ISSN 0002–354X (print)
УДК 517.984

Поступило в редакцию 26.12.2016
Received 26.12.2016

А. Б. Антоневич, Али А. Шукур

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ОЦЕНКИ НОРМ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОВОРОТОМ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

В работе рассмотрены операторы взвешенного сдвига, порожденные иррациональными поворотами. Получено описание поведения норм степеней таких операторов в зависимости от свойств коэффициента и арифметических свойств иррационального числа, задающего угол поворота.

Ключевые слова: нормы степеней оператора, оператор взвешенного сдвига, порожденный поворотом окружности, гомологическое уравнение.

A. B. Antonevich, Ali A. Shukur

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ESTIMATIONS OF THE NORM OF THE POWERS OF THE OPERATOR GENERATED BY IRRATIONAL ROTATION

(Communicated by Corresponding Member V. V. Gorokhovik)

In this article we consider weighted shift operators generated by irrational rotation. The descreption of the norm of the powers of those operators depending on the properties of the cofficients of the mentioned operators and on the arithmeticals properties of the irrational number yielding an angle of rotation is given.

Keywords: norm of powers of operator, weighted shift operator generated by rotation, homological equation.

Введение. Пусть T – линейный ограниченный оператор. В работе рассматривается вопрос о поведении последовательности норм $\|T^n\|$. Это вопрос связан с исследованием поведения резольвенты оператора. Пусть $R(T)$ – спектральный радиус оператора T. При $|\lambda| > R(T)$ резольвента $R(T;\lambda) = (T-\lambda I)^{-1}$ задается в виде суммы ряда по степеням $\frac{1}{\lambda}$:

$$(T-\lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n,$$

откуда следует оценка резольвенты сверху

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \le \varphi_T\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

где

$$\varphi_T(z) = \sum_{0}^{\infty} \|T^{n-1}\| z^n$$

есть функция, аналитическая при $|z| < \frac{1}{R(T)}$.

Поэтому поведение резольвенты в значительной мере определяется последовательностью $\|T^n\|$. Согласно формуле Гельфанда

$$R(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}, \tag{1}$$

откуда следует, что

$$\ln \| T^n \| = n \ln R(T) + \gamma_n,$$

где $\dfrac{\gamma_n}{n} \to 0.$

Иначе говоря, главным членом асимптотики последовательности $\ln \| T^n \|$ является $n \ln R(T)$, а рассматриваемая задача о поведении последовательности $\| T^n \|$ заключается в получении оценок для второго члена асимптотики.

Известно, что для произвольных операторов последовательность γ_n / n может стремиться к нулю сколь угодно медленно. Поэтому для конкретных классов операторов представляет интерес получение информации о поведении такой последовательности.

Ниже мы рассматриваем один специальный класс операторов взвешенного сдвига. Напомним, что оператор T, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{F}(X)$ функций на множестве X, называется оператором взвешенного сдвига (ОВС) или оператором композиции с весом, если он может быть представлен в виде

$$aT_\alpha u(x) = a(x)u(\alpha(x)), \;\; x \in X,$$

где $\alpha : X \to X$ есть некоторое отображение и $a(x)$ есть заданная функция на X.

Заметим, что такие операторы, порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения изучались многими авторами в различных функциональных пространствах как самостоятельный объект и в связи с различными приложениями (см. [1]).

Если X есть окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$, то отображение $\alpha(x) = x + h$ порождает поворот окружности на угол $2\pi h$. Пространство $C(\mathbb{S}^1)$ непрерывных функций на окружности естественно изоморфно пространству $C_1(\mathbb{R})$ непрерывных функций, периодических с периодом 1. Ниже мы рассматриваем в $C_1(\mathbb{R})$ операторы сдвига

$$(T_h u)(x) = u(x + h)$$

и операторы взвешенного сдвига

$$(aT_h u)(x) = a(x)u(x + h),$$

где $a \in C_1(\mathbb{R})$, причем $a(x) \neq 0$ для всех x. Это один из наиболее популярных классов операторов взвешенного сдвига, но и для него обсуждаемые ниже вопросы не были исследованы.

Спектральный радиус оператора, порожденного поворотом окружности. Пусть $\varphi(x) = \ln | a(x) |$, $\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh)$. При любом h известно, что

$$\ln \| [aT_h]^n \| = \max_x \varphi_n(x) := \nu_n, \tag{2}$$

и задача заключается в исследовании поведения этой последовательности.

Если рациональное число $h = m / N$ представлено в виде несократимой дроби, то

$$\ln R(aT_h) = \max_x \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi\left(x + \frac{jm}{N} \right).$$

В силу взаимной простоты чисел m и N выражение в правой части не зависит от m, обозначим его $l_N(\varphi)$. Поскольку при фиксированном x число

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi\left(x + j\frac{1}{N} \right)$$

есть интегральная сумма Римана для φ, при $N \to \infty$ получаем, что

$$l_N(\varphi) \to \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

При $h = m / N$ поведение $\| [aT_{m/N}]^n \|$ описано в [2]. Из результатов [2] мы используем утверждение, что при фиксированной функции a для заданного N существует постоянная C_N, и что выполнено неравенство

$$n \ln l_N(\varphi) \le \ln \| [aT_{m/N}]^n \| \le n \ln l_N(\varphi) + C_N.$$

При иррациональных h формула спектрального радиуса получается из (1) и (2) на основе следующего утверждения.

Т е о р е м а Г. В е й л я [3]. *Если число h иррационально и* φ *– непрерывная функция с периодом* 1*, то последовательность средних равномерно сходится к постоянной:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh) = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Это утверждение есть одна из эргодических теорем, заметим, что оно было получено Г. Вейлем задолго до доказательства общих эргодических теорем (см. [4]). Из этой теоремы следует, что если h иррационально, то

$$\ln R(aT_h) = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Ниже без ограничения общности считаем, что

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \tag{3}$$

т. е. $R(aT_h) = 1, \ln R(aT_h) = 0$ и тогда $\ln \| [aT_h]^n \| := \gamma_n$ есть последовательность, такая, что $\gamma_n / n \to 0$. Эта последовательность описывает скорость сходимости в теореме Вейля.

Заметим, что вопросы о скорости сходимости в эргодических теоремах рассматривались, например, в [5–7].

Исследование поведения последовательности $\varphi_n(x)$ связано с гомологическим уравнением (см. [8–10])

$$u(x) - u(x+h) = \varphi(x) \tag{4}$$

и известной проблемой малых знаменателей.

Равенство (3) есть необходимое, но не достаточное условие разрешимости уравнения (4). Если последовательность $\varphi_n(x)$ сходится, то ее предел является решением гомологического уравнения. Однако это уравнение имеет сложную картину разрешимости. Еще Д. Гильберт приводил его в качестве примера, когда все данные в уравнении бесконечно дифференцируемы, а решение может быть разрывным [11, проблема № 5].

В дальнейшем было установлено, что такое уравнение может не иметь даже измеримых решений при бесконечно дифференцируемой функции φ. В частности, в [12, теорема 1] приведено следующее утверждение.

Т е о р е м а А. Г о р д о н а. *Если функция* φ *не является тригонометрическим многочленом, то существует h, при котором гомологическое уравнение (4) не имеет измеримых решений.*

Т е о р е м а 1.

а) Если выполнено (3) и функция $\varphi(x) = \ln |a(x)|$ *является тригонометрическим многочленом, то при любом иррациональном h и рациональном h с достаточно большим знаменателем спектральный радиус оператора* $R(aT_h) = 1$ *и последовательность* $\| [aT_h]^n \|$ *ограничены.*

б) Если функция $\varphi(x)$ *не является тригонометрическим полиномом, то существует последовательность рациональных чисел* h_k*, знаменатели которых стремятся к бесконечности, для которых* $R(aT_{h_k}) > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

а) Рассмотрим ряд Фурье

$$\varphi(x) \sim \sum_{k\ne 0} C_k e^{i2\pi kx}.$$

Ряд Фурье функции $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$\varphi_n(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh) \sim \sum_{k\ne 0} C_k \left[\sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi kh} \right] e^{i2\pi kx}.$$

Обозначим

$$\eta_{nk} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi kh}.$$

При иррациональном h получаем

$$\eta_{nk} = \frac{1-e^{i2\pi knh}}{1-e^{i2\pi kh}}. \tag{5}$$

Если h иррационально, то величины $1-e^{i2\pi kh}$ отличны от нуля, но при некоторых больших k они могут быть сколь угодно близкими к 0 (это так называемые малые знаменатели). Именно за счет этих малых знаменателей некоторые коэффициенты Фурье в разложении функции $\varphi_n(x)$ могут оказаться большими, что в общем случае может привести к быстрому росту величин $\ln \| [aT_h]^n \| = \max_x \varphi_n(x) := \nu_n$. Но если

$$\varphi(x) = \sum_{k\neq 0,\, |k|\leq m} C_k e^{i2\pi kx},$$

т. е. функция $\varphi(x)$ является тригонометрическим полиномом, то в ряд Фурье для $\varphi_n(x)$ также входит конечное число слагаемых и справедлива оценка

$$|\varphi_n(x)| \leq \sum_{k\neq 0,\, |k|\leq m} |C_k| \, |\eta_{nk}| \leq \sum_{k\neq 0,\, |k|\leq m} |C_k| \frac{2}{|1-e^{i2\pi kh}|}. \tag{6}$$

Эта оценка не зависит от n, откуда следует, что для любого иррационального h последовательность $\| [aT_h]^n \|$ ограничена, т. е.

$$\sup_{n\geq 0} \| [aT_h]^n \| \leq C.$$

Если $h = \frac{p}{N}$ и $N > m$, то числа η_{nk} задаются выражением (5) и также справедлива оценка (6).

б) Предположим противное. Тогда существует M, такое, что $R(aT_h) = 1$ для всех $h = \frac{1}{N}$ при $N > M$. Оператор $[aT_h]^N$ есть оператор умножения на функцию $\varphi_N(x)$, для такого оператора норма совпадает со спектральными радиусом. Поэтому максимум вещественной функции $\varphi_N(x)$ есть 0 и среднее значение есть 0. Отсюда получаем, что $\varphi_N(x) \equiv 0$. Значит, $C_k \eta_{Nk}(h) = 0$ для всех k. При $k = lN, l \in \mathbb{Z}$, получаем $\eta_{Nk} = N$ и следовательно $C_k = 0$ при всех представимых в виде $k = lN, l \in \mathbb{Z}$, при $N > M$. В частности, $C_N = 0$ при $N > M$, т. е. функции $\varphi(x)$ являются тригонометрическим полиномом.

Т е о р е м а 2. *Пусть задана произвольная последовательность* ω_n *такая, что* $\omega_n / n \to 0$. *Если выполнено (3) и функция* $\varphi(x) = \ln |a(x)|$ *не является тригонометрическим многочленом, то существует такое иррациональное число h, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} e^{-\omega_n} \| [aT_h]^n \| \geq 1.$$

Заметим, что эта теорема не является следствием теоремы А. Гордона, несмотря на похожую формулировку. Искомое иррациональное число h строится с помощью последовательности рациональных чисел из утверждения б) теоремы 1.

Из теоремы 2 следует, что содержательные оценки сверху для $\| [aT_h]^n \|$ могут иметь место только при дополнительных условиях на h и a. Приведем один из результатов в этом направлении. Пусть

$$\xi_n(h) = \min \left\{ \left| h - \frac{m}{N} \right| : m \in \mathbb{Z},\, N \leq n \right\}.$$

Так как h иррационально, минимум достигается только при одном значении m_n и $N_n \leq n$, т. е.

$$\xi_n(h) = \left| h - \frac{m_n}{N_n} \right|.$$

Как известно, для любого h

$$\xi_n(h) \le \frac{1}{n^2}. \tag{7}$$

При этом существуют числа, для которых последовательность $\xi_n(h)$ убывает сколь угодно быстро. Число h называется числом Лиувилля, если $\xi_n(h)$ убывает быстрее любой степени $\frac{1}{n}$. Но типичным свойством является медленное убывание такой последовательности. Точный смысл этому утверждению придается следующим образом. Пусть $\sigma \ge 0$ и

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{ h \in [0,1] : \exists C, \text{ что } \left| h - \frac{k}{n} \right| \ge \frac{C}{n^{2+\sigma}} \ \forall\, k, n \right\}.$$

Из неравенства (7) следует, что $A_0 = \varnothing$. Однако при любом $\sigma > 0$ почти все числа принадлежат $\mathcal{A}_\sigma$ – его дополнение имеет меру нуль [13; 14].

Т е о р е м а 3. *Если функция а дважды непрерывно дифференцируема и* $h \in \mathcal{A}_\sigma$ *при некотором* $\sigma > 0$, *то последовательность степеней оператора* aT_h *ограничена, т. е.*

$$\sup_{n\ge 0} \| [aT_h]^n \| \le C.$$

Из полученных теорем следует, что при гладких a типичным случаем является ограниченность последовательности $\| [aT_h]^n \|$. Но для исключительных значений h последовательность $\| [aT_h]^n \|$ может расти сколь угодно быстро.

Можно также показать, что даже если h медленно приближается рациональными числами, т. е. $h \in \mathcal{A}_\sigma$, то существуют непрерывные функции a, при которых нормы $\| [aT_h]^n \|$ быстро растут.

Список использованных источников

1. Antonevich, A. B. Linear functional equation. Operator approach / A. B. Antonevich. – Berlin: Birkhauser, 1996. – 187 p. doi.org/10.1007/978-3-0348-8977-3.

2. Шукур, Али А. Поведение норм степеней оператора, порожденного рациональным поворотом / Али А. Шукур // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2016. – № 2. – С. 110–115.

3. Вейль, Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика / Г. Вейль. – Москва: Наука, 1984. – 510 с.

4. Корнфельд, И. Эргодическая теория / И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. – Москва: Наука, 1980.– 384 с.

5. Качуровский, А. Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах Фон Неймана и Биркгофа / А. Качуровский, В. Седалищев // Матем. сб. – 2011. – Т. 202. – С. 21–40.

6. Tomilov, Y. A new way of constructing examples in operator ergodic theory / Y. Tomilov, Ja. Zemanek // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 2004. – Vol. 137. – P. 209–225. doi.org/10.1017/s0305004103007436.

7. Bermudez, T. Operators with an ergodic power / T. Bermudez, M. Gonzalez, M. Mbekhta // Studia Math. – 2000. – Vol. 141. – P. 201–208.

8. Гура, А. Гомологические уравнения и топологические свойства S^1-расширений над эргодическим поворотом окружности / А. Гура // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 3. – С. 463–470.

9. Аносов, Д. Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности / Д. Аносов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – Т. 37, вып. 6. – С. 1259–1274.

10. Теубе С. Мбаинаисем. О приводимости операторов взвешенной композиции / Теубе С. Мбаинаисем, Серинь А. Ло, Мусса О. А. Салем // Проблемы физ., матем. и техн. – 2015. – № 2(23). – С. 75–82.

11. Гильберт, Д. Проблемы Гильберта: сб. / Д. Гильберт; под общ. ред. П. С. Александрова. – Москва: Наука, 1969. – 240 с.

12. Гордон, А. Достаточное условие неразрешимости аддитивного функционального гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности / А. Гордон // Функциональный анализ и его прил. – 1975. – Т. 9, вып. 4. – С. 71–72.

13. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – Москва: Наука, 1967. – 375 с.

14. Шидловский, А. Трансцендентные числа / А. Шидловский. – Москва: Наука, 1987. – 448 с.

References

1. Antonevich A. B. *Linear functional equation. Operator approach*. Berlin, Birkhauser, 1996. 187 p. doi.org/10.1007/978-3-0348-8977-3.

2. Shukur Ali A. Behavior of the norms of the powers of the operator generated by rational rotation. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia 1. Fizika. Matematika. Informatika.* [Bulletin of the Belarusian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics], 2016, no. 2, pp. 110–115. (in Russian)

3. Weyl G. *Selected Works. Mathematics. Theoretical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 510 p. (in Russian)

4. Kornfeld I., Sinai Ya. G., Fomin S. V. *Ergodic theory*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 384 p. (in Russian)

5. Kachurovskii A., Sedalischev V. Constants in estimates for the rates of convergence in von Neumann's and Birkhoff's ergodic theorems. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 2011, vol. 202, no. 8, pp. 1105–1125. doi.org/10.1070/sm2011v202n08abeh004180.

6. Tomilov Y., Zemanek Ja. A new way of constructing examples in operator ergodic theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2004, vol. 137, pp. 209–225. doi.org/10.1017/s0305004103007436.

7. Bermudez T., Gonzalez M., Mbekhta M. Operators with an ergodic power. *Studia Mathematica*, 2000, vol. 141, pp. 201–208.

8. Gura A. A. Homological equations and topological properties of S^1-extensions over an ergodic rotation of the circle. *Matematicheskie Zametki* [Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR], 1978, vol. 23, no. 3, pp. 251–255. doi.org/10.1007/BF01651441.

9. Anosov D. V. On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR – Seriya Matematicheskaya* [Mathematics of the USSR – Izvestiya], 1973, vol. 7, no. 6, pp. 1257–1271. doi.org/10.1070/im1973v007n06abeh002086.

10. Teube Cyrille Mbainaissem, Serine Alou Lo, Moussa Ould Ahmed Salem. On reducibility of the weighted composition operators. *Problemy fiziki, matematiki i tehniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2015, vol. 23, no. 2, pp. 75–82. (in Russian)

11. Aleksandrov P. S. (ed.) *Hilbert's problems*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 240 p. (in Russian)

12. Gordon A. Ya. Sufficient condition for unsolvability of the additive functional homological equation connected with the ergodic rotation of a circle. *Functional Analysis and Its Applications*, 1975, vol. 9, no. 4, pp. 334–336. doi.org/10.1007/BF01075885.

13. Gelfond A. O. *Calculus of finite differences*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 375 p. (in Russian)

14. Shidlovskii A. *Transcendent numbers*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 448 p. (in Russian)

Информация об авторах

Антоневич Анатолий Борисович – д-р физ.-мат. наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: antonevich@bsu.by.

Шукур Али А. – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: shukur.math@gmail.com.

Information about the authors

Antonevich Anatoly Borisovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: antonevich@bsu.by.

Shukur Ali A. – Postgraduate student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shukur.math@gmail.com.

Для цитирования

Антоневич, А. Б. Оценки норм степеней оператора, порожденного иррациональным поворотом / А. Б. Антоневич, Али А. Шукур // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 30–35.

For citation

Antonevich A. B., Shukur Ali A. Estimations of the norm of the powers of the operator generated by irrational rotation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 30–35. (in Russian)