . . . . .	7
<b>Забрейко П. П., Михайлов А. В.</b> Квалифицированные оценки погрешности последовательных приближений в теории некорректных линейных задач . . . . .	18
<b>Ровба Е. А., Поцейко П. Г.</b> Об одной системе рациональных дробей Чебышева–Маркова . . . . .	24
<b>Антоневич А. Б., Шукур Али А.</b> Оценка норм степеней оператора, порожденного иррациональным поворотом. . . . .	30

## ФИЗИКА

<b>Томильчик Л. М.</b> Модель пульсирующего массивного шара как точное решение уравнений самовзаимной гамильтоновой динамики. . . . .	36
---	----

## ХИМИЯ

<b>Опанасенко О. Н., Крутько Н. П., Жигалова О. Л., Лукша О. В., Козинец Т. А.</b> Стабилизация нефтяных дисперсий композициями поверхностно-активных веществ . . . . .	47
<b>Плиско Т. В., Бильдюкевич А. В., Исайчикова Я. А., Волков В. В.</b> Получение мембран на основе смесей полифениленсульфона и полисульфона . . . . .	54
<b>Божок Т. С., Калининченко Е. Н.</b> Синтез 2'-дезоксидеокси-2'-фтор-D-арабинонуклеозидов 6-замещенного тимина . . . . .	61

## БИОЛОГИЯ

<b>Семенченко В. П.</b> Соотношение между выживаемостью и плодовитостью в когортах <i>Daphnia longispina</i> (Cladocera) при разных трофических условиях . . . . .	68
<b>Вежновец В. В.</b> Влияние повышения температуры на состояние популяции реликтового рачка <i>Limnocalanus macrurus</i> Sars в мезотрофном озере . . . . .	73
<b>Пилипчук Т. А., Валентович Л. Н., Титок М. А., Коломиец Э. И.</b> Особенности молекулярно-генетической организации фага Pf-10 . . . . .	78

## МЕДИЦИНА

<b>Николаевич Л. Н., Залуцкий И. В., Руденкова И. В.</b> Новые подходы в диагностике опухолей толстой кишки по критерию ДНК-плоидности. . . . .	85
---	----

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

<b>Чешик И. А., Чунихин Л. А., Дроздов Д. Н., Власова Н. Г., Карабанов А. Г.</b> Оценка влияния радона на радиационную обстановку в Республике Беларусь. . . . .	89
--	----

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

<b>Байков В. И., Чорный А. Д.</b> Увлечение вязкопластической жидкости движущейся вертикально пластиной (на англ. яз.) . . . . .	95
<b>Артемьев В. М., Наумов А. О., Кохан Л. Л.</b> Рекуррентная линейная фильтрация случайных последовательностей методом наименьших квадратов с регуляризацией решения. . . . .	102
<b>Кот В. А.</b> Прямое интегрирование уравнения теплопроводности для полуограниченного пространства . . . . .	108

## АГРАРНЫЕ НАУКИ

<b>Барулин Н. В.</b> Обнаружение внешних полосспецифических признаков в строении производных кориума личинок и молоди стерляди <i>Acipenser rhuthenus</i> . . . . .	119
---	-----

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Mozhey N. P.</b> Three-dimensional reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups.....	7
<b>Zabreiko P. P., Mikhailov A. V.</b> Qualified error estimates of successive approximations in theory of ill-posed linear problems.....	18
<b>Rovba Y. A., Potsejko P. G.</b> About one system of the Chebyshev–Markov rational fractions.....	24
<b>Antonevich A. B., Shukur Ali A.</b> Estimations of the norm of the powers of the operator generated by irrational rotation.....	30

### PHYSICS

<b>Tomilchik L. M.</b> Model of massive pulsating sphere as an exact solution of the Hamiltonian self reciprocal dynamics equations.....	36
--	----

### CHEMISTRY

<b>Opanasenko O. N., Krut’ko N. P., Zhigalova O. L., Luksha O. V., Kozinets T. A.</b> Stabilization of petroleum dispersions by the compositions of surfactants.....	47
<b>Plisko T. V., Bilyukevich A. V., Isaichykava Y. A., Volkov V. V.</b> Preparation of polyphenylsulfone/polysulfone blend membranes.....	54
<b>Bozhok T. S., Kalinichenko E. N.</b> Synthesis of 6-substituted thymine 2'-deoxy-2'-fluoro-D-arabinofuranosyl nucleosides.....	61

### BIOLOGY

<b>Semenchenko V. P.</b> Ratio between the survival and fecundity in the cohorts of <i>Daphnia longispina</i> (Cladocera) under different trophic conditions.....	68
<b>Vezhnavev V. V.</b> Influence of a temperature increase on the condition of the relic crustacean <i>Limnocalanus macrurus</i> Sars population in a mesotrophic lake.....	73
<b>Pilipchuk T. A., Valentovich L. N., Titok M. A., Kolomiets E. I.</b> Peculiarities of the molecular-genetic structure of phage Pf-10.....	78

### MEDICINE

<b>Nikolaevich L. N., Zalutsky I. V., Rudenkova I. V.</b> New approaches to the diagnosis of sigmoid colon cancer of patients with colorectal cancer by the DNA-ploidy criterion.....	85
---	----

### EARTH SCIENCES

<b>Cheshik I. A., Chunikhin L. A., Drozdov D. N., Vlasova N. G., Karabanov A. K.</b> Assessment of the radon influence on the radiation situation in the Republic of Belarus.....	89
---	----

### TECHNICAL SCIENCES

<b>Baikov V. I., Chorny A. D.</b> Capturing a viscoplastic liquid by a moving vertical plate.....	95
<b>Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L.</b> Recursive linear filtering of random sequences using the least squares method with solution regularization.....	102
<b>Kot V. A.</b> Direct integration of the heat conduction equation for a semi-bounded space.....	108

### AGRARIAN SCIENCES

<b>Barulin N. V.</b> Detection of the external sex specific features in the structure of corium derivatives of larvae and juveniles of sterlet <i>Acipenser ruthenus</i> .....	119
--	-----

**МАТЕМАТИКА****MATHEMATICS**

УДК 514.765.1

Поступило в редакцию 26.09.2016

Received 26.09.2016

**Н. П. Можей***Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск,  
Республика Беларусь***ТРЕХМЕРНЫЕ РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА  
НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ***(Представлено академиком В. И. Корзюком)*

В работе представлена локальная классификация трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность. Рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований с разрешимым стабилизатором. Описаны все инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна.

*Ключевые слова:* нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

**N. P. Mozhey***Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus***THREE-DIMENSIONAL REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS***(Communicated by Academician V. I. Korzyuk)*

In this article we present a local classification of three-dimensional reductive homogeneous spaces allowing a normal connection. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations with a solvable stabilizer. We describe all invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections. We have studied the holonomy algebras of homogeneous spaces and have found when the invariant connection is normal.

*Keywords:* normal connection, reductive space, transformation group, holonomy algebra.

Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Настоящее сообщение является продолжением работы автора о нормальных связностях на редуктивных однородных пространствах, в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются трехмерные редуктивные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором.

Цель работы – описать трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, сами связности, их тензоры кривизны, кручения и алгебры голономии.

Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Проблема классификации однородных пространств  $(M, \bar{G})$  равносильна классификации пар групп Ли  $(\bar{G}, G)$ , где  $G \subset \bar{G}$  (см., напр., [2]). Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Однородное

пространство  $\bar{G}/G$  *редуктивно*, если алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$  для  $\bar{G}$  может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  для  $G$  и  $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства  $\mathfrak{m}$ , т. е. если  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$ ;  $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ . Второе условие влечет  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$  и наоборот, если  $G$  связна. Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры  $\mathfrak{g}$  (если  $\bar{G}/G$  редуктивно, то линейное представление изотропии для  $G$  всегда точное). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и фактор-пространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ . Если  $\bar{G}/G$  редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность.

Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения алгебры Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим базис  $\bar{\mathfrak{g}}$  ( $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ ). Будем полагать, что подалгебра Ли  $\mathfrak{g}$  порождается векторами  $e_1, \dots, e_{n-3}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  – базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d.n$ , а для нумерации пар – запись  $d.n.m$ , соответствующие приведенным в [3], здесь  $d$  – размерность подалгебры,  $n$  – номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $m$  – номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ .

**Т е о р е м а.** *Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, а  $\mathfrak{g}$  разрешима ( $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ), локально имеют следующий вид:*

3.19.14.	$\begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -e_2 & e_3 & 0 & u_2 & -u_3 \\ e_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ e_3 & -e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 & e_2 \\ u_2 & -u_2 & -u_1 & 0 & -e_3 & 0 & e_1 \\ u_3 & u_3 & 0 & -u_1 & -e_2 & -e_1 & 0 \end{array}$	3.21.6.	$\begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -e_3 & e_2 & 0 & -u_3 & u_2 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ e_3 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 & e_3 \\ u_2 & u_3 & -u_1 & 0 & -e_2 & 0 & e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -u_1 & -e_3 & -e_1 & 0 \end{array}$		
	3.21.7.	$\begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -e_3 & e_2 & 0 & -u_3 & u_2 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ e_3 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_2 & -e_3 \\ u_2 & u_3 & -u_1 & 0 & e_2 & 0 & -e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -u_1 & e_3 & e_1 & 0 \end{array}$			
2.9.12.	$\begin{array}{c ccccc} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -e_2 & u_1 & -2u_2 & 2u_3 \\ e_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ u_2 & 2u_2 & 0 & -e_2 & 0 & -e_1 \\ u_3 & -2u_3 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \end{array}$	2.21.4.	$\begin{array}{c ccccc} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$		
1.1.5.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	1.1.7.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	1.3.3.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
	1.3.4.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	1.3.5.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	
	1.3.6.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	1.8.2.	$\begin{array}{c cccc} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{g}$  – подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  такая, что пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  допускает нормальную связность,  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, а  $\mathfrak{g}$  разрешима ( $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ). Тогда  $\mathfrak{g}$  сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр [4]:

$$\begin{array}{l}
 4.21 \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & y & u \\ \hline & & z \\ \hline \end{array}; 3.13 \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline & y \\ \hline & \mu x \\ \hline \end{array}, \begin{array}{l} \mu = -1, \\ \mu = 0; \end{array} 3.19 \begin{array}{|c|c|} \hline y & z \\ \hline x & \\ \hline & -x \\ \hline \end{array}; \\
 3.21 \begin{array}{|c|c|} \hline y & z \\ \hline & x \\ \hline & -x \\ \hline \end{array}; 3.25 \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline & y \\ \hline \end{array}; 2.8 \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline y & \\ \hline \end{array}; 2.9 \begin{array}{|c|c|} \hline y & x \\ \hline & -2y \\ \hline & 2y \\ \hline \end{array}; 2.17 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}; \\
 2.21 \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline & y \\ \hline & -x \\ \hline \end{array}; 1.1 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline -x \\ \hline \end{array}; 1.3 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline -x \\ \hline \end{array}; 1.5 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array}; 1.8 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline x \\ \hline \end{array}.
 \end{array}$$

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$  ( $\mu$  – параметр).

Для каждой такой подалгебры найдем редуцирующие изотропно-точные пары, выберем пары, допускающие нормальную связность, а также выпишем сами аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Рассмотрим, например, подалгебру  $\mathfrak{g}$  в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  типа 2.21. Пусть  $E = \{e_1, e_2\}$  – базис  $\mathfrak{g}$ , где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через  $\mathfrak{h}$  обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , порожденную вектором  $e_1$ . Имеем  $\bar{\mathfrak{g}}^\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \times U^\alpha(\mathfrak{h})$  для всех  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ . Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, U^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1, \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_2, U^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2, U^{(-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3,$$

проверив тождество Якоби, получим, что  $[u_1, u_2] = \alpha_1 u_1, [u_1, u_3] = \alpha_1 u_2, [u_2, u_3] = \alpha_1 u_3$ . При  $\alpha_1 \neq 0$  отображение  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_4 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ , где  $\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1} u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1} u_2, \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_1} u_3$ , устанавливает эквивалентность пар  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  и 2.21.4 (это пространство является редуцированным с каноническим разложением). При  $\alpha_1 = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  тривиальна, т. е. у полученной пары алгебра  $\bar{\mathfrak{g}}$  является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. Разумеется, пары не сопряжены друг другу, так как в случае 2.21.4 алгебра  $\bar{\mathfrak{g}}$  не является разрешимой.

Для остальных подалгебр рассуждения аналогичны. В частности, рассмотрим, например, подалгебру 3.21. Пусть  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  – базис  $\mathfrak{g}$ , где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через  $\mathfrak{h}$  обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , порожденную вектором  $e_1$ . Рассмотрим комплексный обобщенный модуль  $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, U^{\mathbb{C}})$ . Положим  $\tilde{e}_i = e_i \otimes 1, i = 1, 2, 3$ , и  $\tilde{u}_j = u_j \otimes 1, j = 1, 2, 3$ . Тогда  $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$  – базис  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Векторное пространство  $U^{\mathbb{C}}$  может быть отождествлено с  $\mathbb{C}^3$ , и  $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$  – стандартный базис в  $U^{\mathbb{C}}$ . Тогда  $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{e}_1, \mathfrak{g}^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3), \mathfrak{g}^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$ ,

$$(U^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{u}_1, (U^{\mathbb{C}})^{(+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3), (U^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3)$$

и

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= -e_3, \\
[e_1, e_3] &= e_2, \quad [e_2, e_3] = 0, \\
[e_1, u_1] &= 0, \quad [e_2, u_1] = pe_2, \quad [e_3, u_1] = pe_3, \\
[e_1, u_2] &= qe_3 - u_3, \quad [e_2, u_2] = u_1, \quad [e_3, u_2] = pe_1, \\
[e_1, u_3] &= u_2 + re_3, \quad [e_2, u_3] = -pe_1, \quad [e_3, u_3] = u_1,
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) &= \mathbb{C}\tilde{e}_1 + \mathbb{C}\tilde{u}_1, \quad (\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3) + \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3), \\
(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) &= \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) + \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$[u_1, u_2] = a_2e_2 + a_3e_3 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3, [u_1, u_3] = b_2e_2 + b_3e_3 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3, [u_2, u_3] = c_1e_1 + \gamma_1u_1.$$

При  $p \neq 0$  пространство не является редуктивным (не существует разложения  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ), так как не выполняется условие  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ . При  $p = 0$ , используя тождество Якоби, видим, что  $[u_1, u_2] = a_2e_2, [u_1, u_3] = a_2e_3, [u_2, u_3] = a_2e_1 + \gamma_1u_1, q = 0$ . При  $r \neq 0$  пространство также не является редуктивным. При  $a_2 = r = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна тривиальной паре 3.21.1 при помощи отображения  $\pi: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}_1, \pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \pi(u_1) = u_1, \pi(u_2) = u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3, \pi(u_3) = u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2$ . Полученная алгебра является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр.

При  $a_2 > 0, r = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна паре 3.21.6 (это пространство является редуктивным с каноническим разложением) при помощи отображения  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_6 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$  такого, что

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \pi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}u_1, \quad \pi(u_2) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3\right), \quad \pi(u_3) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2\right).$$

При  $a_2 < 0, r = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна паре 3.21.7 (пространство является редуктивным с каноническим разложением).

Заметим, что  $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_6, \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_7$ ; подалгебра Леви в  $\bar{\mathfrak{g}}_6$  изоморфна  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , а подалгебра Леви в  $\bar{\mathfrak{g}}_7$  изоморфна  $\mathfrak{su}(2)$ . Отсюда следует, что пары не эквивалентны друг другу.

Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получаем, что редуктивные пространства задают только пары, приведенные в теореме. Выпишем для найденных пар разложение Леви:

Пара	Разложение Леви	Пара	Разложение Леви
3.19.14	$\{-e_2, u_1, e_3\}, \{-u_1 + u_2, -u_3, e_1 - e_2\}$	1.1.7	$\{u_3\}, \{-e_1 - u_3, -u_1, -u_2\}$
3.21.6	$\{-e_3, e_2, u_1\}, \{-u_3, -u_1 + u_2, e_1 - e_3\}$	1.3.3	$\{u_3\}, \{e_1 + u_3, u_1, u_2\}$
3.21.7	$\{u_1, e_2, -e_3\}, \{-u_3, u_1 + u_2, -e_1 - e_3\}$	1.3.4	$\{u_3\}, \{-e_1 + u_3, -u_1, -u_2\}$
2.9.12	$\{u_1, -e_2\}, \{-2u_2, 2u_1 + 2u_3, -e_1 - e_2\}$	1.3.5	$\{u_3\}, \{e_1, u_1, u_2\}$
2.21.4	$\{e_1 + u_2, -e_2 + u_1\}, \{u_1, -u_3, u_2\}$	1.3.6	$\{u_3\}, \{-e_1, -u_1, -u_2\}$
1.1.5	$\{u_3\}, \{-e_1, -u_1, -u_2\}$	1.8.2	$\{-e_1 + u_1\}, \{u_1, u_2, u_3\}$

Аффинной связностью на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры, а все отображения являются  $\mathfrak{g}$ -инвариантными. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве  $(M, \bar{G})$  находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  (см., напр., [5]). Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов  $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$ . Пусть

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых  $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$  (при  $i, j = 1, 2, 3$ ). Пусть, например, далее  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – локально однородное пространство 2.21.4. Отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0,$$

получим  $p_{2,1} = 0, p_{2,2} = p_{1,1}, p_{2,3} = p_{1,2}, p_{3,1} = 0, p_{3,2} = p_{2,1}, p_{3,3} = p_{1,1}, p_{3,2} = 0$ . Поскольку

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1), p_{1,1} = p_{1,3} = 0.$$

Так как

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1),$$

$$q_{2,2} = q_{1,1} + p_{1,2}, q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}, q_{3,3} = q_{2,2} + p_{1,2}, q_{2,1} = q_{3,1} = q_{3,2} = 0.$$

Если

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0,$$

то  $q_{1,2} = q_{1,3} = 0$ . Поскольку

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_2, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2),$$

$$q_{1,1} = -p_{1,2} = r_{2,1} = r_{3,2}, r_{2,2} = r_{1,1}, r_{2,3} = r_{1,2}, r_{3,1} = 0, r_{3,3} = r_{2,2}.$$

Так как

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_1, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3),$$

имеем  $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$ , таким образом,

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности на найденных парах имеют вид:

Пара	Связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5 1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1} + q_{1,2} & r_{1,2} + q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1} + 2q_{1,2} + p_{1,3} \end{pmatrix}$

Инвариантная связность, определяемая равенством  $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$ , называется *канонической связностью* (относительно разложения  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Для канонической связности каждая геодезическая, исходящая из  $o$ , имеет вид  $f_t(o)$ , где  $f_t = \exp(tx)$ ,  $x \in \mathfrak{m}$ . Таким образом, связность является канонической, если  $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$ . Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая:

3.19.14	$r_{12} = -q_{13}$	1.1.7	$q_{31} = -p_{32}, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{22} = -q_{23}$
3.21.6	$q_{12} = 0$	1.3.3	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
3.21.7	$q_{12} = 0$	1.3.4	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
2.9.12	нулевая	1.3.5	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
2.21.4	$p_{12}$ – любое	1.3.6	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
1.1.5	$q_{31} = -p_{32}, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{22} = -q_{23}$	1.8.2	$q_{12} = 0, r_{13} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = -q_{13}$

Каждое редуktивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность:  $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$ ,  $x, y \in \mathfrak{m}$ . Такая связность называется *естественной связностью без кручения*, ее также называют *канонической связностью первого рода*. Выпишем, при каких условиях связность является естественной связностью без кручения:

Пара	Естественная связность без кручения	Пара	Естественная связность без кручения
3.19.14	$r_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.1.7	$q_{31} = -1/2, p_{32} = 1/2, r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{22} = q_{23} = 0$
3.21.6	$q_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.3.3	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = 0, p_{32} = 1/2$
3.21.7	$q_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.3.4	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = 0, p_{32} = 1/2$
2.9.12	параметры нулевые	1.3.5	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = p_{32} = 0$ (нулевая)
2.21.4	$p_{12} = 1/2$	1.3.6	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = p_{32} = 0$ (нулевая)
1.1.5	$q_{31} = p_{32} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{22} = q_{23} = 0$ (нулевая)	1.8.2	$q_{12} = r_{13} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = q_{13} = 0, p_{12} = 1/2$

Тензор кручения  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и тензор кривизны  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ . Будем описывать тензор кривизны  $R$  через  $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  через  $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$ . Тензоры кривизны и кручения на редуktивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.21.6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3} - p_{1,3}q_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1} - r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1} - 1 - r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3} + 1 - r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3} - p_{1,3}q_{3,1} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1} - r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3.3	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} - 1 - r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} + 1 + r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.4	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} + 1 - r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} - 1 + r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$

1.3.5	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} - 1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} + 1 & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.6	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} + 1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} - 1 & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 3p_{1,3}p_{1,2} - p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & q_{1,2}p_{1,2} - p_{1,3}p_{1,2} - q_{1,2} & p_{1,2}q_{1,3} + 2p_{1,3}q_{1,2} + p_{1,3}^2 - q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}p_{1,2} + 2p_{1,3}p_{1,2} - q_{1,2} - p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{1,2} - r_{1,1} & -r_{1,2}p_{1,2} + q_{1,2}^2 - p_{1,2}q_{1,3} - r_{1,2} & A \\ -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & -p_{1,3}p_{1,2} - r_{1,1} - q_{1,2} & B \\ 0 & -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & C \end{pmatrix},$ $A = -2p_{1,2}r_{1,3} + 3q_{1,2}q_{1,3} + q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,3},$ $B = q_{1,2}^2 + 2p_{1,3}q_{1,2} + p_{1,3}^2 - r_{1,2}p_{1,2} - r_{1,2} - q_{1,3},$ $C = q_{1,2}p_{1,2} + p_{1,3}p_{1,2} - r_{1,1} - 2q_{1,2} - p_{1,3}$
Пара	Тензор кручения
3.19.14	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0)$
3.21.6	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
3.21.7	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
2.9.12	нулевой
2.21.4	$(2p_{1,2} - 1, 0, 0), (0, 2p_{1,2} - 1, 0), (0, 0, 2p_{1,2} - 1)$
1.1.5	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1}), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0)$

1.1.7	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0)$
1.3.3	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.4	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.5	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.6	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.8.2	$(2p_{1,2} - 1, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1)$

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  – подпространство, порожденное множеством  $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Положим  $\mathfrak{a}$  равной подалгебре в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , порожденной множеством  $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Если  $\mathfrak{h}^*$  – алгебра Ли группы голономии, то  $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$ , где  $\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$  – нормализатор  $\mathfrak{h}^*$  в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ .

Будем говорить, что инвариантная связность *нормальна*, если  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ ; например, в случае 2.21.4 это верно при  $p_{1,2} \neq 0, p_{1,2} \neq 1$ , тогда алгебра голономии  $\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$ , а в противном случае алгебра голономии нулевая. Аналогично получаем:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}$	2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$	2.21.4	$p_{1,2} \neq 0, 1 \begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$ $p_{1,2} = 0, 1$ нулевая

Определим, в каких случаях  $\mathfrak{h}^*$  совпадает с  $\mathfrak{a}$ . Для пар 3.19.14, 3.21.6, 3.21.7 и 2.9.12 связность является нормальной. У пары 2.21.4 связность нормальна, если  $p_{1,2} \neq 0, 1$ .

Рассмотрим пару 1.1.5. Связность нормальна, если:

$$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3}, r_{2,2} = -r_{1,1}, r_{3,3} = 0, \text{ тогда алгебра голономии } \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = 0, q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{2,2}, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{2,2}$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 - p_1 & p_4 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{2,2}, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{2,2}$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{2,2}, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{2,2}$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = 0, q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{1,1}, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{1,1}$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 - p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{1,1}, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{1,1}$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} \neq 0, q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{1,1}, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{1,1}$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ , то  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ .

Рассмотрим пару 1.1.7. Связность нормальна, если:

$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3}$  ( $r_{2,2} = -r_{1,1} \neq 0$  или  $r_{2,2} = r_{1,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1$ ),

$r_{3,3} = 0$  ( $r_{1,1} \neq -1$  или  $p_{1,3}q_{3,1} \neq 0$ ), тогда алгебра голономии  $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix};$

$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{2,2} \neq -r_{1,1}, r_{3,3} = (r_{2,2} + r_{1,1})/2$ , то

$$\begin{pmatrix} p_1 + r_{1,1}p_4 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 + r_{2,2}p_4 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & (r_{2,2} + r_{1,1})p_4/2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = 0, q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 - p_1 & p_4 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = 0, q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{1,1}, r_{2,2} \neq 1$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 - p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{1,1}, r_{2,2} \neq 1$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0$ ,  $q_{3,1} \neq 0$ ,  $p_{3,2} \neq 0$ ,  $q_{2,3} = 0$ ,  $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  ( $r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2$ ,  $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$  или  $r_{3,3} \neq r_{1,1}$ ,  $r_{2,2} \neq 1$ ), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$ , то при  $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$  алгебра голономии –  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ , а при  $r_{3,3} \neq -r_{2,2} - r_{1,1}$  алгебра голономии –  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ .

Таким образом, найдены все трехмерные редуцированные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором, допускающие нормальную связность инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения.

**Благодарности.** Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Борису Петровичу Комракову за постановку задачи и полезные замечания.

**Acknowledgement.** The author are grateful to his teacher Boris Petrovich Komrakov for posing the problem and for useful comments.

### Список использованных источников

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.
2. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.
3. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.
4. Можей, Н. П. Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований. II. Разрешимый стабилизатор / Н. П. Можей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 156. – С. 51–70.
5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65. doi.org/10.2307/2372398.

### References

1. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience Publishers, 1963.
2. Onishchik A. L. *Topology of transitive transformation groups*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1995. 384 p. (in Russian)
3. Mozhey N. P. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them*. Kazan, Publisher University of Kazan, 2015. 394 p. (in Russian)
4. Mozhey N. P. Normal Connections on Three-Dimensional Homogeneous Spaces with a Non-Solvable Transformation Group. II. A Solvable Stabilizer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series], 2014, vol. 156, pp. 51–70. (in Russian)
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. doi.org/10.2307/2372398.

### Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – канд. физ.-мат. наук, доцент, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

### Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

### Для цитирования

Можей, Н. П. Трехмерные редуцированные однородные пространства неразрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 7–17.

### For citation

Mozhey N. P. Three-dimensional reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 7–17. (in Russian)