ISSN 0002–354X (print)
УДК 517.5

Поступило в редакцию 24.11.2016
Received 24.11.2016

Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко[3]

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ ЧЕБЫШЕВА–МАРКОВА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Рациональные дроби Чебышева–Маркова обладают рядом замечательных свойств и являются одним из основных и, безусловно, важных элементов в теории приближения функций. Дроби Чебышева–Маркова являются неотъемлемым аппаратом для построения интерполяционных рациональных функций и квадратурных формул. Однако в контексте ортогональных рядов Фурье они не использовались, поскольку в общем случае свойством ортогональности они не обладают.

В настоящей работе рассматривается система рациональных дробей Чебышева–Маркова при специальном выборе определяющих ее параметров. В первой части настоящего сообщения проводится построение элементов системы, указываются некоторые их представления и доказывается, что существует вес, при котором исследуемая система является ортогональной на отрезке $[-1, 1]$. Во второй части работы производится построение интеграла Дирихле. В третьей части найдены в явном виде коэффициенты в разложении в ряд Фурье функции $|x|$ по рассматриваемой системе. В четвертой исследуется оценка приближения функции $|x|$ посредством частичных сумм ее ряда Фурье. Доказана, в частности, ее точность. В заключительной части получена асимптотическая оценка приближения частичными суммами в целом на отрезке и в случае, когда приближение осуществляется вне особой точки. Найдены точные константы этих оценок.

Ключевые слова: рациональные дроби Чебышева–Маркова, ортогональность, ряды Фурье, интеграл Дирихле, оценка приближения частичными суммами, асимптотика и метод Лапласа, точные константы.

Y. A. Rovba, P. G. Potsejko

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ABOUT ONE SYSTEM OF THE CHEBYSHEV–MARKOV RATIONAL FRACTIONS

(Communicated by Academician I. V. Gaishun)

The Chebyshev–Markov rational fractions have a number of remarkable properties and are one of the main and, certainly, important elements in the theory of approximation of functions. The Chebyshev–Markov fractions are the integrant apparatus for creation of interpolation rational functions and quadrature formulas. However in the context of the orthogonal Fourier series they are not used as generally they have no property of orthogonality.

The present article considers the system of the Chebyshev–Markov rational fractions with a special choice of the parameters for its definition. In the first part of the present article, the elements of the system are created, some of their representations are specified, and it is proved that there is a weight, at which the studied system is orthogonal on a piece $[-1, 1]$. In the second part of the work, the Dirichlet integral is created. In the third part of the present article, the coefficients of the Fourier series expansion of the function $|x|$ in the considered system are found in explicit form. In the fourth part, the estimate of the function $|x|$ by means of the partial sums of its Fourier series is investigated. In particular, its accuracy is proved. In the closing part, the asymptotic estimate of the approximation by the partial sums on a piece is obtained as a whole and when the approximation is carried out outside a singular point. Precise constants of these estimates are found.

Keywords: Chebyshev–Markov's rational fractions, orthogonality, Fourier series, Dirichlet integral, evaluation of approximation by partial sums, asymptotic and Laplas method, exact constants.

Введение. В монографии [1] А. А. Марков решает экстремальную задачу о дробях с фиксированным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[-1, 1]$, в случаях, когда этот знаменатель представляет собой многочлен или квадратный корень из многочлена, нули которого не принадлежат этому отрезку. Найденные им рациональные дроби, решающие поставленную задачу, в общем случае не являются ортогональными. Однако они обладают рядом других свойств, которыми обладают классические полиномы Чебышева. В этой работе А. А. Маркова помимо прочих результатов содержится принцип построения экстремальных рациональных дробей на основании выбора $2n$ параметров, которые являются в дальнейшем «инверсионными» полюсами.

В настоящей работе исследуется система рациональных дробей Чебышева–Маркова, полученная специальным подбором определяющих ее параметров. Как оказывается, возможно построение системы дробей Чебышева–Маркова, обладающих свойством ортогональности по весу, близкому к классическому чебышевскому. Вводятся ряды Фурье по рассматриваемой системе рациональных функций и исследуются их аппроксимационные свойства. Найден в явном виде такой ряд Фурье для функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ и получена асимптотическая оценка приближений этой функции частичными суммами ее ряда Фурье.

1. Ортогональная система рациональных дробей Чебышева–Маркова на отрезке. Пусть задано множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k|<1$, либо попарно комплексно сопряженными.

Следуя [1] определим углы

$$\cos\varphi_k=\frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_kx}},\quad \sin\varphi_k=\frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_kx}},\quad k=1,\ldots,2n, \tag{1}$$

и рассмотрим сумму

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{2n}\varphi_k(x),\quad x\in[-1,1].$$

Тогда функция $\cos\Phi_n(x)$ и является рациональной косинус-дробью Чебышева–Маркова, см. [1]. Будем рассматривать случай, когда параметры a_k, $k=1,2,...,2n$, удовлетворяют следующим условиям:

$$a_k=ia,\quad k=1,\ldots,n;\quad a_k=-ia,\quad k=n+1,\ldots,2n. \tag{2}$$

Учитывая (1) и (2), путем несложных алгебраических преобразований нетрудно получить, что

$$\Phi_n(x)=n\arccos\left(x\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right),\quad n=0,1,\ldots.$$

Тогда алгебраическая косинус-дробь Чебышева–Маркова на отрезке $[-1, 1]$ с двумя комплексно-сопряженными полюсами имеет вид

$$M_n(x)=\cos\Phi_n(x)=\cos n\arccos\left(x\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right), x\in[-1,1], n=0,1,\ldots. \tag{3}$$

Отметим, при $a = 0$ функции $M_n(x)$ представляют собой классические полиномы Чебышева первого рода.

Л е м м а 1. *Для косинус-дробей Чебышева–Маркова $M_n(x)$ справедливо представление*

$$M_n(x)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{1+a^2}x+i\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{1+a^2}x-i\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)^n\right),\quad n=0,1,\ldots.$$

С помощью соответствующей замены переменной нетрудно получить еще одно представление для рассматриваемых функций

$$M_n(\cos u)=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2\xi^2}{\xi^2+\alpha^2}}\right)^n\right),\quad \xi=e^{iu}, \alpha=\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a}.$$

Как известно, система полиномов Чебышева первого рода является ортогональной на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$. Схожим свойством обладают и рациональные дроби Чебышева–Маркова (3). А именно, имеет место

Т е о р е м а 1. *Система рациональных дробей Чебышева–Маркова $M_n(x), n=0,1,2,...,$ является ортогональной на отрезке* $[-1, 1]$ *с весом*

$$\rho(x,a)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1, \tag{4}$$

т. е.

$$\int_{-1}^{1} M_n(x)M_m(x)\rho(x,a)dx=\begin{cases}0, & m\neq n, \quad m,n=0,1,2,\ldots;\\ \pi/2, & m=n, \quad m,n=1,2,\ldots;\\ \pi, & m=n=0.\end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. *Как нетрудно усмотреть, положив в выражении (4)* $a = 0$, *получим вес классической системы полиномов Чебышева первого рода.*

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема с весом (4) на отрезке [–1, 1], т. е. существует интеграл

$$\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\rho(x,a)dx.$$

Поставим ей в соответствие ряд Фурье по системе ортогональных с весом (4) рациональных функций Чебышева–Маркова (3)

$$f(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_nM_n(x), \tag{5}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(x,a)f(x)M_k(x)dx,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Естественно предположить, что такие ряды обладают свойствами, похожими на свойства полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

2. Частичная сумма ряда Фурье–Чебышева по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова и ее интеграл Дирихле. Пусть

$$S_n(x,f)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}c_kM_k(x)$$

есть частичная сумма ряда Фурье (5).

Т е о р е м а 2. *Для частичных сумм рядов Фурье по системе (3) справедливо представление*

$$S_n(x,f)=\frac{1-\alpha^4}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda(u,v)}{\sin\frac{\lambda(u,v)}{2}}\frac{dv}{1+2\alpha^2\cos 2v+\alpha^4}, \tag{6}$$

где

$$\lambda(u,v)=\int_u^v\frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2y+\alpha^4}dy,\quad \alpha=\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a},$$

причем оператор $S_n: f\to\mathbb{R}_n$, *где* $\mathbb{R}_n$ *– множество рациональных функций вида* $p_n(x)/(\sqrt{1+a^2x^2})^n$, $p_n(x)\in \mathrm{P}_n$, *определяемый с помощью формулы (6) является точным на константах.*

З а м е ч а н и е 2. *Положив в (6)* $\alpha=0$, *имеем что*

$$S_n(x,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(v-u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,$$

т. е. $S_n(x,f)$ представляет собой интеграл Дирихле классической тригонометрической системы для функции $f(\cos u)$.

Приведем еще один результат в этом направлении.

Т е о р е м а 3. *Справедливо следующее представление для частичных сумм ряда Фурье (5) по системе рациональных дробей*

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f\left(\frac{\cos(\theta+2\tau)}{\sqrt{1+a^2\sin^2(\theta+2\tau)}}\right)+f\left(\frac{\cos(\theta-2\tau)}{\sqrt{1+a^2\sin^2(\theta-2\tau)}}\right)\right]\frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin\tau}d\tau, \qquad (7)$$

где

$$\theta=\arccos x\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}. \qquad (8)$$

Важным отличием формулы (7) от (6) является то, что ядро Дирихле уже не зависит от параметра a, т. е. частичная сумма ряда Фурье полностью зависит от поведения функции, которой ставится в соответствие ее ряд Фурье. Но подчеркнем, что этот параметр содержится в выражении новой сложной функции под знаком интеграла.

3. Разложение в ряд Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова функции $|x|$.

Актуальным вопросом теории приближений является построение рядов Фурье по ортонормальным системам рациональных функций для элементарных функций. В настоящей работе мы решаем такую задачу для функции $|x|$, т. е. получим разложение в ряд Фурье по системе (3) для функции $f(x)=|x|$, $x\in[-1;1]$.

Т е о р е м а 4. *Справедливо представление*

$$|x|=\frac{c_0}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}c_{2m}M_{2m}(x), \quad x\in[-1,1], \qquad (9)$$

где

$$c_0=\frac{4}{\pi a}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right), \qquad (10)$$

$$c_{2m}=\frac{2}{\pi}\frac{1-\alpha^4}{\alpha^{2m}}\left(\frac{1+\alpha^2}{4\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{1-(-1)^m\alpha^{2m}}{2m(1+\alpha^2)}+\right.$$

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-1)^jC_{m-1}^j(1-\alpha^4)^j}{2j+1}\left(1-(1-\alpha^2)\frac{2j+1}{2j+2}\right)\sum_{\nu=1}^{j}\frac{A_{\nu j}}{(1-\alpha^2)^{j+1-\nu}}+ \qquad (11)$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^jC_{m-1}^j(1-\alpha^4)^j\left(1-(1-\alpha^2)\frac{2j+1}{2j+2}\right)\frac{(2j-1)!!}{2^{j+1}j!}\right),$$

$$A_{\nu j}=\frac{(2j+1)(2j-1)(2j-3)...(2j-2\nu+3)}{2^\nu j(j-1)...(j+1-\nu)}, \quad \nu=\overline{1,j}, \quad j=\overline{1,m-1}, \quad m=1,2,\ldots.$$

Формула (10) получена непосредственным интегрированием, а формулы (11) – с помощью теории функций комплексного переменного и некоторых результатов из [2].

В результате получим ряд Фурье функции $|x|$ по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова (3)

$$|x|\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}c_{2m}\,\mathrm{M}_{2m}(x),$$

где c_{2m}, $m=0,1,...$, вычисляются по формулам (10) и (11). Для того чтобы в найденном выражении поставить знак равенства, т. е. получить именно формулу (9), выполним замену (8). Тогда будем иметь

$$\frac{|\cos\theta|}{\sqrt{1+a^2\sin^2\theta}}\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}c_{2m}\cos 2m\theta, \quad \theta\in\mathbb{R}. \qquad (12)$$

Ряд, стоящий справа, является сходящимся как тригонометрический ряд Фурье кусочно дифференцируемой функции

$$f(\theta)=\frac{|\cos\theta|}{\sqrt{1+a^2\sin^2\theta}}, \quad \theta\in\mathbb{R},$$

т. е. справедливо равенство (9).

Если в соотношении (12) выполнить замену $\theta = \arccos x$, то получим ряд Фурье–Чебышева

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+a^2-a^2x^2}} = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} c_{2m}T_{2m}(x),\ x\in[-1,1]. \tag{13}$$

Заменив в соотношении (12) $\theta \sim \pi/2-\theta$, найдем

$$\frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1+a^2\cos^2\theta}} = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m c_{2m}\cos 2m\theta,$$

и опять же, подставляя $\theta = \arccos x$, придем к равенству

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}} = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m c_{2m}T_{2m}(x),\ x\in[-1,1]. \tag{14}$$

Ряды (13) и (14) представляют, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

4. О приближении функции $|x|$ рядами Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова.

Выше было получено разложение в ряд Фурье по системе рациональных дробей (3) на отрезке [–1, 1] функции $|x|$. Естественным продолжением исследования в этом направлении является нахождение порядковой оценки приближения функции $|x|$ найденными частичными суммами.

Рассмотрим частичную сумму ряда (9) порядка $2n$, т. е. выражение вида

$$s_{2n}(x,|x|) = s_{2n}(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n} c_k M_k(x),\quad x\in[-1,1].$$

Положим

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = |x| - s_{2n}(x),\quad x\in[-1,1],$$
$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \big\|\, |x| - s_{2n}(x)\, \big\|_{C[-1,1]}.$$

Справедлива

Т е о р е м а 5. *Для оценки приближений функции $|x|$ на отрезке* [–1, 1] *частичными суммами ряда Фурье (9) по системе рациональных дробей (3) имеют место соотношения*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)| \le \frac{2\sqrt{1+2\alpha^2\cos 2v+\alpha^4}}{\pi}\int_0^1 \frac{(1-t^2)\left|\chi^*_{2n}(t)\right|dt}{\sqrt{1+2t^2\cos 2v+t^4}\,(1-t^2\alpha^2)},\quad x=\cos v,\quad x\in[-1,1], \tag{15}$$

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \frac{2(1-\alpha^2)}{\pi}\int_0^1 \frac{\left|\chi^*_{2n}(t)\right|}{1-t^2\alpha^2}dt,\quad n=0,1,\ldots. \tag{16}$$

где

$$\chi^*_{2n}(t) = \left(\frac{t^2-\alpha^2}{1-\alpha^2t^2}\right)^n.$$

Неравенство (15) является точным. Равенство достигается при $x = 0$.

Заметим, что переходя к классическому полиномиальному случаю и положив $\alpha = 0$, из (15) и (16) соответственно будем иметь

$$|\varepsilon_{2n}(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1+2t^2\cos 2v+t^4}}t^{2n}dt,\quad x\in[-1,1],$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 t^{2n}dt = \frac{2}{\pi(2n+1)},\quad n=0,1,\ldots.$$

Отметим, что подобный порядковый результат при исследовании приближения функции $|x|$ классическими полиномами Чебышева первого рода содержится в [3].

5. Об асимптотической оценке уклонения от функции $|x|$ частичной суммы ее ряда Фурье. В пункте 4 была доказана теорема, которая описывает уклонение от функций $|x|, -1\le x\le 1$, ее частичных сумм ряда Фурье по системе рациональных дробей (3). Изучим асимптотические свойства уклонений (15) и (16) при $n\to\infty$.

Положим

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{\alpha} \varepsilon_{2n}(\alpha),$$

где $\varepsilon_{2n}(\alpha)$ из (16).

Т е о р е м а 6. *Справедливы соотношения*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\ln n}\varepsilon_{2n} = \dfrac{1}{\pi}$;

2. $\inf\limits_{\alpha} \left|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)\right| \le \dfrac{1}{\pi|x|}\dfrac{\ln n}{n^3}, \quad \forall x \in [-1,0) \cup (0,1], \quad n \to \infty.$ (17)

Заметим, что из неравенства (15) следует

$$\left|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)\right| \le \frac{2(1+\alpha^2)}{\pi|\cos v|}\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-t^2\alpha^2}\left|\chi_{2n}^*(t)\right|dt, \quad x = \cos v, \quad \forall x \in [-1,0) \cup (0,1].$$

Далее оба соотношения теоремы 6 получены с помощью асимптотических методов, аналогичных методам, применяемым в [4–7].

Интересно заметить, что приближения частичными суммами рядов Фурье вне особой точки $x = 0$, см. (17) оказывается на порядок лучше, чем в целом на отрезке [–1, 1].

Заключение. Построена ортогональная на отрезке система алгебраических дробей Чебышева–Маркова. Показано, что ряды Фурье по этой системе обладают, с одной стороны, свойствами подобно полиномиальным рядам Фурье–Чебышева, а с другой стороны, отражают особенности рациональной аппроксимации.

Список использованных источников

1. Марков, А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля / А. А. Марков. – М.; Л., 1948. – 411 с.
2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М., 1963. – 1100 с.
3. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л., 1949. – 684 с.
4. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. Федорюк, М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
6. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М.: Наука, 1984. – Ч. II. – 640 с.
7. Ровба, Е. А. Константы в приближении функции $|x|$ интерполяционными рациональными процессами / Е. А. Ровба, Е. Г. Микулич // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 11–15.

References

1. Markov A. A. *Selected works on the theory of continued fractions and the theory of functions least deviating from zero*. Moscow, Leningrad, 1948. 411 p.
2. Gradshtejn I. S., Ryzhyk I. M. *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow, 1963. 1100 p. (in Russian)
3. Natanson I. P. *Constructive theory of functions*. Moscow, Leningrad, 1949. 684 p. (in Russian)
4. Evgrafov M. A. *Asymptotic estimates and entire functions*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian)
5. Fedorjuk M. V. *Asymptotics. Integrals and Series*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 544 p. (in Russian)
6. Zorich V. A. *Mathematical analysis*. Part II. Moscow, Nauka Publ., 1984. 640 p. (in Russian)
7. Rovba E. A., Mikulich E. G. Constants in the approximation of $|x|$ using the rational interpolation processes. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2009, vol. 53, no. 6, pp. 11–15 (in Russian)

Информация об авторах

Ровба Евгений Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой, Гродненский государственный университет имени Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Поцейко Павел Геннадьевич – соискатель, старший преподаватель, Гродненский государственный университет имени Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com.

Information about the authors

Rovba Evgenij Alekseevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Potsejko Pavel Gennadjevich – Postgraduate student, Senior lecturer, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com.

Для цитирования

Ровба, Е. А. Об одной системе рациональных дробей Чебышева–Маркова / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 24–29.

For citation

Rovba Y. A., Potsejko P. G. About one system of the Chebyshev–Markov rational fractions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 24–29. (in Russian)