ISSN 0002–354X (print)
doklady.belnauka.by

ДОКЛАДЫ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

МИНСК. БЕЛОРУССКАЯ НАУКА. 2017. ТОМ 61. № 1

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)

Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, Минск, Республика Беларусь.
Тел.: +375 17 284-19-19; e-mail: doklady_nanb@mail.ru
doklady.belnauka.by

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2017. Т. 61, № 1

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор Т. П. П е т р о в и ч
Компьютерная верстка Н. И. К а ш у б а

Сдано в набор 30.01.2017. Выпуск в свет 24.02.2017. Формат $60\times84^1/_8$. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 158 экз. Заказ 21.

Цена: индивидуальная подписка – 10,34 руб.; ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

ISSN 0002–354X (print)
doklady.belnauka.by

DOKLADY
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

MINSK. BELARUSKAYA NAVUKA. 2017. Vol. 61. No. 1

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

Founder − National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 387.

The journal included in the List of Journal for Publication of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus and in the Database of Russian Science Citation Index (RSCI)

Address of the Editorial Office:

1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
Тел.: +375 17 284-19-19; e-mail: doklady_nanb@mail.ru

doklady.belnauka.by

DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS. 2017. VOL. 61. No. 1

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor T. P. Petrovich
Computer Imposition N. I. Kashuba

Sent for press 30.01.2016. Output 24.02.2017. Format $60 \times 84^1/_8$. Offset paper.
Digital press. Printed sheets 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 158 copies. Order 21.
Price: individual subscription – 10,34 BYN, departmental subscription – 25,29 BYN

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprice "Publishing House "Belaruskaya Navuka".
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions no. 1/18 dated of August 2, 2013. License for press no. 02330/455 dated of December 30, 2013.
40, F. Skorina Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus.

ISSN 0002–354X (print)

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 0002–354X (print)

CONTENTS

ISSN 0002–354X (print)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 514.765.1

Поступило в редакцию 26.09.2016
Received 26.09.2016

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

ТРЕХМЕРНЫЕ РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

В работе представлена локальная классификация трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность. Рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований с разрешимым стабилизатором. Описаны все инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна.

Ключевые слова: нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

THREE-DIMENSIONAL REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS

(Communicated by Academician V. I. Korzyuk)

In this article we present a local classification of three-dimensional reductive homogeneous spaces allowing a normal connection. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations with a solvable stabilizer. We describe all invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections. We have studied the holonomy algebras of homogeneous spaces and have found when the invariant connection is normal.

Keywords: normal connection, reductive space, transformation group, holonomy algebra.

Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Настоящее сообщение является продолжением работы автора о нормальных связностях на редуктивных однородных пространствах, в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются трехмерные редуктивные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором.

Цель работы – описать трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, сами связности, их тензоры кривизны, кручения и алгебры голономии.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$ (см., напр., [2]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Однородное пространство $\overline{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ для $\overline{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$ (если $\overline{G}/G$ редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность.

Будем описывать пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\overline{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \overline{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \dots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [3], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Т е о р е м а. *Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\overline{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима $(\mathfrak{g} \neq \{0\})$, локально имеют следующий вид:*

3.19.14.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

,

3.21.6.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

,

3.21.7.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

,

2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

2.21.4.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

,

1.1.5.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1	0
u_2	u_2	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.1.7.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0
u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.3.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.4.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.5.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.6.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	e_1	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.8.2.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима ($\mathfrak{g}\neq\{0\}$). Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр [4]:

$$4.21\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & u\\ & & z\\ & & \\\hline\end{array};\ 3.13\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z\\ & & y\\ & & \mu x\\\hline\end{array},\ \begin{array}{c}\mu=-1,\\ \mu=0;\end{array}\ 3.19\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & x & \\ & & -x\\\hline\end{array};$$

$$3.21\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & & x\\ & -x & \\\hline\end{array};\ 3.25\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & z\\ & & y\\ & & \\\hline\end{array};\ 2.8\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x\\ & y & \\ & & \\\hline\end{array};\ 2.9\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x\\ & -2y & \\ & & 2y\\\hline\end{array};\ 2.17\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x\\ & & y\\ & & \\\hline\end{array};$$

$$2.21\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ & & y\\ & & -x\\\hline\end{array};\ 1.1\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & -x & \\ & & \\\hline\end{array};\ 1.3\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ -x & & \\ & & \\\hline\end{array};\ 1.5\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x\\ & & \\ & & \\\hline\end{array};\ 1.8\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ & & x\\ & & \\\hline\end{array}.$$

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$ (μ – параметр).

Для каждой такой подалгебры найдем редуктивные изотропно-точные пары, выберем пары, допускающие нормальную связность, а также выпишем сами аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Рассмотрим, например, подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ типа 2.21. Пусть $E=\{e_1,e_2\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1=\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad e_2=\Lambda(e_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})\times U^{\alpha}(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha\in\mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1, U^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_1, \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_2, U^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2, U^{(-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_3,$$

проверив тождество Якоби, получим, что $[u_1,u_2]=\alpha_1u_1,[u_1,u_3]=\alpha_1u_2,[u_2,u_3]=\alpha_1u_3$. При $\alpha_1\neq0$ отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_4\to\bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_1)=e_1,\pi(e_2)=e_2,\pi(u_1)=\dfrac{1}{\alpha_1}u_1,\pi(u_2)=\dfrac{1}{\alpha_1}u_2,\pi(u_3)=\dfrac{1}{\alpha_1}u_3$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 2.21.4 (это пространство является редуктивным с каноническим разложением). При $\alpha_1=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна, т. е. у полученной пары алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. Разумеется, пары не сопряжены друг другу, так как в случае 2.21.4 алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой.

Для остальных подалгебр рассуждения аналогичны. В частности, рассмотрим, например, подалгебру 3.21. Пусть $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1=\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}, e_2=\Lambda(e_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, e_3=\Lambda(e_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Рассмотрим комплексный обобщенный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},U^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i=e_i\otimes1, i=1,2,3$, и $\tilde{u}_j=u_j\otimes1, j=1,2,3$. Тогда $\tilde{E}=\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $U^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^3$, и $\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3\}$ – стандартный базис в $U^{\mathbb{C}}$. Тогда $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}\tilde{e}_1, \mathfrak{g}^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3), \mathfrak{g}^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)$,

$$(U^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}\tilde{u}_1,\quad (U^{\mathbb{C}})^{(+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3),\quad (U^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)$$

и

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = -e_3,\\
&[e_1, e_3] = e_2, \qquad [e_2, e_3] = 0,\\
&[e_1, u_1] = 0, \qquad [e_2, u_1] = pe_2,\ [e_3, u_1] = pe_3,\\
&[e_1, u_2] = qe_3 - u_3, [e_2, u_2] = u_1, \quad [e_3, u_2] = pe_1,\\
&[e_1, u_3] = u_2 + re_3, [e_2, u_3] = -pe_1, [e_3, u_3] = u_1,
\end{aligned}$$

имеем

$$(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{e}_1 + \mathbb{C}\tilde{u}_1, (\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3) + \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3),$$
$$(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) + \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3).$$

Поэтому

$$[u_1, u_2] = a_2e_2 + a_3e_3 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3, [u_1, u_3] = b_2e_2 + b_3e_3 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3, [u_2, u_3] = c_1e_1 + \gamma_1u_1.$$

При $p \neq 0$ пространство не является редуктивным (не существует разложения $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), так как не выполняется условие $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. При $p = 0$, используя тождество Якоби, видим, что $[u_1, u_2] = a_2e_2, [u_1, u_3] = a_2e_3, [u_2, u_3] = a_2e_1 + \gamma_1u_1, q = 0.$ При $r \neq 0$ пространство также не является редуктивным. При $a_2 = r = 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 3.21.1 при помощи отображения $\pi : \overline{\mathfrak{g}} \to \overline{\mathfrak{g}}_1,\ \pi(e_i) = e_i,\ i = 1, 2, 3,\ \pi(u_1) = u_1,\ \pi(u_2) = u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3,\ \pi(u_3) = u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2.$ Полученная алгебра является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр.

При $a_2 > 0, r = 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.6 (это пространство является редуктивным с каноническим разложением) при помощи отображения $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_6 \to \overline{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_i) = e_i,\ i = 1, 2, 3, \pi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3\right), \pi(u_3) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2\right).$$

При $a_2 < 0,\ r = 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.7 (пространство является редуктивным с каноническим разложением).

Заметим, что $\dim D\overline{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\overline{\mathfrak{g}}_6, \dim D\overline{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\overline{\mathfrak{g}}_7$; подалгебра Леви в $\overline{\mathfrak{g}}_6$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, а подалгебра Леви в $\overline{\mathfrak{g}}_7$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$. Отсюда следует, что пары не эквивалентны друг другу.

Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получаем, что редуктивные пространства задают только пары, приведеные в теореме. Выпишем для найденных пар разложение Леви:

Пара	Разложение Леви	Пара	Разложение Леви
3.19.14	$\{\{-e_2, u_1, e_3\}, \{-u_1 + u_2, -u_3, e_1 - e_2\}\}$	1.1.7	$\{\{u_3\}, \{-e_1 - u_3, -u_1, -u_2\}\}$
3.21.6	$\{\{-e_3, e_2, u_1\}, \{-u_3, -u_1 + u_2, e_1 - e_3\}\}$	1.3.3	$\{\{u_3\}, \{e_1 + u_3, u_1, u_2\}\}$
3.21.7	$\{\{u_1, e_2, -e_3\}, \{-u_3, u_1 + u_2, -e_1 - e_3\}\}$	1.3.4	$\{\{u_3\}, \{-e_1 + u_3, -u_1, -u_2\}\}$
2.9.12	$\{\{u_1, -e_2\}, \{-2u_2, 2u_1 + 2u_3, -e_1 - e_2\}\}$	1.3.5	$\{\{u_3\}, \{e_1, u_1, u_2\}\}$
2.21.4	$\{\{e_1 + u_2, -e_2 + u_1\}, \{u_1, -u_3, u_2\}\}$	1.3.6	$\{\{u_3\}, \{-e_1, -u_1, -u_2\}\}$
1.1.5	$\{\{u_3\}, \{-e_1, -u_1, -u_2\}\}$	1.8.2	$\{\{-e_1 + u_1\}, \{u_1, u_2, u_3\}\}$

Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображения являются $\mathfrak{g}$-инвариантными. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., напр., [5]). Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$. Пусть

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = 1, 2, 3$). Пусть, например, далее $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – локально однородное пространство 2.21.4. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0,$$

получим $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = p_{1,1}$, $p_{2,3} = p_{1,2}$, $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = p_{2,1}$, $p_{3,3} = p_{1,1}$, $p_{3,2} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),\ p_{1,1} = p_{1,3} = 0.$$

Так как

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1),$$

$$q_{2,2} = q_{1,1} + p_{1,2},\ q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3},\ q_{3,3} = q_{2,2} + p_{1,2},\ q_{2,1} = q_{3,1} = q_{3,2} = 0.$$

Если

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0,$$

то $q_{1,2} = q_{1,3} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_2, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2),$$

$$q_{1,1} = -p_{1,2} = r_{2,1} = r_{3,2},\ r_{2,2} = r_{1,1},\ r_{2,3} = r_{1,2},\ r_{3,1} = 0,\ r_{3,3} = r_{2,2}.$$

Так как

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_1, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3),$$

имеем $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$, таким образом,

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},\ \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности на найденных парах имеют вид:

Пара	Связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5 1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1} + q_{1,2} & r_{1,2} + q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1} + 2q_{1,2} + p_{1,3} \end{pmatrix}$

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda\big|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Для канонической связности каждая геодезическая, исходящая из o, имеет вид $f_t(o)$, где $f_t = \exp(tx)$, $x \in \mathfrak{m}$. Таким образом, связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая:

3.19.14	$r_{12} = -q_{13}$	1.1.7	$q_{31} = -p_{32}$, $r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$
3.21.6	$q_{12} = 0$	1.3.3	$p_{31} = 0$, $r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = p_{23}$
3.21.7	$q_{12} = 0$	1.3.4	$p_{31} = 0$, $r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = p_{23}$
2.9.12	нулевая	1.3.5	$p_{31} = 0$, $r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = p_{23}$
2.21.4	p_{12} – любое	1.3.6	$p_{31} = 0$, $r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = p_{23}$
1.1.5	$q_{31} = -p_{32}$, $r_{33} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$	1.8.2	$q_{12} = 0$, $r_{13} = 0$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = -q_{13}$

Каждое редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$. Такая связность называется *естественной связностью без кручения*, ее также называют *канонической связностью первого рода*. Выпишем, при каких условиях связность является естественной связностью без кручения:

Пара	Естественная связность без кручения	Пара	Естественная связность без кручения
3.19.14	$r_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.1.7	$q_{31} = -1/2$, $p_{32} = 1/2$, $r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{22} = q_{23} = 0$
3.21.6	$q_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.3.3	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = 0$, $p_{32} = 1/2$
3.21.7	$q_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.3.4	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = 0$, $p_{32} = 1/2$
2.9.12	параметры нулевые	1.3.5	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = p_{32} = 0$ (нулевая)
2.21.4	$p_{12} = 1/2$	1.3.6	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = p_{32} = 0$ (нулевая)
1.1.5	$q_{31} = p_{32} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{22} = q_{23} = 0$ (нулевая)	1.8.2	$q_{12} = r_{13} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = q_{13} = 0$, $p_{12} = 1/2$

Тензор кручения $T \in \mathrm{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \mathrm{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем описывать тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Тензоры кривизны и кручения на редуктивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.21.6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2 - p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 - p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 - p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2 + p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3} - p_{1,3}q_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1} - r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1} - 1 - r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3} + 1 - r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3} - p_{1,3}q_{3,1} - r_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1} - r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3.3	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} - 1 - r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} + 1 + r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.4	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} + 1 - r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} - 1 + r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$

1.3.5	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}-1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}+1 & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.6	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}+1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}-1 & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2-p_{1,2} & 3p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2-p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -p_{1,2}^2+p_{1,2} & q_{1,2}p_{1,2}-p_{1,3}p_{1,2}-q_{1,2} & p_{1,2}q_{1,3}+2p_{1,3}q_{1,2}+p_{1,3}^2-q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}p_{1,2}+2p_{1,3}p_{1,2}-q_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2-p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{1,2}-r_{1,1} & -r_{1,2}p_{1,2}+q_{1,2}^2-p_{1,2}q_{1,3}-r_{1,2} & A \\ -p_{1,2}^2+p_{1,2} & -p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}-q_{1,2} & B \\ 0 & -p_{1,2}^2+p_{1,2} & C \end{pmatrix},$ $A=-2p_{1,2}r_{1,3}+3q_{1,2}q_{1,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3},$ $B=q_{1,2}^2+2p_{1,3}q_{1,2}+p_{1,3}^2-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2}-q_{1,3},$ $C=q_{1,2}p_{1,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}-2q_{1,2}-p_{1,3}$
Пара	Тензор кручения
3.19.14	$(0,0,0),(0,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},0,0)$
3.21.6	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
3.21.7	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
2.9.12	нулевой
2.21.4	$(2p_{1,2}-1,0,0),(0,2p_{1,2}-1,0),(0,0,2p_{1,2}-1)$
1.1.5	$(0,0,p_{3,2}-q_{3,1}),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,q_{2,3}-r_{2,2},0)$

1.1.7	$(0,0,p_{3,2}-q_{3,1}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,q_{2,3}-r_{2,2},0)$
1.3.3	$(0,0,2p_{3,2}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.3.4	$(0,0,2p_{3,2}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.3.5	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.3.6	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.8.2	$(2p_{1,2}-1,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{1,2}-1,0),(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},2p_{1,2}-1)$

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda:\overline{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\overline{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x)\mid x\in\overline{\mathfrak{g}}\}$. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^*\subset\mathfrak{a}\subset\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$.

Будем говорить, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{a}$; например, в случае 2.21.4 это верно при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{1,2}\neq 1$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0\\ p_2 & 0 & p_1\\ 0 & p_2 & -p_3\end{pmatrix}$, а в противном случае алгебра голономии нулевая. Аналогично получаем:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1\\ 0 & p_3 & 0\\ 0 & 0 & -p_3\end{pmatrix}$	2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1\\ 0 & -2p_2 & 0\\ 0 & 0 & 2p_2\end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2\\ 0 & 0 & -p_3\\ 0 & p_3 & 0\end{pmatrix}$	2.21.4	$p_{1,2}\neq 0,1$ $\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0\\ p_2 & 0 & p_1\\ 0 & p_2 & -p_3\end{pmatrix}$ $p_{1,2}=0,1$ нулевая

Определим, в каких случаях $\mathfrak{h}^*$ совпадает с $\mathfrak{a}$. Для пар 3.19.14, 3.21.6, 3.21.7 и 2.9.12 связность является нормальной. У пары 2.21.4 связность нормальна, если $p_{1,2}\neq 0,1$.

Рассмотрим пару 1.1.5. Связность нормальна, если:

$p_{1,3}q_{3,1}=p_{3,2}q_{2,3}$, $r_{2,2}=-r_{1,1}$, $r_{3,3}=0$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2\\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3\\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0\end{pmatrix}$;

$p_{1,3}=0$, $q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3}\neq 0$, $r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1}$ ($r_{3,3}=r_{2,2}$, $p_{3,2}q_{2,3}\neq 1/2$ или $r_{3,3}\neq r_{2,2}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0\\ p_3 & p_2-p_1 & p_4\\ p_5 & p_6 & -p_2\end{pmatrix};$$

$p_{1,3}=q_{3,1}=0$, $p_{3,2}q_{2,3}\neq 0$, $r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1}$ ($r_{3,3}=r_{2,2}$, $p_{3,2}q_{2,3}\neq 1/2$ или $r_{3,3}\neq r_{2,2}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2-p_1 & p_3\\ 0 & p_4 & -p_2\end{pmatrix};$$

$p_{1,3}\neq 0$, $q_{3,1}=0$, $p_{3,2}q_{2,3}\neq 0$, $r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1}$ ($r_{3,3}=r_{2,2}$, $p_{3,2}q_{2,3}\neq 1/2$ или $r_{3,3}\neq r_{2,2}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4\\ 0 & p_2-p_1 & p_5\\ 0 & p_6 & -p_2\end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = 0, q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1}$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 - p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1}$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} \neq 0, q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1}$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$, то – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 1.1.7. Связность нормальна, если:
$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3}$ ($r_{2,2} = -r_{1,1} \neq 0$ или $r_{2,2} = r_{1,1} = 0$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1$),
$r_{3,3} = 0$ ($r_{1,1} \neq -1$ или $p_{1,3}q_{3,1} \neq 0$), тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{2,2} \neq -r_{1,1}, r_{3,3} = (r_{2,2} + r_{1,1})/2$, то

$$\begin{pmatrix} p_1 + r_{1,1}p_4 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 + r_{2,2}p_4 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & (r_{2,2} + r_{1,1})p_4/2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = 0, q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 - p_1 & p_4 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = 0, q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$, $r_{2,2} \neq 1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 - p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0$, $q_{3,1} \neq 0$, $p_{3,2} = q_{2,3} = 0$, $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$, $r_{2,2} \neq 1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0,\ q_{3,1} \neq 0,\ p_{3,2} \neq 0,\ q_{2,3} = 0,\ r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ $(r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2,\ p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$, $r_{2,2} \neq 1)$, то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, то при $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, а при $r_{3,3} \neq -r_{2,2} - r_{1,1}$ алгебра голономии – $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

Таким образом, найдены все трехмерные редуктивные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором, допускающие нормальную связность инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Борису Петровичу Комракову за постановку задачи и полезные замечания.

Acknowledgement. The author are grateful to his teacher Boris Petrovich Komrakov for posing the problem and for useful comments.

Список использованных источников

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.
2. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.
3. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.
4. Можей, Н. П. Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований. II. Разрешимый стабилизатор / Н. П. Можей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 156. – С. 51–70.
5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65. doi.org/10.2307/2372398.

References

1. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience Publishers, 1963.
2. Onishchik A. L. *Topology of transitive transformation groups*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1995. 384 p. (in Russian)
3. Mozhey N. P. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them*. Kazan, Publisher University of Kazan, 2015. 394 p. (in Russian)
4. Mozhey N. P. Normal Connections on Three-Dimensional Homogeneous Spaces with a Non-Solvable Transformation Group. II. A Solvable Stabilizer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series], 2014, vol. 156, pp. 51–70. (in Russian)
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. doi.org/10.2307/2372398.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – канд. физ.-мат. наук, доцент, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Для цитирования

Можей, Н. П. Трехмерные редуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 7–17.

For citation

Mozhey N. P. Three-dimensional reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 7–17. (in Russian)