ISSN 0002–354X (print)
УДК 517.983

Поступило в редакцию 17.10.2016
Received 17.10.2016

П. П. Забрейко, А. В. Михайлов

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КВАЛИФИЦИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

В сообщении описываются необходимые и достаточные условия на оператор B, $\rho(B)=1$, при выполнении которых ряд Неймана сходится сильно и затем, на основе этих условий, приводятся некоторые оценки погрешностей для соответствующих последовательных приближений.

Ключевые слова: последовательные приближения, квазисходимость, ряд Неймана.

P. P. Zabreiko, A. V. Mikhailov

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

QUALIFIED ERROR ESTIMATES OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS IN THEORY OF ILL-POSED LINEAR PROBLEMS

(Communicated by Corresponding Member V. V. Gorokhovik)

This article deals with the necessary and sufficient conditions for the operator B, $\rho(B)=1$, under which the Neumann series converges strongly and on the basis of these conditions, some of the error estimates for the corresponding successive approximations are presented.

Keywords: successive approximations, quasiconvergence, Neumann series.

Одним из основных методов приближенного решения линейного операторного уравнения

$$x = Bx + f \tag{1}$$

с непрерывным в банаховом пространстве X линейным оператором A является метод последовательных приближений, описываемых равенствами

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Анализ сходимости этого метода (см., напр., [1; 2]) обычно сводится к анализу сходимости ряда Неймана

$$N(B) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n. \tag{3}$$

Сходимость же последнего полностью определяется спектральным радиусом $\rho(B)$ оператора B, который определяется равенством

$$\rho(B) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|B^n\|}.$$

Более точно, ряд Неймана (3) сходится (по норме линейных операторов в пространстве X) в том и только том случае, когда справедливо неравенство

$$\rho(B) < 1. \tag{4}$$

Однако это условие для сходимости последовательных приближений оказывается только достаточным [3; 4]. Действительно, последовательные приближения (2) для уравнения (1) будут сходиться к решению и в том случае, когда ряд Неймана (3) оказывается сходящимся сильно! Естественно, возникает вопрос об условиях сильной сходимости ряда Неймана (3). Почти очевидно, что необходимым условием такой сходимости является близкое (4) неравенство

$$\rho(B) \le 1.$$

Но это условие не является достаточным (см. [3; 4]).

Нас будет интересовать случай, когда

$$\rho(B) = 1$$

(в случае $\rho(B) < 1$ ряд Неймана сходится по норме). Более точно, в этой работе описываются необходимые и достаточные условия на оператор *B*, при выполнении которых ряд Неймана (3) сходится сильно и затем, на основе этих условий, приводятся некоторые оценки погрешностей для соответствующих последовательных приближений.

Будем говорить, что действующий в банаховом пространстве *X* оператор *B* является *регулярным*, если последовательность итераций (B^n) оператора *B* является сильно сходящейся. Как нетрудно видеть, (сильный) предел этой последовательности, если он существует, является непрерывным оператором *P* в пространстве *X*; более того, оператор *P* является коммутирующим с *B* оператором проектирования на множество Fix *B* неподвижных точек оператора *B*; дополнительный проектор $Q = I - P$ является оператором проектирования на инвариантное для *B* подпространство $X_0(B)$, на котором последовательность итераций (B^n) стремится к нулю. Регулярные операторы (под не очень удачным названием корректных) рассматривались по другому поводу в [5].

В работах [6–8] было показано, что для уравнений с регулярными операторами справедливы аналоги теоремы М. А. Красносельского, описывающей условия сходимости последовательных приближений для уравнений с самосопряженными операторами, и некоторых дополнений к ней, включая поведение приближенных последовательных приближений.

Для уравнений с регулярными операторами, как и для уравнений с самосопряженными, нормальными и обобщенно нормальными операторами, в общем случае не существует оценок погрешности последовательных приближений, равномерных относительно начальных условий x_0 и правых частей *f*. Оговорка «в общем случае» здесь существенна – для наиболее важного класса регулярных операторов – компактных регулярных операторов – такие оценки существуют. Связано это с тем, что для компактных корректных операторов сходимость последовательности итераций (B^n) является не только сильной сходимостью, но и сходимостью по норме.

Напомним, что спектр sp *B* действующего в *X* непрерывного линейного оператора *B* является непустым ограниченным замкнутым множеством комплексной плоскости *C*, расположенным в круге $D(B) = \{\lambda : |\lambda \le \rho(B)\}$ с центром в нуле и радиусом, равным спектральному радиусу $\rho(B)$ этого оператора. Множество $\mathrm{psp} = \mathrm{sp}B \cap \{\lambda \in C : |\lambda| = \rho(B)\}$ принято называть периферическим спектром оператора *B*. Если остальной спектр rsp *B* = sp *B* \ psp *B* лежит внутри круга $K(B)$, более того строго лежит внутри этого круга и расположен в круге с центром в нуле меньшего чем $\rho(B)$ радиуса $\theta(B)\rho(B)$ $(\theta(B) < 1)$. Операторы *B*, для которых описанная ситуация имеет место, принято называть *операторами со спектральным зазором*, а число $\theta(B)$ – *спектральным зазором* оператора *B*. Компактные регулярные операторы, очевидно, относятся к операторам со спектральным зазором; более общим является класс операторов, периферический спектр которых фредгольмов. Отметим, что неравенство $\theta(B) < 1$ означает по существу, что оператор *B* является оператором со спектральным зазором.

Т е о р е м а 1. *Пусть B – действующий в банаховом пространстве X непрерывный линейный оператор со спектральным зазором, причем* $\rho(B) = 1$. *Тогда он является регулярным, если его периферический спектр состоит только из одной точки* $\{1\}$: $\mathrm{psp}\, B = \{1\}$, *которая является точкой и соответствующее инвариантное подпространство совпадает с множеством* Fix *B неподвижных точек оператора B.*

Регулярный оператор B допускает представление $B = P + (I - P)B$, откуда следует

$$B^n = P + (I - P)B^n = P + ((I - P)B)^n.$$

Как нетрудно видеть, спектральный радиус $\rho((I - P)B)$ оператора $(I - P)B$ совпадает со спектральным зазором $\theta(B)$, и тем самым оказывается меньшим, чем 1. Это означает, что $\|((I - P)B)^n\| \to 0$ при $n \to \infty$, откуда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|B^n - P\| = 0,$$

или, более точно (см., напр., [9]), справедливость неравенств

$$\|B^n - P\| \le c(q)q^n \quad (n = 1, 2, \ldots),\ q \in (\theta(B), 1);$$

здесь $c(q)$ – некоторая постоянная, вообще говоря, стремящаяся к бесконечности при $q \to \theta(B)$. Более того, можно написать

$$\|B^n - P\| \le c_n, \quad c_n = \min_{\theta(B)<q<1} c(q)q^n \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

однако вычисление (и даже оценка) констант c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ является достаточно сложной задачей (см., напр., [9]).

Сделаем еще одно замечание. Из регулярности данного оператора B регулярность сопряженного оператора B^* не вытекает. Однако в условиях теоремы 1 регулярность операторов B и B^* эквивалентна. Отметим также, что из регулярности обоих операторов B и B^* не вытекает, что последовательности их итераций сходятся по норме.

Пусть B – действующий в банаховом пространстве X непрерывный линейный оператор. Будем предполагать, что оператор B регулярный

$$\lim_{n\to\infty} \|B^n x - Px\|_X = 0 \quad (x \in X)$$

и, более того, имеет единичный спектральный радиус $\rho(B) = 1$.

Банахово пространство X_0, непрерывно вложенное в пространство X называется *униформизирующим оператор B изнутри,* если последовательность (B^n) итераций оператора B, как операторов из X_0 в X, сходится к оператору P по норме

$$\lim_{n\to\infty} \|B^n x - Px\|_{L(X_0, X)} = 0 \quad (x \in X).$$

Нетрудно видеть, что пространство X_0 униформизирует оператор B изнутри, если пространство X_0 компактно вложено в пространство X. Обратное неверно.

Банахово пространство X^0, в которое непрерывно вложено пространство X, называется *униформизирующим оператор B снаружи*, если последовательность (B^n) итераций оператора B, как операторов из X в X^0, сходится к

$$\lim_{n\to\infty} \|B^n x - Px\|_{L(X, X^0)} = 0 \quad (x \in X).$$

Нетрудно видеть, что пространство X^0 униформизирует оператор B снаружи, если пространство X компактно вложено в пространство X^0. Обратное неверно.

В качестве примера оператора, для которого можно просто строить униформизирующие изнутри и снаружи пространства, рассмотрим действующий в пространстве $X = L_p([0,1])$ $(1 \le p < \infty)$ оператор $Bx(t) = tx(t)$; этот оператор, очевидно регулярен ($\|B^n x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in X$) и для него $\rho(B) = 1$. Очевидно, $B^n x(t) = t^n x(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и поэтому $\|B^n\| = 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Нетрудно видеть, что при $p < p^+ \le \infty$ пространство L_{p^+} униформизирует оператор B изнутри, а при $p < p^- \le \infty$ пространство L_{p^-} униформизирует оператор B снаружи.

Пусть теперь

$$X_0 = \left\{ x(t) \in X : \frac{x(t)}{1-t} \in X \right\}, \quad \|x\|_0 = \left(\int_0^1 \left| \frac{x(t)}{1-t} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Пространство X_0 непрерывно, но не компактно вложено в пространство X. Однако оно регуляризирует оператор B изнутри в пространстве X.

Действительно,

$$\left\|B^n x(t)\right\| = \left\|t^n x(t)\right\| = \left\|(1-t)t^n \frac{x(t)}{1-t}\right\| \le \left(\max_{0\le t\le 1}(1-t)t^n\right)\left\|\frac{x(t)}{1-t}\right\| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \|x\|_0 \quad (x\in X_0),$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|B^n - P\right\|_{L(X_0,X)} = 0.$

Пусть, наконец,

$$X^0 = \left\{x(t)\in X : (1-t)\left|x(t)\right| \in X\right\}, \quad \|x\|^0 = \left(\int_0^1 \left|(1-t)x(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Пространство X непрерывно, но не компактно вложено в пространство X^0. Однако оно униформизирует оператор B снаружи в пространстве X.

Действительно,

$$\left\|B^n x(t)\right\|^0 = \left\|t^n x(t)\right\|^0 = \left\|(1-t)t^n x(t)\right\| \le \left(\max_{0\le t\le 1}(1-t)t^n\right)\left\|x(t)\right\| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \|x\| \quad (x\in X),$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|B^n - P\right\|_{L(X,X^0)} = 0.$

Отметим, что в случае пространства $X = L_\infty([0,1])$ оператор $Bx(t) = tx(t)$ не является регулярным, так как уже последовательность $B^n 1(t) = t^n$ ($1(\cdot)$ – функция, тождественно равная на $[0,1]$ единице) не является сходящейся (по норме). Однако и для этого случая последовательности норм ($\left\|B^n\right\|_{L(X_0,X)}$) в случае пространства X_0, определенного равенством (5), и норм ($\left\|B^n\right\|_{L(X,X^0)}$) в случае пространства X^0, определенного равенством (6), сходятся к нулю.

Приведенные определения приводят к следующему утверждению о сходимости последовательных приближений для линейного уравнения II рода в критическом случае.

Т е о р е м а 2. *Пусть B – непрерывный регулярный линейный оператор в банаховом пространстве X, и $\rho(B) = 1$. Тогда для уравнения (1) в случае его разрешимости для последовательных приближений (2) справедливы оценки*

$$\left\|x_n - x_*\right\| \le \gamma_n \left\|x_0 - x_*\right\|_0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\left\|x_n - x_*\right\|^0 \le \gamma^n \left\|x_0 - x_*\right\| \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $X_0 \subset X$ – произвольное регуляризирующее изнутри оператор B, $X^0 \supset X$ – произвольное регуляризирующее изнутри оператор B, и

$$\gamma_n = \left\|B^n - P\right\|_{L(X_0,X)}, \quad \gamma^n = \left\|B^n - P\right\|_{L(X,X^0)}.$$

Следует сделать еще одно замечание. Теорема 2 очевидным образом распространяется на действующие в банаховом пространстве X операторы B, нормы итераций которых ограничены, и, кроме того, итерации $B^n x$ сходятся слабо (и для которых, конечно, $\rho(B) = 1$). Примером такого оператора может служить рассмотренный выше оператор $Bx(t) = tx(t)$ в пространстве $L_\infty([0,1])$ – для него, как отмечено выше пространства X_0 и X^0, определенные равенствами (5) и (6), являются униформизирующими изнутри и снаружи.

Рассмотрим теперь вместо точных приближений (2) приближенные приближения

$$\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + f_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

возникающие из-за того, что на каждом шаге делается ошибка $f_n - f$ и пусть (δ_n) – последовательность величин этих ошибок. Естественно считать, что последовательность (δ_n) ограничена, т. е. $(\delta_n) \in l_\infty$, но для некоторых приложений можно предполагать, что эта последовательность принадлежит к подпространству λ пространства l_∞, например, c_0 или l_p $(1 \le p < \infty)$. Из очевидных равенств

$$\tilde{x}_n = B^n x_0 + B^{n-1} f_1 + \ldots + Bf_n + f, \quad x_n = B^n x_0 + B^{n-1} f + \ldots + Bf + f$$

вытекает, что

$$\tilde{x}_n - x_n = B^{n-1}(f_1 - f) + \ldots + B(f_{n-1} - f) + (f_1 - f),$$

далее,

$$\left\|\tilde{x}_n - x_n\right\| \le \left\|B^{n-1}\right\|\delta_1 + \ldots + \left\|B\right\|\delta_{n-1} + \delta_n,$$

и, наконец,

$$\left\|\tilde{x}_n - x_n\right\| \le \mu(B)(\delta_1 + \ldots + \delta_{n-1} + \delta_n),$$

где $\mu(B) = \sup\limits_{1 \le n < \infty} \left\|B^n\right\|$. Из последнего неравенства следует

$$\left\|\tilde{x}_n - x_n\right\| \le \mu(B)\omega_n(\lambda)\left\|\delta_n\right\|_\lambda,$$

где $\omega_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – нормы функционалов на пространстве λ, определенных равенствами $l_n((\delta_n)) = \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1} + \delta_n$.

Если оператор B регулярный и уравнение (1) разрешимо, то последовательные приближения (2) сходятся к решению x_* уравнения (1), для которого $Px_* = Px_0$. Поэтому для приближенных последовательных приближений (7) справедливы неравенства

$$\left\|\tilde{x}_n - x_n\right\| \le \left\|x_n - x_*\right\| + \mu(B)\omega_n(\lambda)\left\|\delta_n\right\|_\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Из этих неравенств сходимость приближенных последовательных приближений (7) к точному решению x_* уравнения (1) не вытекает! Действительно, правая часть этого неравенства при $n \to \infty$ стремится, вообще говоря, к бесконечности. Однако, так как

$$\lim_{\delta \to 0} \inf_{n \le \nu < \infty} \left\|x_n - x_*\right\| + \mu(B)\omega_n(\lambda)\left\|\delta_n\right\|_\lambda \quad (n \in N),$$

то из (8) следует, что

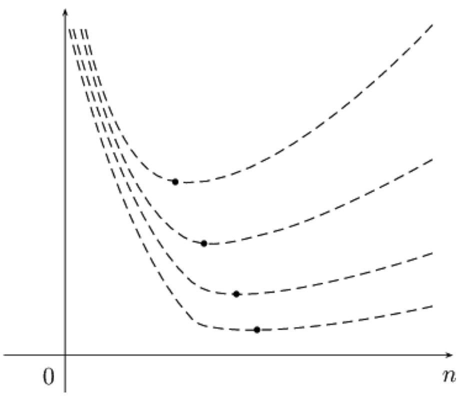
$$\lim_{\delta \to 0} \inf_{n \le \nu < \infty} \left\|\tilde{x}_\nu - x_*\right\| \quad (n \in N). \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что приближенные последовательные приближения $\tilde{x}_n$ подходят при больших, но не слишком больших, n достаточно близко (и даже, если брать сколь угодно малые δ, сколь угодно близко!) к точному решению x_* уравнения (1). Этот факт и называется обычно сходимостью итерационных методов в случае некорректных задач (рассматриваемая в этом разделе задача является примером такой некорректной задачи). Нам удобнее говорить, что в случае справедливости равенства (9) итерационный метод *квазисходится*. Верна

Т е о р е м а 3. *Пусть B – непрерывный регулярный линейный оператор в банаховом пространстве B, $\rho(B) = 1$ и пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда «приближенные» последовательные приближения (7) квазисходятся к точному решению x_*.*

Рисунок ниже изображает графики функции $\frac{1}{n} + \mu_n$ при различных δ, иллюстрирующих поведения величин $\left\|\tilde{x}_n - x_*\right\|$ при увеличении n.

В заключение приведем формулы для $\omega_n(\lambda)$ для случая, когда пространство λ является пространством



$$l_{p,\theta}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left|\xi_n\right|^p < \infty\right\},$$

$$\left\|\xi\right\|_\lambda = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left|\xi_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

здесь $1 \le p \le \infty$, а $\theta = (\theta_n)$ – последовательность положительных чисел (это пространство содержится в l_∞, если и только если $\theta^{-1} = (\theta_1^{-1}, \theta_2^{-1}, \ldots, \theta_n^{-1}, \ldots) \in l_\infty$. Несложный подсчет показывает, что при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\omega_n(\lambda) = \left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \quad (1 < p \le \infty), \qquad \omega_n(\lambda) = \max_{1\le k\le n} \frac{1}{\theta_k} \quad (p = 1).$$

Список использованных источников

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
2. Приближенные методы решения операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
3. Koliha, J. J. Power convergence and pseudoinverses of operators in Banach spaces / J. J. Koliha // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1974. – Vol. 48, Issue 2. – P. 446–469. doi.org/10.1016/0022-247x(74)90170-x.
4. Забрейко, П. П. Об области сходимости метода последовательных приближений для линейных уравнений / П. П. Забрейко // Докл. АН БССР. – 1985. – № 3. – С. 201–204.
5. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D. A. Klyushin [et al.]. – New York: Springer, 2012. – 202 p. doi.org/10.1007/978-1-4614-0619-8.
6. Забрейко, П. П. Об обобщении теоремы М. А. Красносельского на несамосопряжённые операторы / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 16–21.
7. Забрейко, П. П. Сходимость последовательных приближений для уравнений с нормальными операторами / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 5–10.
8. Забрейко, П. П. О корректности некоторых классов несамосопряженных операторов / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 35–42.
9. Zabrejko, P. P. Error estimates for successive approximations and spectral properties of linear operators / P. P. Zabrejko // Numerical Functional Analysis and Applications. – 1990. – N 7–8. – P. 823–838. doi.org/10.1080/01630569008816404.

References

1. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 752 p. (in Russian)
2. Krasnoselski M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stecenko V. Ya. *Approximate methods for solution of operator equations*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 456 p. (in Russian)
3. Koliha J. J. Power convergence and pseudoinverses of operators in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1974, vol. 48, no. 2, pp. 446–469. doi.org/10.1016/0022-247x(74)90170-x.
4. Zabreiko P. P. Convergence domain of the step-by-step approach for linear equations. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR], 1985, no. 3, pp. 201–204. (in Russian)
5. Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Yu. I., Semenov V. V. *Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements*. New York, Springer, 2012. 202 p. doi.org/10.1007/978-1-4614-0619-8.
6. Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. M. A. Krasnoselsky's theorem generalization to non self-conjugate operators. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 2, pp. 16–21. (in Russian)
7. Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Convergence of successive approximations for equations with normal operator. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2015, vol. 59, no. 4, pp. 5–10. (in Russian)
8. Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Correctness of some classes of non self-adjoint operators. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 3, pp. 35–42. (in Russian)
9. Zabrejko P. P. Error estimates for successive approximations and spectral properties of linear operators. *Numerical Functional Analysis and Applications*, 1990, no. 7–8, pp. 823–838. doi.org/10.1080/01630569008816404.

Информация об авторах

Забрейко Петр Петрович – д-р физ.-мат. наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zabreiko@mail.ru.

Михайлов Артём Викторович – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artostby@mail.ru.

Information about the authors

Zabreiko Petr Petrovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zabreiko@mail.ru.

Mikhailov Artem Viktorovich – Postgraduate student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artostby@mail.ru.

Для цитирования

Забрейко, П. П. Квалифицированные оценки погрешности последовательных приближений в теории некорректных линейных задач / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 18–23.

For citation

Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Qualified error estimates of successive approximations in theory of ill-posed linear problems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 18–23. (in Russian)