ISSN 0002–354X (print)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 524.6;531

Поступило в редакцию 30.12.2016
Received 30.12.2016

Член-корреспондент Л. М. Томильчик

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

МОДЕЛЬ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО МАССИВНОГО ШАРА КАК ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ САМОВЗАИМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИНАМИКИ

На основе гамильтонова формализма в комплексифицированном расширенном восьмимерном фазовом пространстве построена с учётом предела Гиббонса самовзаимная дважды релятивистская модель одночастичной классической динамики пространственно локализованной гравитирующей массы, численная величина которой, изменяющаяся в конечных пределах, является единственным свободным модельным параметром. Точное сферически симметричное решение модели воспроизводит картину пульсирующего массивного шара, амплитудные радиальные значения в x-, p-подпространствах расширенного пространства и частота пульсаций определяются численным значением массы, которое универсальным соотношением связано с соответствующим значением действия. Модель имеет корректный ньютонов предел, воспроизводит классический аналог шрёдингеровского дрожания (Zitterbewegung). Её каноническое квантование позволяет интерпретировать самовзаимный оператор Борна как квантовомеханический оператор, собственные значения которого кратны квадрату массы Планка, и приводит к модели осциллятора Дирака для фермиона с массой Планка.

Ключевые слова: взаимная симметрия, комплексная группа Лоренца, максимальная сила, расширенное фазовое пространство, осциллятор Дирака.

Corresponding Member L. M. Tomilchik

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

MODEL OF MASSIVE PULSATING SPHERE AS AN EXACT SOLUTION OF THE HAMILTONIAN SELF RECIPROCAL DYNAMICS EQUATIONS

We derive self-reciprocal twice-relativistic model of one-particle classical dynamics of spatially localized gravitating mass on the basis of Hamilton formalism in complexified extended 8-dimensional phase space taking into account Hibbons' limit. Mass of particle, being varied in a finite interval, is a unique free parameter of the model. Exact spherically-symmetric solution of the model represents a pulsating massive ball with magnitudes of oscillations in x- and p-space and their frequency defined by the mass, that is connected by a universal relation to a corresponding action. The model has correct Newtonian limit and demonstrates classic analog of Schredinger's Zitterbewegung. Canonic quantization of the model allows interpretation of self-reciprocal Born operator as quantum operator with eigenvalues of multipes of Planck mass squared. It leads to a model of Dirac oscillator for a fermion with Planck mass.

Keywords: reciprocal symmetry, complex Lorentz group, maximal force, extended pase space, Dirac oscillator.

Введение. В настоящее время концепция взаимности М. Борна [1; 2] вновь привлекла внимание в качестве возможного фундаментального физического принципа. Здесь можно выделить два основных направления.

Первое из них представлено в наиболее развёрнутом виде в работах Лоу [3] (а также [4], где содержится подробное изложение содержания и список всех публикаций Лоу за период 2002–2009 гг.). Здесь предложен новый вариант расширения симметрийной базы физики фундаментальных взаимодействий – полупрямое произведение псевдоунитарной группы $U(1, n)$ и группы Гайзенберга–Вейля (Quaplectic Group (QG) – по терминологии Лоу). В такую схему принцип взаимности Борна включается естественным образом, а сама QG позиционируется как базовая для «Теории всего» [4]. В формализме QG помимо мировой константы *c* фигурирует фундаментальный параметр размерности силы.

В работах второго направления взаимная симметрия привлекается к проблемам релятивистской космологии, в частности, на планковских масштабах. Здесь следует отметить работы [5; 6], где принцип взаимности сформулирован как требование инвариантности относительно обобщённых фурье-преобразований, а самовзаимное уравнение Борна интерпретируется как квантовополевое. В обоих названных направлениях исследования используется подход Борна в его исходной квантовой версии.

Однако общепринятая физическая интерпретация взаимно-инвариантной U(3,1)-симметричной квантовомеханической модели Борна (уравнение для релятивистского гармонического осциллятора) в настоящее время отсутствует, несмотря на непрекращающиеся попытки её применения в различных областях квантовой физики (см., напр., [7] и [8] и цитированную там литературу).

На наш взгляд, такие базовые положения оригинального подхода Борна, как факторизация действия (введение двух констант, «обезразмеривающих» пары канонически сопряжённых переменных), а также использование массы в качестве свободного размерного параметра, целесообразно сохранять в любом случае. К этому следует добавить принцип максимального натяжения Гиббонса (Maximum Tension Principle – MTP) [9] (см. также [13]), согласно которому обратная величина гравитационной постоянной Эйнштейна $G_E = 4G_N / c^4$ (*c* – скорость света, G_N – гравитационная постоянная Ньютона) определяет максимальную силу (Maximum Force – MF) $F_G = c^4 / 4G_N$ и соответственно $P_G = cF_G = c^5 / 4G_N$ – максимальная мощность (Maximum Power – MP).

Кроме того, в целях согласования квантовых и классических аспектов принципа взаимности, целесообразно рассматривать действие в качестве ненулевого размерного параметра, не предполагая изначально его дискретности.

В настоящей работе на основе гамильтонова формализма в расширенном восьмимерном фазовом пространстве построена одночастичная взаимно симметричная квазиньютонова механическая модель с единственным параметром, имеющим размерность массы и конечную область изменения. Модель имеет демонстрируемый ньютонов предел и допускает корректную процедуру канонического квантования.

Теоретическая часть. *1. Предварительные соображения.* Как известно, фундаментальный взаимно-симметричный инвариант Борна представляет собой объединение пространственно-временного ($x^\mu x_\mu$) и импульсно-энергетического ($p^\mu p_\mu$) лоренцовых инвариантов [2].

Представим его в следующем виде:

$$S_B^2 = \frac{1}{q_e^2} x^\mu x_\mu + \frac{1}{p_e^2} p^\mu p_\mu, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}. \tag{1.1}$$

Параметры q_e и p_e, имеющие соответственно размерность длины и импульса, связаны следующими двумя соотношениями:

$$p_e q_e = a_e, \tag{1.2}$$

$$p_e / q_e = æ_0, \tag{1.3}$$

где a – ненулевой ($a \geq a_e > 0$) параметр, имеющий размерность действия (не обязательно – дискретный), $æ_0 = \dfrac{c^3}{4G_N}$ – универсальная константа, имеющая размерность [масса]/[время], значок «*e*» у параметров – от слова extremal.

Из (1.2) и (1.3) параметры p_e и q_e выражаются через единственный свободный параметр a_e и универсальную константу $æ_0$ следующим образом:

$$p_e = (a_e æ_0)^{\frac{1}{2}}, \quad q_e = (a_e æ_0^{-1})^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Если использовать параметризацию Борна [2] и выразить параметр размерности импульса p_e через параметр размерности массы m_e, т. е. использовать соотношение $p_e = m_e c$, то из (1.2)–(1.4) следует универсальная связь между параметрами m_e и a_e

$$m_e^2 = \frac{a_e}{c^2}æ_0 = \frac{a_e c}{4G_N}, \tag{1.5}$$

а параметр q_e выразится через m_e следующим образом:

$$q_e = \frac{4m_e G_N}{c^2},$$

где $r_g = \dfrac{2m_e G_N}{c^2}$ – гравитационный радиус.

Заметим, что, положив в (1.5) $a_e = \dfrac{h}{\pi}$, получим $m_e = \sqrt{2}M_P$, где $M_P = \left(\dfrac{\hbar c}{G_N}\right)^{\frac{1}{2}}$ – масса Планка, параметры (1.4) выразятся в планковских величинах. В дальнейшем квантовую версию будем рассматривать как предельную классической.

Существование максимальной силы Гиббонса F_G означает наличие минимального расстояния r_0, до которого могут сблизиться две точечные массы M и m, взаимодействующие по закону всемирного тяготения Ньютона. Проще всего убедиться в этом путём элементарной модификации ньютонова выражения для энергии $U_N(M, m, r)$ взаимодействия двух покоящихся масс:

$$U_N(M, m, r) = -G_N\frac{mM}{r},\ (r > 0) \to U_{gr}(M, m, r, r_0) = -F_G\frac{r_0^2}{r},\quad r \ge r_0, \tag{1.6}$$

где параметр r_0 определён соотношением

$$r_0 = r_0(m, M) = \{r_g(m)R_g(M)\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2G_N}{c^2}(mM)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение (1.6) имеет минимум, равный

$$U_{gr}^{(\min)}(m, M) = -F_G r_0 = -\frac{1}{2}(mM)^{\frac{1}{2}}c^2,$$

причём r_0 определяет глубину соответствующей «гравитационной ямы».

Наглядно-модельная картина в простейшем случае представляет собой два неподвижных соприкасающихся шара (или две капли) радиуса R_g и r_g соответственно (в состоянии невесомости!), причём параметр $r(M, m)$, определяющий расстояние между их центрами, равен

$$r(M, m) = R_g(M) + r_g(m) = \frac{2G_N}{c^2}(M + m).$$

Рассматривая ситуацию с позиций соблюдения энергетического баланса (что позволяет абстрагироваться от деталей динамики), выражение для полной энергии $E(M, m)$ такой «бинарной» системы можно представить в следующем виде:

$$E(M, m) = Mc^2 + mc^2 - \frac{1}{2}(mM)^{\frac{1}{2}} = (M + m)c^2\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{(mM)^{\frac{1}{2}}}{M + m}\right\} =$$

$$(M + m)c^2\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{M + m}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

где $\mu = \dfrac{mM}{M + m}$ – приведенная масса.

Такая картина соответствует выделению из суммарной энергии покоя $E_{\text{rest}} = (M, m)c^2$ энергии движения, равной

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\{(M, m)\mu\}^{\frac{1}{2}} c^2 = \frac{1}{2}(Mm)^{\frac{1}{2}} c^2$$

(приведенная масса в «поле» неподвижного центра инерции). Параметр λ_{k-r}, характеризующий отношение энергий, в общем случае определяется следующей формулой:

$$\lambda_{k-r} \overset{\text{def}}{=} E_{\text{kin}} / E_{\text{rest}} = \frac{1}{2}\frac{(Mm)^{\frac{1}{2}}}{M+m} = \frac{1}{2}\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{1+\delta}, \tag{1.7}$$

где $\delta = \dfrac{m}{M}$.

Область изменения безразмерного параметра δ легко определить, используя известное соотношение, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое значения произвольной пары конечных положительных чисел, применительно к паре величин $R_g(M)$ и $r_g(m)$:

$$r_0 = \{R_g(M) r_g(m)\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}\{R_g(M) + r_g(m)\} = r(M, m).$$

Отсюда с учётом (1.7) получаем

$$\lambda_{k-r} = r_0 / r(M, m) = \frac{1}{2}\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{1+\delta},$$

где $0 < \delta_0 \le \delta \le 1$, так что $\delta_{\min} = \delta_0 = \dfrac{M_{\min}}{M_{\max}}$.

Видно, что в рамках предлагаемого подхода обязательным является наличие верхнего и нижнего предела массы покоя (и, соответственно, количества действия). Если выбрать в качестве $M_{\max}$ значение массы Вселенной $M_u \sim 10^{55}$ г, то полагая $M_{\min} = M_p \sim 10^{-5}$ г (либо $M_{\min} = m_e \sim 10^{-27}$ г), получим $\delta_{\min} \sim 10^{-60}$ (либо $\delta_{\min} \sim 10^{-82}$).

С другой стороны, видно, что при $\lambda_{k-r} = \dfrac{1}{4}$ наибольшее возможное гравитационное «энерговыделение» (25 %) происходит при слиянии двух равновеликих масс. Следует при этом помнить, что соответствующая «яма» существует на фоне положительной энергии покоя, соответствующей сумме масс.

Как нетрудно видеть, в промежуточном варианте, когда $\delta \ll 1$, но M и m далеки от своих предельных значений, с хорошей точностью выполняется условие

$$\lambda_{k-r} \sim \frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}} c \ll c.$$

Однако при этом $\lambda_{k-r} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}$.

Поэтому $\dfrac{v}{c} \approx \left(\dfrac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}}$, так что $v_{\lim} \approx \left(\dfrac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}} c \ll c$, что находится в хорошем соответствии с законом Талли–Фишера, когда v – периферийная скорость вращения типичной спиральной галактики, $M = M_G$ – масса галактики, измеренная в массах солнца $m = M_{\odot}$.

2. Группа Барута и симметрия комплексного расширенного фазового пространства. Как известно (см., напр., [11]), трактовка энергии и времени в качестве канонически сопряжённых переменных характерна для формализма классической динамики в пространстве событий (QTP) и энергии (H) (расширенное фазовое пространство ($QTPH$), имеющее в общем случае $2+2N$ измерений, где N – любое конечное число, начиная с единицы).

Речь идёт о вещественном пространстве, где определены, во-первых, N-мерные векторы X_A и Y_B, и, во-вторых, для любой пары функций $f(X, Y)$, $\varphi(X, Y)$ – классические скобки Пуассона $\{\varphi, f\}_{X,Y}$. При этом

$$\{X_A, Y_B\}_{X,Y} = \eta_{AB}. \tag{2.1}$$

Функция Гамильтона в такой системе вводится следующим образом.

Задаётся некоторая $(2N+1)$-мерная *поверхность энергии*

$$\Omega(X,Y)\equiv\Omega(X_0,X_k;Y_0,Y_e)=0, \tag{2.2}$$

после чего, разрешая (2.2) относительно координаты Y_0 получаем *уравнение энергии*

$$Y_0=f(Y_k,P_e,X_0),$$

а функция Гамильтона определяется как

$$H(Y_k,P_e,X_0)\overset{\text{def}}{=}-Y_0=-F(Y_k,P_e,X_0).$$

Если ограничиться построением на базе формализма $(QTPH)$ механических моделей, не выходя за рамки трёх пространственных измерений, то переменные X и Y можно отождествить со следующими псевдоевклидовыми вещественными четырёхвекторами:

$$X:\quad Q^{\mu}=\frac{1}{q_e}\{x_0=ct,x_k\},\quad Y:\quad \mathrm{P}^{\mu}=\frac{1}{p_e}\{P_0=c^{-1}E,P_k\}: \\ \eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}. \tag{2.3}$$

Обратимся теперь к выражению (1.1) для S_B^2 и запишем его с учётом (2.3) в следующем виде:

$$S_B^2=\frac{1}{p_e^2}\{p_0^2-p_k^2\}+\frac{1}{q_e^2}\{x_0^2-x_k^2\}=\mathrm{P}_0^2-(\mathrm{P}^2+Q^2-Q_0^2).$$

Видно, что в рамках формализма $(QTPH)$ нулевому значению борновского инварианта соответствует следующее уравнение поверхности энергий типа (2.2):

$$\mathrm{P}_0^2-(\underline{\mathrm{P}}^2+Q^2-Q_0^2)=0,$$

откуда для функции Гамильтона получаем выражение

$$H=\pm(\underline{\mathrm{P}}^2+\underline{Q}^2-T^2)^{\frac{1}{2}}\qquad (T\equiv Q_0). \tag{2.4}$$

В классической версии следует ограничиться верхним знаком.

С другой стороны восьмимерное вещественное пространство $(QTPH)$ естественным образом комплексифицируется путём введения четырёхмерных векторов

$$\mathrm{Z}^{\mu}=X^{\mu}+iY^{\mu}$$

и группы преобразований Λ_B (в безындексной записи):

$$\mathrm{Z}'=\Lambda\mathrm{Z},$$

где Λ – комплексные 4×4 матрицы, удовлетворяющие условию

$$\Lambda\eta\Lambda^{\dagger}=\eta, \tag{2.5}$$

символ † означает эрмитово сопряжение, $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$.

Это комплексная группа Лоренца с вещественной метрикой, описанная Барутом [10]. Для краткости будем называть её *группой Барута* и обозначать символом Λ_B. Метрический инвариант этой группы в координатах (2.3) имеет следующий вид:

$$\mathrm{Z}^{\mu}\mathrm{Z}^{*}_{\mu}=(X^{\mu}+iY^{\mu})(X_{\mu}-iY_{\mu})=X^{\mu}X_{\mu}+Y^{\mu}Y_{\mu}= \\ |\mathrm{Z}_0|^2-\sum_{k=1}^{3}|\mathrm{Z}_k|^2=Q_0^2+\mathrm{P}_0^2-\sum_{k=1}^{3}(\mathrm{P}_k^2+Q_k^2).$$

Преобразованиям взаимности Борна $\left(\frac{x^{\mu}}{q_e}\to\frac{p^{\mu}}{p_e},\frac{p^{\mu}}{p_e}\to-\frac{x^{\mu}}{q_e}\right)$ соответствует диагональная матрица $\Lambda_R=-iI=-i\,\mathrm{diag}\{1,1,1,1\}$, которая удовлетворяет условию (2.5) и следовательно, принадлежит группе Барута ($\Lambda_R\in\Lambda_B$). Существует ещё одна матрица такого же типа (т. е. $\overline{\Lambda}_R\in\Lambda_B$), а именно

$$\Lambda_R = -i\eta = -i\,\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\},$$

чему соответствует вариант комплексификации пространства (условно обозначим его $(PT;QH)$), который связан с возможностью выбора определения для вещественной и мнимой составляющей комплексного вектора Z, альтернативного (2.3), а именно:

$$\bar{Z}^\mu = \bar{X}^\mu + i\bar{Y}^\mu,$$

где

$$\bar{X}:\bar{Q}^\mu = \left\{-\frac{x_0}{q_e}, \frac{p_k}{p_e}\right\}; \quad \bar{Y}:\bar{P}^\mu = \left\{\frac{p_0}{p_e}, \frac{x_k}{q_e}\right\}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что

$$Z^\mu Z^*_\mu = Z'^\mu Z'^*_\mu = S_B^2.$$

Таким образом, взаимно-симметричный инвариант Борна (1.1) может быть интерпретирован как метрический инвариант группы Барута. В свою очередь, он представим в двух эквивалентных формах:

$$S_B^2 = P^\mu P_\mu + Q^\mu Q_\mu, \tag{2.7}$$

где $SO_\nu(3,1)$ – векторы P^μ и Q^μ определены формулами (2.3);
либо

$$S_B^2 = \bar{P}^\mu \bar{P}_\mu + \bar{Q}^\mu \bar{Q}_\mu,$$

где $SO_f(3,1)$ – векторы $\bar{P}_\mu$ и $\bar{Q}_\mu$ определены формулами (2.6)

Группы, обозначенные как $SO_\nu(3,1)$ и $SO_f(3,1)$, изоморфны, но не совпадают между собой. Необходимость различать эти две группы связана с подгрупповой структурой группы Барута [10] (см. также [12]).

В силу индефинитности метрического инварианта S_B^2 следует, как и в случае обычной группы Лоренца, рассматривать все три возможные его значения – нулевое, положительное и отрицательное.

Рассмотрим вначале случай $S_B^2 = 0$. При этом возможны два варианта.

(A) Одновременное обращение в 0 «координатной» и «импульсной» части S_B^2, что можно считать следствием принципа взаимности (включающего преобразования Λ_R и $\bar{\Lambda}_R$)

$$Q^\mu Q_\mu = \frac{c^2}{q_e^2}(t^2 - c^{-2}\underline{r}^2) = 0, \quad P^\mu P_\mu = \frac{1}{c^2 p_e^2}(E^2 - c^2\underline{p}^2) = 0.$$

Отсюда следует, что для любых конечных значений параметров q_e и p_e скорость

$$v_{\lim} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{\lim} = \left(\frac{\partial E}{\partial \underline{p}}\right)_{\lim} = \pm c \text{ – Maximum Speed,}$$

$$\bar{Q}^\mu \bar{Q}_\mu = \frac{c^2}{q_e^2}\left(t^2 - \frac{q_e^2}{c^2 p_e^2}\underline{p}^2\right) = \frac{c^2}{q_e^2}\left(t - \frac{1}{F_G^2}\underline{p}^2\right) = 0,$$

$$P^\mu P_\mu = \frac{1}{c^2 p_e^2}\left(E^2 - \frac{c^2 p_e^2}{q_e^2}\underline{r}^2\right) = \frac{1}{c^2 p_e^2}(E^2 - F_G^2\underline{r}^2) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\lim} = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_{\lim} = \pm F_G = \frac{c^4}{4G_N} \text{ – Maximum Force.}$$

(B) Вариант $S_B^2 = 0$ реализуется при ненулевых, равных по величине и противоположных по знаку слагаемых в S_B^2.

В дальнейшем ограничимся использованием координатизации (2.3) расширенного фазового пространства (X, Y) и будем рассматривать соотношение

$$S_B^2 = \overline{\mathrm{P}}^{\mu}\overline{\mathrm{P}}_{\mu} + \overline{Q}^{\mu}\overline{Q}_{\mu} = \frac{p^{\mu}p_{\mu}}{p_e^2} + \frac{x^{\mu}x_{\mu}}{q_e^2} = 0.$$

Оно выполняется при $x^{\mu}x_{\mu} = -q_e^2$, $p^{\mu}p_{\mu} = p_e^2$ (соответственно $\mathrm{P}^{\mu}\mathrm{P}_{\mu} = 1, Q^{\mu}Q_{\mu} = -1$) и соответствует гиперболическому движению, т. е. постоянному 4-ускорению $W_{\mu} = \dfrac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}$, абсолютная величина которого равна $\left|W^{\mu}W_{\mu}\right|^2 = \dfrac{c^2}{q_e} = \dfrac{c}{m_e}æ_0 = \dfrac{1}{m_e}F_G$, и зависит от массы (Mass Dependent Maximal Acceleration – MDMA). При этом выполняется соотношение

$$W_{\max}m_{\min} = W_{\min}m_{\max} = F_G.$$

Видно, что постоянное MDMA-ускорение играет в рассматриваемой ситуации роль, аналогичную роли предельной скорости в группе Лоренца.

В рамках формализма $(QTPH)$ именно нулевой интервал S_B^2 является поверхностью энергии, что приводит к функции Гамильтона вида (2.4):

$$H = (\underline{\mathrm{P}}^2 + \underline{Q}^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Как нетрудно показать, случай ненулевого положительного значения интервала $(S_B^2(\lambda_B) = \lambda_B > 0)$ соответствует уравнению поверхности энергии, из которого получается функция Гамильтона следующего вида:

$$H' = (\underline{\mathrm{P}}'^2 + \underline{Q}'^2 + \lambda_B - T')^{\frac{1}{2}},$$

где штрихованные переменные отличаются от переменных в (2.7) только следующим масштабным преобразованием модельного параметра:

$$m(\lambda_B) = \lambda m_e, \qquad (2.8)$$

где $\lambda = \left(1+\lambda_B\right)^{\frac{1}{2}}$, так что $p_e(\lambda) = \lambda p_e$, $q_e(\lambda) = \lambda q_e$, $p_e(\lambda)/q_e(\lambda) = p_e/q_e = æ_0$.

В дальнейшем будем исходить из модельного Гамильтониана

$$H = (\underline{\mathrm{P}}^2 + \underline{Q}^2 + 1 - T^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.9)$$

где $\mathrm{P}_k = \dfrac{p_k}{\overline{p}_e}$, $Q_k = \dfrac{x_k}{\overline{q}_e}$, $T = \dfrac{ct}{\overline{q}_e}$ определяются соотношениями (2.8) при $\lambda_B = 1$.

Ниже будет показано, что выбор $\lambda_B = 1$ в качестве исходного оправдан соображениями как физического (принцип соответствия), так и чисто математического характера.

3. Гамильтонова динамика гравитирующей неточечной массы в $(QT;PH)$. Скобки Пуассона (2.1) в данном случае заданы обычным образом

$$\{\varphi(Q,\mathrm{P},T), \Phi(Q,\mathrm{P},T)\}_{q,p} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial Q_k}\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{P}_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}_k}\frac{\partial\Phi}{\partial Q_k}\right\}.$$

Полная производная по времени определена как

$$\frac{df(\mathrm{P},Q,T)}{dT} = \frac{\partial f}{\partial T} + \{f, H\}_{q,p}.$$

Если исходить из функции Гамильтона (2.9) и полагать, как обычно, что временная зависимость канонических переменных определяется динамическими уравнениями, то соответствующие гамильтоновы уравнения будут иметь вид

$$\frac{dQ_k}{dT} = \frac{\partial H}{\partial \mathrm{P}_k} = \frac{\mathrm{P}_k}{(H_0^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d\mathrm{P}_k}{dT} = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = -\frac{Q_k}{(H_0^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$H_0 = (\underline{\mathrm{P}}_k^2 + Q_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1)$$

Тогда $\frac{dH_0}{dT}=0$, т. е. H_0, определяемый формулой (3.1), представляет собой первый интеграл движения (энергию).

Легко убедиться, что тензор

$$H_{kl}=H_0^{-1}\left\{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l+Q_kQ_l+\frac{1}{3}\delta_{kl}\right\} \tag{3.2}$$

в сочетании с компонентами углового момента

$$L_k=\varepsilon_{k\ln}Q_k\mathrm{P}_n$$

обеспечивают $U(3)=U(1)\otimes SU(3)$ симметрию задачи.

При этом очевидно, что гамильтониан (3.1) есть след тензора (3.2), причём наличие члена $\sim\delta_{kl}$ обеспечивает ненулевое значение детерминанта тензора H_{kl}.

В [12] в качестве исходного рассматривался гамильтониан, соответствующий случаю $\lambda_B=0$. Поэтому выводы о предельном соответствии модели с гравитационной динамикой Ньютона, с одной стороны, и с квантовой механикой – с другой, носили лишь качественный, а не строгий характер.

Первоочередными вопросами остаётся также гамильтонова формулировка двухчастичной задачи и проблема согласования модели с общепринятой ОТО, что требует дальнейшего специального анализа. Здесь ограничимся ссылкой на феноменологическое рассмотрение задачи двух тел в разделе 1 с энергетических позиций ((1.6) для потенциальной гравитационной энергии двухчастичного взаимодействия). Несомненной выглядит и связь полученного «пульсирующего» решения для $m_e=M_{\max}$ с моделью осциллирующей Вселенной.

Теперь перейдём к рассмотрению *Ньютонова предела* в модели с гамильтонианом (2.9).

Рассмотрим выражение для энергии $H_0=(\mathrm{P}_k^2+Q_k^2+1)^{\frac{1}{2}}$ в пределе $\mathrm{P}/p_e\ll 1,\ Q/q_e\ll 1$.

Выразим это соотношение в размерных величинах

$$E=cp_eH_0=cp_e\left(\frac{p^2}{p_e^2}+\frac{r^2}{q_e^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}=cp_e\left(1+\frac{r^2}{q_e^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{p^2}{p_e^2}\left(1+\frac{r^2}{q_e^2}\right)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим полученное выражение в приближении $Q/q_e\ll 1,\ \mathrm{P}/p_e\ll 1,\ \mathrm{P}/Q\ll 1$ (т. е. $p/r\ll p_e/q_e=æ_0$).

Тогда получим

$$E\approx m_ec^2+\frac{1}{2}m_ev^2+\frac{1}{2}m_e\omega_0^2(m)r^2,$$

где

$$\omega_0(m)=m_e^{-1}æ_0$$

характерная «частота» (обратная величина тому отрезку времени *T*, который задаётся в модели в соответствии с определением

$$T=\frac{ct}{q_e}=v_e(m)t,$$

где $v_e(m)=c^{-1}q_e=\frac{p_e}{c}æ^{-1}=m_eæ_0{}^{-1}$).

Заметим, что добавка к постоянной m_ec^2 имеет характерную форму энергии (гамильтониана) нерелятивистского пространственного изотропного осциллятора.

Разделив на c^2, получим ньютонов предел для массы $m=\frac{E}{c^2}$, т. е.

$$m=m_e+m_e\left\{\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0^2r^2}{c^2}\right)\right\}.$$

«Осциллирующая» добавка к массе m_e, во-первых, мала, а во-вторых, при тех значениях массы, когда «работает» гравитационная динамика Ньютона, частота $\omega_0(m_e)$ настолько велика, что усреднение по макроскопическим отрезкам времени её надёжно зануляет.

4. Квантование гравитации. Рассмотрим оригинальную квантовомеханическую версию Борна [2], представив оператор $\widehat{S'}^2_B(\lambda_B = 0)$ в соответствии с квадратичной формой (2.7) уравнения энергии в (QT, PH) в следующем виде:

$$\widehat{S'}^2(\lambda_B = 1) = \hat{\mathrm{P}}^\mu \hat{\mathrm{P}}_\mu + \widehat{Q}^\mu \widehat{Q}_\mu - 1, \tag{4.1}$$

причём

$$[\hat{\mathrm{P}}_\mu, \widehat{Q}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}, \ \ \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}.$$

Заметим, что в размерных величинах $(p_e q_e = a_e)$ оператор (4.1) допускает естественную трактовку в качестве оператора действия.

Оператор (4.1), записанный в разделяющихся псевдодекартовых переменных $\left(\text{либо } \xi_\mu = \dfrac{x_\mu}{q_e},\right.$ $\left.\text{либо } \eta_\mu = \dfrac{p_\mu}{p_e}\right)$, имеет вид

$$\widehat{S'}^2(1) = 2\left\{\widehat{H}_0 - \sum_{k=1}^{3} \widehat{H}_k\right\} - 1, \tag{4.2}$$

где $\widehat{H}_K$ $(K = 0, 1, 2, 3)$ по форме представляет собой оператор линейного гармонического осциллятора.

Если рассматривать каждый из них в представлении чисел заполнения, то

$$\widehat{H}_K \left| n_K \right\rangle = \left(n_K + \frac{1}{2}\right) \left| n_K \right\rangle,$$

где n_K – четверка натуральных чисел $\{n_0, n_1, n_2, n_3\}$, которые могут независимо принимать все значения, включая нулевое; $\left| n_K \right\rangle$ – соответствующие собственные состояния.

При этом в (4.2) следует различать укороченное (p, r)-действие и (E, t)-действие, определяемое соответственно операторами $\sum_{k=1}^{3} \widehat{H}_k$ и $\widehat{H}_0$, поскольку они входят в (4.2) с противоположными знаками, а также имеют разный статистический вес (степень вырождения состояний $N(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, где $n = n_1 + n_2 + n_3$, и $N(n_0) = 1$ соответственно). Кроме того, разность $S^2(E, t) - S^2(p, r)$ ограничена снизу условием

$$S^2(E, t) - S^2(p, r) = 1,$$

Для собственных значений $S^2(n_0, n)$ оператора (4.2), равных

$$S^2(n_0, n) = 2(n_0 - n - 1),$$

видно, что вакуумное значение, которое достигается при $(n_0)_{\min} = 1$ бесконечно вырождено, но при этом $(n_0)_{\min} = 1$ (при $n = 0$).

Таким образом, взаимно-симметричный оператор Борна, рассмотренный в рамках простейшей процедуры канонического квантования в терминах расширенного фазового пространства $(QT; PH)$, фактически представляет собой квантовомеханический оператор действия с линейным дискретным спектром собственных значений в единицах $\hbar$.

Отсюда в качестве естественного следствия вытекает соответствующее квантование физических величин, которые пропорциональны постоянной Планка.

Это, во-первых, квадрат массы покоя (квант массы–масса Планка), и, во-вторых – величина $\hbar c$, имеющая размерность квадрата электрического (или магнитного) заряда. Напомним, что величина $g_0^2 = \hbar c$ представляет собой квант квадрата заряда магнитного монополя.

Теперь рассмотрим выражение для интеграла энергии

$$H_0 = (\underline{\mathrm{P}}_k^2 + \underline{Q}_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

с позиций канонического квантования, т. е. теперь $\hat{\mathrm{P}}_k$ и $\widehat{Q}_k$ – квантовомеханические операторы $[\hat{\mathrm{P}}_k, \widehat{Q}_l] = -i\delta_{kl}$, все размерные параметры – планковские. С чисто математической стороны речь идёт о дираковской линеаризации оператора в правой части выражения $\widehat{H}_0 = (\underline{\hat{\mathrm{P}}}_k^2 + \underline{\widehat{Q}}_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ (используя 3-векторные обозначения).

Это легко достигается путём использования известных (4 × 4)-матриц Дирака α_k, Σ_k $(k = 1, 2, 3)$ и $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ и эрмитовых операторов $\hat{\mathrm{P}} = (\alpha_k \hat{\mathrm{P}}_k) = (\underline{\alpha}\underline{\hat{\mathrm{P}}}), \widehat{Q} = (\alpha_k \widehat{Q}_k) = (\underline{\alpha}\underline{\widehat{Q}}),$ а также двух взаимно эрмитово-сопряженных операторов

$$\widehat{U}_{\pm}^{-} = I \pm i\beta\widehat{Q} = I \pm i\beta(\underline{\alpha}\underline{\widehat{Q}}),\ \ \widehat{U}_{\pm}^{\dagger} = \widehat{U}_{\mp}^{\dagger}.$$

Тогда операторы

$$\widehat{H}_0^{(\pm)} = (\underline{\alpha}\,\underline{\hat{\mathrm{P}}}) \pm \widehat{U}_{\pm} = \underline{\alpha}(\underline{\hat{\mathrm{P}}} \pm i\beta\underline{\widehat{Q}}) + \beta$$

совпадают с оператором энергии известной модели осциллятора Дирака и её суперсимметричным партнёром [14; 15]. В данном случае речь идёт об операторе энергии для электрически нейтральной частицы с массой Планка, т. е. о массивном электрически нейтральном фермионе.

Заключение. Рассмотренная самовзаимная одночастичная гамильтонова модель сама по себе не является реалистической (поскольку не включает никаких взаимодействий, помимо чисто гравитационных) и скорее относится к категории «игрушечных» (Toy-model). Однако, как и любая модель этого типа, если она связана с точным решением динамических уравнений, то содержит нетривиальные эвристические черты, стимулируя постановку новых задач.

То обстоятельство, что единственный параметр, имеющий размерность массы (и связанный с ним параметр размерности действия), позволяет ввести в классическую гамильтонову динамику эталонные единицы для всех координат расширенного фазового пространства (энергия–время, импульс–координата) свидетельствует о том, что возникающие при этом связи: масса покоя–действие, масса покоя–частота, пульсирующий характер пространственно-локализованного массивного объекта, могут носить модельно независимый характер.

Первоочередные задачи, требующие решения, это гамильтонова формулировка двухчастичной задачи, переход к лагранжевой форме динамики, «стыковка» с традиционной ОТО (модель пульсирующей Вселенной, внутреннее решение Шварцшильда), а также включение электромагнитного взаимодействия.

Квантовая версия используемого подхода содержит следующие результаты:

1. Трактовка самовзаимного оператора Борна в качестве квантовомеханического оператора, дающего эквидистантный спектр квадрата массы в планковских единицах.

2. Получение в рамках процедуры канонического квантования явного вида оператора энергии для фермиона с массой Планка, что соответствует известной модели осциллятора Дирака, не имеющей сегодня общепринятой физической интерпретации.

Благодарности. В заключение выражаю благодарность Е. А. Толкачеву, В. В. Кудряшову за помощь в работе, а также А. Э. Марголину, И. Д. Феранчуку и Ю. П. Выблому за полезные обсуждения.

Acknowledgement. In conclusion, I would like to thank E. A. Tolkachev and V. V. Kudryashov for help in work and A. E. Margolin, I. D. Feranchuk and Yu. P. Vybly for useful discussions.

Список использованной литературы

1. Born, M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity / M. Born // Proc. Roy. Lond. – 1938. – Vol. 165, issue 921. – P. 291–303. doi.org/10.1098/rspa.1938.0060.

2. Born, M. Reciprocity Theory of Elementary Particles / M. Born // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, N 3. – P. 463–473. doi.org/10.1103/revmodphys.21.463.

3. Low, S. G. Reciprocal relativity of noninertial frames and the quapletic group / S. G. Low // Found. Phys. – 2006. – Vol. 36, N 7. – P. 1036–1069. doi.org/10.1007/s10701-006-9051-2.

4. Morgan, S. A modern Approach to Born Reciprocity / Stuart Morgan. – University of Tasmania, 2010.

5. Bolognesi, S. A cosmology of trans-Plankian theory and dark energy / S. Bolognesi // Int. J. Mod. Phys. – 2014. – Vol. 23, N 5. – P. 1450046. doi.org/10.1142/s0218271814500461.

6. Bolognesi, S. Born Reciprocity and Cosmic Accelarations / S. Bolognesi // Advances in Dark Energy Research / ed. Miranda L. Ortiz. – NY: Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 56–74; Arxiv: 1506.02187 v.3, hep-th.

7. Bars, J. Harmonic Oscillator Revisited / J. Bars // Phys. Rev. – 2009. – Vol. 79, N 4. – P. 045009. doi.org/10.1103/physrevd.79.045009.

8. Kovalski, K. Relativistic massless Harmonic Oscillator / K. Kovalski, J. Rembieliński // Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 81, N 1; Arxiv: 1002.0474. doi.org/10.1103/physreva.81.012118.

9. Gibbons, G. W. The Maximum Tension Principle in General Relativity / G. W. Gibbons // Found. Phys. – 2002. – Vol. 32, N 12. – P. 1891–1901. doi.org/10.1023/a:1022370717626.

10. Barut, A. O. Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure / A. O. Barut // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, N 11. – P. 1652–1656. doi.org/10.1063/1.1931202.

11. Синг, Дж. Классическая динамика / Дж. Л. Синг. – Москва, 1963. – 531 с.

12. Томильчик, Л. М. Взаимная инвариантность, принцип максимального натяжения и комплексная группа Лоренца как симметрия гравитационного взаимодействия / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 1. – С. 41–48.

13. Barrow, John D. Maximal Tension: with and without a cosmological constant / John D. Barrow, G. W. Gibbons // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2014. – Vol. 446, N 4. – P. 3874–3877. doi.org/ 10.1093/mnras/stu2378; Arxiv: 1408.1820 v3, gr – qc. Dec. 2014.

14. Moshinski, M. The Dirac Oscillator / M. Moshinski, A. Szczepaniak // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22, N 17. – P. L817–L819. doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/002.

15. Quesne, C. Supersymmetry and the Dirac Oscillator / C. Quesne // Int. J. Mod. Phys. A. – 1991. – Vol. 6, N 9. – P. 1567–1589. doi.org/10.1142/s0217751x91000836.

References

1. Born M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1938, vol. 165, no. 921, pp. 291–303. doi.org/10.1098/rspa.1938.0060.

2. Born M. Reciprocity Theory of Elementary Particles. *Reviews of Modern Physics*, 1949, vol. 21, no. 3, pp. 463–473. doi.org/10.1103/revmodphys.21.463.

3. Low S. G. Reciprocal relativity of noninertial frames and the quapletic group. *Foundations of Physics*, 2006, vol. 36, no. 7, pp. 1036–1069. doi.org/10.1007/s10701-006-9051-2.

4. Morgan S. *A modern Approach to Born Reciprocity*. University of Tasmania, 2010.

5. Bolognesi S. A cosmology of trans-Plankian theory and dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 2014, vol. 23, no. 5, pp. 1450046. doi.org/10.1142/s0218271814500461.

6. Bolognesi S. Born Reciprocity and Cosmic Accelarations. Ortiz Miranda L. (ed.) *Advances in Dark Energy Research*. NY, Nova Science Publishers Inc., 2015, pp. 56–74; Arxiv: 1506.02187 v.3, hep-th.

7. Bars J. Harmonic Oscillator Revisited. *Physical Review D*, 2009, vol. 79, no. 4, pp. 045009. doi.org/10.1103/physrevd.79.045009.

8. Kovalski K., Rembieliński J. Relativistic massless Harmonic Oscillator. *Physical Review A*, 2010, vol. 81, no. 1; Arxiv: 1002.0474. doi.org/10.1103/physreva.81.012118.

9. Gibbons G. W. The Maximum Tension Principle in General Relativity. *Foundations of Physics*, 2002, vol. 32, no. 12, pp. 1891–1901. doi.org/10.1023/a:1022370717626.

10. Barut A. O. Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure. *Journal of Mathematical Physics*, 1964, vol. 5, no. 11, pp. 1652–1656. doi.org/10.1063/1.1931202.

11. Synge J. L. *Classical Dynamics*. Moscow, 1963. 531 p. (in Russian)

12. Tomilchik L. M. Reciprocal invariant, maximum tension principle, and the Lorentz complex group as the symmetry of gravitational interaction. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 1, pp. 41–48. (in Russian)

13. Barrow J. D., Gibbons G. W. Maximal Tension: with and without a cosmological constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, vol. 446, no. 4, pp. 3874–3877. doi.org/ 10.1093/mnras/stu2378; Arxiv: 1408.1820 v3, gr – qc. Dec. 2014.

14. Moshinski M., Szczepaniak A. The Dirac Oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1989, vol. 22, no. 17, pp. L817–L819. doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/002.

15. Quesne C. Supersymmetry and the Dirac Oscillator. *International Journal of Modern Physics A*, 1991, vol. 6, no. 9, pp. 1567–1589. doi.org/10.1142/s0217751x91000836.

Информация об авторе

Томильчик Лев Митрофанович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.

Information about the author

Tomilchik Lev Mitrofanovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.

Для цитирования

Томильчик, Л. М. Модель пульсирующего массивного шара как точное решение уравнений самовзаимной гамильтоновой динамики / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 36–46.

For citation

Tomilchik L. M. Model of massive pulsating sphere as an exact solution of the Hamiltonian self reciprocal dynamics equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 36–46. (in Russian)