

В. А. Кот

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРЯМОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком О. Г. Пенязковым)

Впервые на основе прямого интегрирования обобщенного уравнения переноса в полуограниченные пространства получены последовательности из интегральных тождественных равенств, которые учитывают особенности дифференциального уравнения и граничные условия. Это позволило на основе степенных полиномов с экспоненциальным сомножителем построить с высокой сходимостью приближенные решения. Погрешность для широкой области параметров составляет сотые-тысячные доли процента.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, интегральные преобразования, тождественные равенства, приближенное решение.

V. A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

DIRECT INTEGRATION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION FOR A SEMI-BOUNDED SPACE

(Communicated by O. G. Penyazkov)

On the basis of direct integration of the generalized equation of heat transfer in a semi-bounded space, the sequences of identical integral equalities defining the features of a differential equation and boundary conditions were obtained for the first time. On the basis of power polynomials with an exponential factor, this made it possible to construct approximate solutions with high convergence. The error in determining parameters over a wide range is hundredths and thousandths of a percent.

Keywords: heat-conduction equation, integral transformation, identical equalities, approximate solution, convergence.

Введение. Построение аналитических решений для нестационарного уравнения теплопроводности в полуограниченной области является одним из важнейших вопросов теории теплопроводности [1–7]. Применяемые для данных задач интегральные преобразования в полубесконечных пределах описываются общим выражением $\bar{T}(\xi) = \int_a^\infty T(y)K(y, \xi)dy$, ($a \geq 0$), где $\bar{T}(\xi)$ – изображение функции; $K(y, \xi)$ – ядро интегрального преобразования. В качестве ядер используются разные функции: степенная, тригонометрическая, функции Бесселя, полиномы Лежандра, функции Вебера и Макдональда и др. [8–10]. В результате преобразования исключается из дифференциального уравнения в частных производных одна из независимых переменных. В итоге проблема сводится к задаче обратного преобразования, т. е. к решению интегрального уравнения относительно оригинала $T(y, t)$. В большинстве практически важных случаев это обращение может быть представлено интегралом симметричного вида $T(\xi) = \int_a^\infty \bar{T}(y, \xi)R(y, \xi)d\xi$, где $R(y, \xi)$ – надлежаще выбранная функция (ядро обратного преобразования), определенная в области $a \leq y < \infty$, $a \leq \xi < \infty$.

В работе [7] построены интегральные преобразования для нахождения аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности для обобщенного уравнения переноса в бесконечной области, ограниченной изнутри плоской, цилиндрической или сферической поверхностями. В данном случае речь идет об уравнении

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{m}{y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

в области $G = \{\bar{y} > y_0\}$, $\bar{t} > 0$, на границе которой задано одно из граничных условий: температурный нагрев

$$\bar{T}(\bar{y}, \bar{t}) \Big|_{\bar{y}=y_0} = \bar{\gamma}_1(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0, \quad (2)$$

тепловой нагрев

$$-\frac{\partial \bar{T}(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=y_0} = \frac{1}{\lambda} \bar{\gamma}_2(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0, \quad (3)$$

нагрев средой

$$-\lambda \frac{\partial \bar{T}(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=y_0} = h \left[\bar{\gamma}_3(\bar{t}) - T(\bar{y}, \bar{t}) \Big|_{\bar{y}=y_0} \right], \quad \bar{t} > 0, \quad (4)$$

а также условия на бесконечности

$$\bar{T}(\bar{y}, \bar{t}) \Big|_{\bar{y} \rightarrow \infty} = T_0; \quad \frac{\partial T(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y} \rightarrow \infty} = 0, \quad \bar{t} \geq 0. \quad (5)$$

В виде начального условия примем

$$\bar{T}(\bar{y}, 0) = T_0, \quad \bar{y} \geq y_0. \quad (6)$$

При $m = 1$ область ограничена изнутри цилиндрической поверхностью, при $m = 2$ – сферической, при $m = 0$ – плоской. Как отмечается в [7], развиваемый подход допускает справа в (1) наличие функции источника тепла $\bar{Q}(\bar{y}, \bar{t})/(c\rho)$, неоднородного начального условия $\bar{T}(\bar{y}, 0) = \bar{\Phi}(\bar{y})$ ($\bar{y} \geq y_0$), а также зависимостей коэффициентов температуро- и теплопроводности от времени $a = a(\bar{t})$, $\lambda = \lambda(\bar{t})$, где $a(\bar{t})$, $\lambda(\bar{t})$ – неотрицательные непрерывные функции в области $\bar{t} \in [0, \infty)$. Полученные решения записываются (в случае цилиндрической симметрии) в виде несобственных интегралов (см. ниже), что крайне затрудняет их практическое использование.

Постановка задачи и ее решение. В настоящем сообщении осуществлено прямое интегрирование уравнения теплопроводности в полубесконечной области $y \in [y_0, \infty)$, что свело задачу к последовательности из интегральных тождественных равенств. Решения, удовлетворяющие данным тождествам, сходятся, по всей видимости, в предельном смысле к точному решению. По крайней мере, проведенный численный анализ сходимости приближенных решений показал весьма обнадеживающий результат. Строгое доказательство сходимости решения выходит за рамки представленной работы и может явиться ее дальнейшим развитием.

Придадим задаче безразмерный вид с помощью относительных величин

$$y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad R = \frac{y_0}{L}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\tau}, \quad \tau = \frac{L^2}{a}, \quad T = \frac{\bar{T} - T_0}{\Delta T}.$$

Условия (2)–(4) объединим обобщенным граничным условием. Тогда вместо (1)–(6), положив $y_0 = L$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad y > 1, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\alpha \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=1} + \beta T(y, t) \Big|_{y=1} = \gamma(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$T(y, 0) = 0, \quad y \geq 0,$$

$$T(y, t) \Big|_{y \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \infty} = 0, \quad t \geq 0,$$

при этом $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, а для функции $\gamma(t)$ имеем: $\gamma(t) = (\bar{\gamma}_1(t) - T_0)/\Delta T$, $\gamma(t) = \bar{\gamma}_2(t)L/(\lambda\Delta T)$, $\gamma(t) = (\bar{\gamma}_3(t) - T_0)/\Delta T$ для граничных условий (2)–(4) соответственно.

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$\mathcal{L}^y \equiv \int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$$

и применим его к уравнению (7). Для левой части имеем

$$\mathcal{L}^y \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} (\mathcal{L}^y (T)).$$

Правая часть (7) преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{L}^y \left(\frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) = \int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m \left(\frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dy = \int_{\infty}^y \frac{1}{y^m} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = T.$$

Отсюда получаем уравнение (7), но уже записанное в полной интегральной форме:

$$D_t (\mathcal{L}^y (T)) = T, \quad (9)$$

где $D_t \equiv \frac{d}{dt}$ – дифференциальный оператор. Уравнение (9) определяет температуру в любой точке рассматриваемой области в виде производной по времени от двойного интеграла $\frac{d}{dt} \int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m T dy$. Потребовав абсолютной интегрируемости функции $T(y, t)$ на числовой прямой $\int_1^{\infty} |T(y, t)| dy < \infty$, введем оператор $\mathcal{L}_1 \equiv \int_{\infty}^1 \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$ и применим его к уравнению (1). Тогда

$$D_t (\mathcal{L}_1 (T)) = T|_{y=1}. \quad (10)$$

Проинтегрируем (10) по t . С учетом нулевого начального условия имеем

$$\mathcal{L}_1 (T) = \int_0^t T(1, t) dt. \quad (11)$$

Применив оператор $\mathcal{L}^* \equiv \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$ к уравнению (7), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \int_{\infty}^y \frac{\partial T}{\partial t} y^m dy = \frac{d}{dt} \int_{\infty}^y T y^m dy = \mathcal{L}^* \left(\frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) = \\ &= \int_{\infty}^y \frac{y^m}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\infty}^y = y^m \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned}$$

или в операторной форме

$$D_t (\mathcal{L}^* (T)) = y^m \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (12)$$

где $\mathcal{L}^* \equiv \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$ – интегральный оператор. При $y \rightarrow 1$ уравнение (12) принимает вид

$$D_t (\mathcal{L}_1^* (T)) = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (13)$$

где $\mathcal{L}_1^* \equiv \int_{\infty}^1 (\cdot) dy$. Интегрирование (13) по t дает интегральное тождество

$$\mathcal{L}_1^* (T) \equiv \int_0^t \frac{\partial T(1, t)}{\partial y} dt. \quad (14)$$

Заменим в граничном условии (8) $T(1, t)$ и $\frac{\partial T(1, t)}{\partial y}$ левыми частями уравнений (10) и (13) соответственно

$$\alpha D_t (\mathcal{L}^* (T)) + \beta D_t (\mathcal{L}_1 (T)) = D_t (\alpha \mathcal{L}^* (T) + \beta \mathcal{L}_1 (T)) = \gamma(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно рассматривать как модифицированное граничное условие на поверхности $y = 0$, записанное в интегральной форме. Оно учитывает не только заданное условие на поверх-

ности (8), но и дифференциальное уравнение (7). Проинтегрировав (15) по t , приходим к равенству

$$\alpha \mathcal{L}^*(T) + \beta \mathcal{L}_1(T) \equiv \int_0^t \gamma(t) dt = Y_1(t). \tag{16}$$

Теперь построим интегральные тождества, подобные (16), и содержащие в правой части n -кратный интеграл $Y_n(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma(t) dt^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Введем в рассмотрение интегральные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &\equiv \underbrace{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}^y \dots \mathcal{L}^y}_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{y^m} \int_\infty^y y^m}_{\mathcal{L}_1} \underbrace{\int_\infty^y \frac{1}{y^m} \int_\infty^y y^m}_{\mathcal{L}^y} \dots \underbrace{\int_\infty^y \frac{1}{y^m} \int_\infty^y y^m}_{\mathcal{L}^y} (\cdot) dy^{(2n)}, \\ \mathcal{L}_n^* &\equiv \underbrace{\mathcal{L}_1^* \mathcal{L}^y \dots \mathcal{L}^y}_n = \int_0^1 \underbrace{y^m \int_\infty^y \frac{1}{y^m} \int_\infty^y y^m}_{\mathcal{L}_1^*} \underbrace{\int_\infty^y \frac{1}{y^m} \int_\infty^y y^m}_{\mathcal{L}^y} \dots \underbrace{\int_\infty^y \frac{1}{y^m} \int_\infty^y y^m}_{\mathcal{L}^y} (\cdot) dy^{(2n-1)}. \end{aligned}$$

Применим операторы \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_1^* к уравнению (9):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_2(T)) = \mathcal{L}_1(T), \\ \mathcal{L}_1^*(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_1^* \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_2^*(T)) = \mathcal{L}_1^*(T). \end{aligned} \tag{17}$$

Исключив в (17) правые части с помощью соотношений (11) и (14), приходим к уравнениям

$$D_t(\mathcal{L}_2(T)) = \int_0^t T(1,t) dt, \quad D_t(\mathcal{L}_2^*(T)) = \int_0^t \frac{\partial T(1,t)}{\partial y} dt. \tag{18}$$

Проинтегрируем по t граничное условие (8) и подставим в него левые части уравнений (18):

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^t \frac{\partial T(1,t)}{\partial y} dt + \beta \int_0^t T(1,t) dt &= \int_0^t \gamma(t) dt, \quad t > 0, \\ \alpha D_t(\mathcal{L}_2^*(T)) + \beta D_t(\mathcal{L}_2(T)) &= D_t(\alpha \mathcal{L}_2^*(T) + \beta \mathcal{L}_2(T)) = \int_0^t \gamma(t) dt = Y_1(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Проинтегрировав уравнение (19) по t , приходим к тождественному равенству

$$\alpha \mathcal{L}_2^*(T) + \beta \mathcal{L}_2(T) \equiv Y_2(t).$$

Далее применяя к уравнению (9) операторы \mathcal{L}_2 и \mathcal{L}_2^* , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_2 \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}^y \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_3(T)) = \mathcal{L}_2(T), \\ \mathcal{L}_2^*(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_2^* \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_1^* \mathcal{L}^y \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_3^*(T)) = \mathcal{L}_2^*(T). \end{aligned} \tag{20}$$

Проинтегрировав оба уравнения (20), приходим к двум интегральным тождествам:

$$\mathcal{L}_2(T) \equiv \int_0^t \int_0^t T(0,t) dt^{(2)}, \quad \mathcal{L}_2^*(T) \equiv \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(0,t)}{\partial y} dt^{(2)}. \tag{21}$$

Теперь дважды проинтегрируем по t граничное условие (8) и подставим в него левые части уравнений (21):

$$\alpha \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(1,t)}{\partial y} dt^{(2)} + \beta \int_0^t \int_0^t T(1,t) dt^{(2)} = \int_0^t \int_0^t \gamma(t) dt^{(2)}, \quad t > 0,$$

$$\alpha \mathcal{L}_2^*(T) + \beta \mathcal{L}_2(T) \equiv Y_2(t).$$

С помощью операторов \mathcal{L}_3 и \mathcal{L}_3^* аналогично получаем тождественные равенства

$$\mathcal{L}_3(T) \equiv \int_0^t \int_0^t \int_0^t T(1, t) dt^{(3)}, \quad \mathcal{L}_3^*(T) \equiv \int_0^t \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(1, t)}{\partial y} dt^{(3)},$$

$$\alpha \mathcal{L}_3^*(T) + \beta \mathcal{L}_3(T) \equiv Y_3(t).$$

В итоге имеем три последовательности:

$$\mathcal{L}_n(T) \equiv \int_0^t \underbrace{\dots}_n \int_0^t T(1, t) dt^{(n)}, \quad \mathcal{L}_n^*(T) \equiv \int_0^t \underbrace{\dots}_n \int_0^t \frac{\partial T(1, t)}{\partial y} dt^{(n)}, \tag{22}$$

$$\{\alpha \mathcal{L}_n^*(T) + \beta \mathcal{L}_n(T) \equiv Y_n(t)\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

последняя из которых является (при $n \rightarrow \infty$) альтернативным интегральным представлением уравнения (7) в третьей краевой задаче. На основании (22) получим следующие интегральные представления уравнения теплопроводности (7) для первой и второй краевых задач соответственно:

$$\mathcal{L}_n(T) \equiv \int_0^t \underbrace{\dots}_n \int_0^t \gamma_1(t) dt^{(n)}, \quad \mathcal{L}_n^*(T) \equiv - \int_0^t \underbrace{\dots}_n \int_0^t \gamma_2(t) dt^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{24}$$

Поскольку последовательности (22)–(24) эквивалентны уравнению (7) с соответствующими граничными условиями, то можно предположить, что использование входящих в них интегральных тождественных равенств совместно с граничными условиями явится решением краевой задачи.

Придадим интегральному оператору \mathcal{L}_1 альтернативный вид, произведя его многократное интегрирование по частям. Так, для оператора \mathcal{L}_1 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \equiv \int_0^1 \frac{dy}{y^m} \int_0^y y^m (\cdot) dy &= \left(\int_0^1 \frac{dy}{y^m} \right) \int_0^1 y^m (\cdot) dy - \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{dy}{y^m} \right) y^m (\cdot) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dy}{y^m} \right) y^m (\cdot) - \left(\int_0^y \frac{dy}{y^m} \right) y^m (\cdot) dy = \int_0^1 y^m \left(\int_0^y \frac{dy}{y^m} \right) (\cdot) dy. \end{aligned} \tag{25}$$

В итоге приходим к последовательности из операторов для первой краевой задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(1)} &\equiv \int_0^1 y^m \int_0^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy^{(2)}, \\ \mathcal{L}_2^{(1)} &\equiv \underbrace{\int_0^1 y^m \int_0^y \frac{1}{y^m}}_2 \underbrace{\int_0^y y^m \int_0^y \frac{1}{y^m}}_1 (\cdot) dy^{(4)}, \\ &\dots \\ \mathcal{L}_n^{(1)} &\equiv \underbrace{\int_0^1 y^m \int_0^y \frac{1}{y^m}}_n \dots \underbrace{\int_0^y y^m \int_0^y \frac{1}{y^m}}_2 \underbrace{\int_0^y y^m \int_0^y \frac{1}{y^m}}_1 (\cdot) dy \end{aligned} \tag{26}$$

или в общем виде

$$\mathcal{L}_n^{(1)} \equiv \bar{\mathcal{L}}_1 \underbrace{\bar{\mathcal{L}}_1^y \dots \bar{\mathcal{L}}_1^y}_{n-1}, \tag{27}$$

где $\bar{\mathcal{L}}_1^y \equiv \int_0^y y^m \int_0^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy$, $\bar{\mathcal{L}}_1 \equiv \int_0^1 y^m \int_0^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy$. В частности, для второй краевой задачи в отношении пространства со сферической внутренней поверхностью из (23), (25), (26) приходим к последовательности

$$\int_0^\infty \frac{(y-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} y T(y, t) dy \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma_1(t) dt^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{28}$$

Действуя аналогичным образом и произведя многократное интегрирование по частям правой части второй последовательности (22), получим следующие операторы для второй краевой задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(II)} &\equiv \int_1^\infty y^2(\cdot) dy, \\ \mathcal{L}_2^{(II)} &\equiv \underbrace{\int_1^\infty y^2 \int_1^y \frac{1}{y^2}}_2 \underbrace{\int_1^y y^2(\cdot) dy}_{1} dy^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{L}_n^{(II)} &\equiv \underbrace{\int_1^\infty y^2 \int_1^y \frac{1}{y^2}}_n \dots \underbrace{\int_1^y y^2 \int_1^y \frac{1}{y^2}}_2 \underbrace{\int_1^y y^2(\cdot) dy}_{1} dy^{(2n-2)} \end{aligned} \tag{29}$$

или в общем виде

$$\mathcal{L}_n^{(II)} \equiv \bar{\mathcal{L}}_{n-1}^{(I)} \bar{\mathcal{L}}^*, \tag{30}$$

где $\bar{\mathcal{L}}^* \equiv \int_1^y y^2(\cdot) dy$. Отсюда, основываясь на (24), (29), (30), для рассмотренного выше случая пространства, ограниченного изнутри сферической поверхностью, располагаем такой последовательностью из тождественных равенств:

$$\int_1^\infty \frac{(y-1)^{2n-2}}{(2n-1)!} (2n-2+y) y T(y, t) dy \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma_2(t) dt^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогично на основании (8), (27), (30) приходим к последовательности из интегральных тождественных равенств в отношении третьей краевой задачи

$$\bar{\mathcal{L}}_n^{(III)}(T) \equiv Y_n(t),$$

где $\bar{\mathcal{L}}_n^{(III)} \equiv \bar{\mathcal{L}}_{n-1}^{(I)} \bar{\mathcal{L}}_1^{(III)}$, $\bar{\mathcal{L}}_1^{(III)} \equiv \int_1^y y^m \left(\alpha + \beta \int_1^y \frac{1}{y^m}(\cdot) dy \right) dy$. В частности, для пространства со сферической полостью можно записать

$$\int_1^\infty \left(\beta + (\alpha + \beta) \frac{y-1}{2n-1} \right) \frac{(y-1)^{2n-2}}{(2n-2)!} y(\cdot) dy \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma_3(t) dt^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассмотрим иллюстративный пример. Точное решение задачи для второй краевой задачи при $\partial T(1, t) / \partial r = -1 (y = r)$ для пространства, ограниченного изнутри сферической поверхностью, имеет вид [2]

$$T^*(r, t) = \frac{1}{r} \left(\operatorname{erfc} \frac{1-r}{2\sqrt{t}} - \exp(1-y+t) \operatorname{erfc} \left(\frac{1-r}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right). \tag{31}$$

Представим искомый приближенный температурный профиль следующим образом:

$$T(y, t) = \exp \left(-\frac{(r-1)^2}{kt} \right) \frac{1}{r} \sum_{j=0}^N a_j(t) (r-1)^j, \quad (k > 1). \tag{32}$$

Тогда задача сводится к определению коэффициентов $a_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, (примем $k = 3$) на основе решения системы из $N + 1$ линейных алгебраических уравнений из последовательности (28) и граничного условия $-\partial T(1, t) / \partial r = 1$:

$$\left\{ \sum_{j=0}^N a_j(t) \int_1^{\infty} (r-1)^{2n-2+j} (2n-2+r) \exp\left(-\frac{(r-1)^2}{3t}\right) dr = \frac{(2n-1)!}{n!} t^n, \quad n = \overline{1, N}; \quad a_0 - a_1 = 1 \right\}.$$

На рис. 1, *a* представлены температурные профили, полученные на основе точного решения (31) и приближенного (32) при $N = 6$ и $k = 3$. Как видим, рассчитанные кривые полностью сливаются. Рис. 1, *b* отражает отклонение приближенного решения от точного в момент времени $t = 0,1$ при разных N . Каждые добавляемые две степени полинома дают существенное (почти на порядок) повышение точности аппроксимационного решения, что свидетельствует об очень хорошей сходимости. **Дополнительным подтверждением отмеченной высокой сходимости решения являются** рассчитанные данные среднеквадратичного отклонения $\varepsilon_i = \sqrt{\int_1^{\infty} (T_i - T^*)^2}$ и соответствующих параметров p_{i+1} (i – порядок приближения) (табл. 1). Следует отметить, что **хорошую сходимость** приближенных решений в численных и численно-аналитических методах характеризует $p_{i+1} \sim 2$. В нашем случае, судя по гораздо более высоким значениям p_{i+1} , можно говорить о сходимости с очень высокой скоростью.

Представляет также интерес определение температуры поверхности $T(1, t)$. В табл. 2 приведены данные для $T(1, t = 0,1)$, а также отклонения $E_i = T_i(1, t) - T^*(1, t)$ и относительная ошибка $\bar{E}_i = E_i / T^*(1, t) 100\%$ в зависимости от степени полинома N . Сходимость решения сохраняется на

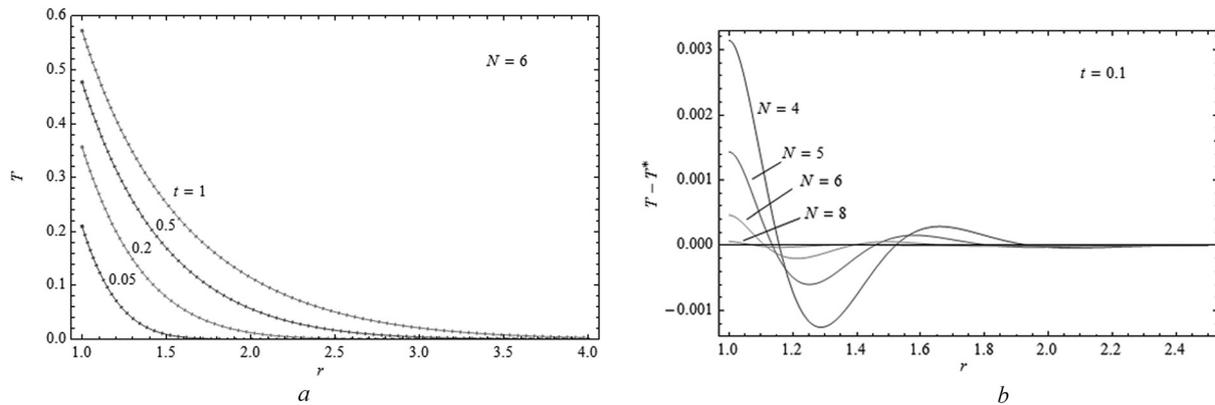


Рис. 1. Температурные профили в пространстве со сферической полостью при действии на поверхности единичного теплового потока, полученные на основе точного решения (сплошные кривые) и приближенного при $N = 6$ (пунктирные кривые) (*a*); отклонения температурных профилей от точного решения для разных степеней полинома в момент времени $t = 0,1$ (*b*)

Fig. 1. Temperature profiles in the space with a spherical cavity at a constant (unique) surface temperature obtained on the basis of the exact solution (solid curves) and the approximate solution at $N = 6$ (dotted curves) (*a*); temperature profile deviations from the exact solution at different polynomial powers at the time moment $t = 0.1$ (*b*)

Т а б л и ц а 1. Сходимость приближенного решения ($t = 0,1$) в зависимости от степени N

T a b l e 1. Convergence of the exact solution ($t = 0.1$) depending on the power N

| Параметр Parameter | Степень полинома, N Polynomial power, N | | | |
|---|--|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 4 | 6 | 8 | 10 |
| $\varepsilon_i = \sqrt{\int_1^{\infty} (T_i - T^*)^2}$ | $9,70 \cdot 10^{-4}$ | $1,26 \cdot 10^{-4}$ | $1,42 \cdot 10^{-5}$ | $1,74 \cdot 10^{-6}$ |
| $p_{i+1} = \ln(\varepsilon_i / \varepsilon_{i+1}) / \ln(N_{i+1} / N_i)$ | | 5,03 | 7,60 | 9,39 |
| $p_{i+1} = \ln(\varepsilon_4 / \varepsilon_{i+1}) / \ln(N_{i+1} / 4)$ | | 5,03 | 6,09 | 6,90 |

Т а б л и ц а 2. Сходимость приближенного решения для температуры поверхности ($t = 0,1$)T a b l e 2. Convergence of the approximate solution for the surface temperature ($t = 0.1$)

| Параметр Parameter | Степень полинома, N Polynomial power, N | | | |
|---|--|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 4 | 6 | 8 | 10 |
| $T^*(1, t = 0,1) = 1 - \exp(t) \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \Big _{t=0,1}$ | 0,276421 | | | |
| $T(1, t = 0,1)$ | 0,279565 | 0,276885 | 0,276580 | 0,276426 |
| E_i | $3,14 \cdot 10^{-3}$ | $4,64 \cdot 10^{-4}$ | $5,85 \cdot 10^{-5}$ | $4,66 \cdot 10^{-6}$ |
| $\bar{E}_i, \%$ | 1,137 | 0,168 | 0,021 | 0,0017 |

высоком уровне. При $N = 10$ относительная ошибка составляет тысячные доли процента, что позволяет считать данное решение условно точным.

Рассмотрим пример пространства с цилиндрической полостью ($m = 1$). Точные решения при единичном тепловом потоке либо фиксированной единичной температуре имеют вид [4; 6]

$$T = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Y_0(sr)J_0(s) - J_0(sr)Y_0(s)}{J_0^2(s) + Y_0^2(s)} \frac{\exp(-s^2 t)}{s} ds, \quad (33)$$

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Y_0(sr)J_1(s) - J_0(sr)Y_1(s)}{J_1^2(s) + Y_1^2(s)} \frac{1 - \exp(-s^2 t)}{s^2} ds, \quad (34)$$

где J_0 , J_1 и Y_0 , Y_1 – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядка соответственно. Решения (33), (34) представлены в виде несобственных интегралов, подынтегральные выражения которых сложны и по существу представляют собой дельта-функцию. Поэтому расчеты по формулам (33), (34) (особенно производных) дают существенные ошибки [11]. В случае переменных коэффициентов либо в условиях более сложного теплообмена решение задачи принимает чрезвычайно громоздкий и трудный для анализа вид.

В виде иллюстративного примера получим приближенное решение задачи для граничного условия первого рода $T(1, t) = 1$, задав температурный профиль в виде полинома третьей степени. Принимая во внимание, что температурное поле в стационарном режиме характеризуется наличием функции $\ln r$, представляется целесообразным дополнительно ввести в полином функцию $\ln r$. Кроме того, анализ приближенных решений для малых времен [12] дает основание ввести дополнительный общий множитель $1/\sqrt{r}$. Таким образом, решение ищем в виде

$$T(r, t) = \left(1 - \ln r + \sum_{j=1}^3 a_j(t)(r-1)^j \right) e^{-\frac{(r-1)^2}{\sqrt{8t}}}. \quad (35)$$

На основе (24)–(27), (35) приходим к системе из трех линейных алгебраических уравнений относительно $a_j(t)$, что в итоге дает аналитическое приближенное решение задачи. Так, для момента времени $t = 0,5$ запишем решение в виде

$$T(r, 0,5) = \frac{1}{\sqrt{r}} (0,753536 + 0,253741r - 0,0069272r^2 - 0,000350r^3 - \ln r) \exp(-(r-1)^2 / 2).$$

На рис. 2, *a* приведены рассчитанные на основе (33), (35) температурные профили для разных моментов времени. Отметим высокую точность аппроксимационного решения (даже при $N = 3$). Полученные кривые практически полностью сливаются с кривыми точного (численного) решения. Это находит подтверждение в величинах отклонений приближенного решения от точного (рис. 2, *b*), которые составляют тысячные доли.

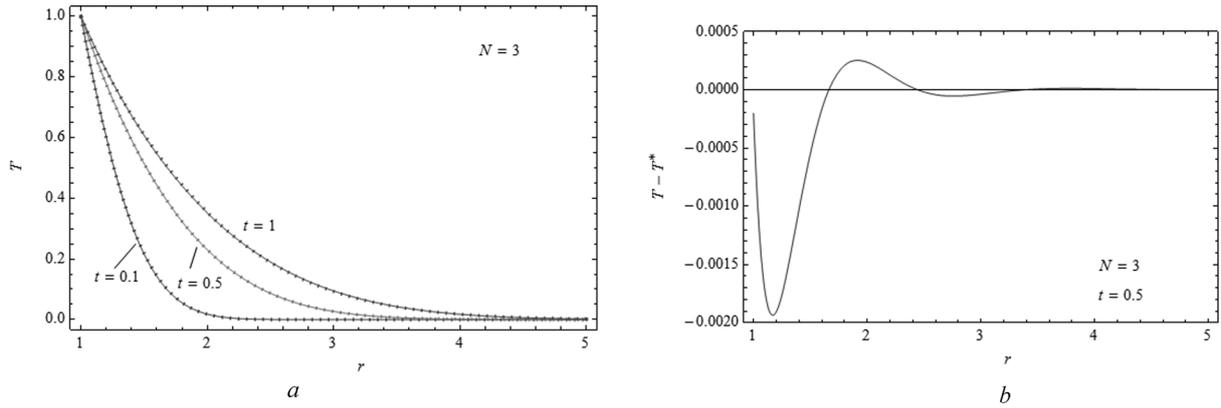


Рис. 2. Температурные профили в пространстве с цилиндрической полостью при постоянной (единичной) температуре поверхности, полученные на основе точного решения (сплошные кривые) и приближенного при $N = 3$ (пунктирные кривые) (a); отклонение температурного профиля от точного решения в момент времени $t = 0,5$ (b)

Fig. 2. Temperature profiles in the space with a cylindrical cavity at a constant (unique) surface temperature obtained on the basis of the exact solution (solid curves) and the approximate solution at $N = 3$ (dotted curves) (a); deviation of the temperature profile from the exact solution at the time moment $t = 0.5$ (b)

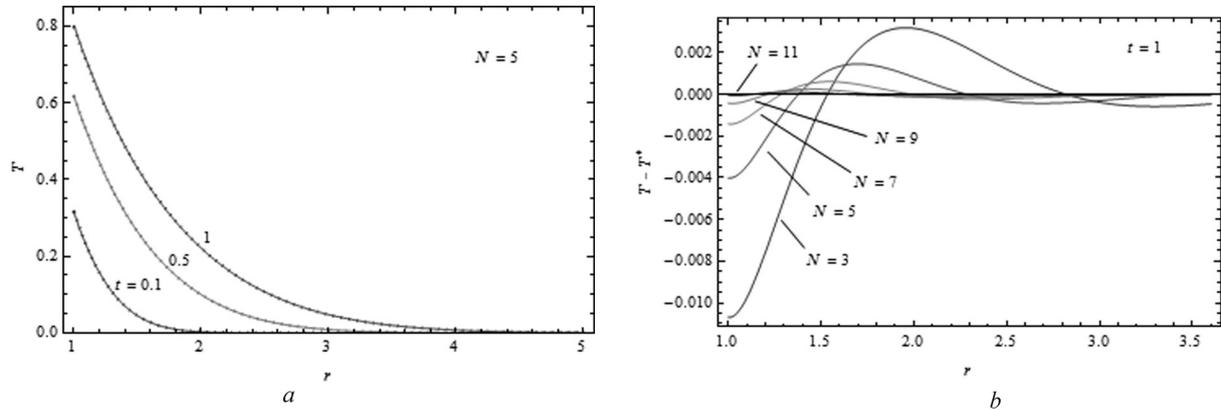


Рис. 3. Температурные профили в пространстве с цилиндрической полостью при постоянной (единичной) плотности теплового потока на поверхности, полученные на основе точного решения (сплошные кривые) и приближенного при $N = 5$ (пунктирные кривые) (a); отклонение температурного профиля от точного решения в момент времени $t = 1$ в решениях с разной степенью полинома (b)

Fig. 3. Temperature profiles in the space with a cylindrical cavity at a constant (unique) surface temperature obtained on the basis of the exact solution (solid curves) and the approximate solution at $N = 5$ (dotted curves) (a); deviation of the temperature profile from the exact solution at the time moment $t = 1$ in the solutions with different polynomial powers (b)

Рассмотрим вторую краевую задачу с единичным тепловым потоком на поверхности цилиндрической полости: $-\frac{\partial T(1, t)}{\partial r} = 1$. Точное решение описывается выражением (34). Запишем приближенное решение задачи в виде урезанного степенного ряда

$$T(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sum_{j=0}^N a_j(t)(r-1)^2 - \ln r \right) \exp\left(-\frac{(r-1)^2}{3t}\right), \tag{36}$$

что сводит задачу к нахождению лишь полиномиальных коэффициентов $a_j(t)$, $j = \overline{0, N}$. Из граничного условия на поверхности с учетом (36) получаем первое уравнение: $a_0 - 2a_1 = 0$. Остальные N вытекают из полученной выше последовательности (22) для $m = 1$. Запишем в виде примера решение задачи для полинома степени $N = 5$ в момент времени $t = 1$:

$$T(r, 1) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(- (r-1)^2 / 3) (0,7980 + 0,3990(r-1) - 0,1016(r-1)^2 + 0,0431(r-1)^3 - 0,0093(r-1)^4 + 0,0008(r-1)^5 - \ln r).$$

Знакопеременные, быстро убывающие полиномиальные коэффициенты обеспечивают быструю сходимость. Рис. 3, *a* отражает практически полное слияние кривых приближенного решения и точного (численного). С увеличением степени полинома решение стремится к точному (рис. 3, *b*).

Заключение. Впервые на основе прямого интегрирования обобщенного уравнения переноса в бесконечной области, ограниченной изнутри плоской, цилиндрической или сферической поверхностями, получены последовательности из интегральных тождественных равенств, учитывающие особенности дифференциального уравнения и граничные условия. Это дало возможность на основе степенных полиномов с общим экспоненциальным множителем построить приближенные решения, максимально приближенные к **точным, что нашло отражение в высокой скорости сходимости.** Построенные решения нестационарной задачи теплопроводности в пространстве, ограниченном изнутри плоской, цилиндрической либо сферической поверхностями, по существу являются точными, поскольку погрешность для широкой области параметров составляет сотые–тысячные доли процента. С увеличением степени полинома отклонение от точного (численного) решения стремится к нулю.

Список использованных источников

1. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М., 1970. – 767 с.
2. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / В. А. Лыков. – М., 1967. – 600 с.
3. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М., 2001. – 480 с.
4. Carslow, H. S. Conduction of Heat in Solids / H. S. Carslow, J. C. Jaeger. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1992. – 510 p.
5. Özisic, M. N. Heat Conduction / M. N. Özisic. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 692 p.
6. Баренблатт, Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения турбулентной теплопроводности / Г. И. Баренблатт, Б. М. Левитан // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1952. – № 16. – С. 253–280.
7. Карташов, Э. М. Об одном классе интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности / Э. М. Карташов // Инженерно-физический журнал. – 2008. – Т. 81, № 1. – С. 123–130.
8. Снеддон, И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М., 1955. – 668 с.
9. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М., 1969. – Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 344 с.
10. Волков, И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление / И. К. Волков, А. Н. Канатников. – М., 2002. – 228 с.
11. Алхасов, А. Б. Радиальная модель извлечения пара из высокотемпературного пласта одиночной скважиной / А. Б. Алхасов, М. М. Рамазанов // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 3. – С. 539–548.
12. Mundry, E. Über die lösung der wärmeleitungsgleichung für den aussenraum eines zylinders mit kreisförmigem querschnitt / E. Mundry // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1966. – Vol. 9, N 3. – P. 189–197. doi.org/10.1016/0017-9310(66)90017-2.

References

1. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Equations of partial derivatives of mathematical physics*. Moscow, 1970. 767 p. (in Russian)
2. Lykov A. V. *Heat conduction theory*. Moscow, 1967. 600 p. (in Russian)
3. Kartashov E. M. *Analytical methods in heat conduction theory of solids*. Moscow, 2001. 480 p. (in Russian)
4. Carslow H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, UK, Oxford University Press, 1992. 510 p.
5. Özisic M. N. *Heat Conduction*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. 692 p.
6. Barenblatt G. I., Levitan B. M. On some boundary-value tasks for the turbulent heat conduction equation. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR – Izvestija], 1952, vol. 16, pp. 253–280. (in Russian)
7. Kartashov E. M. A class of integral transformations for the generalized equation of nonstationary heat conduction. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2008, vol. 81, no. 1, pp. 129–137. doi.org/10.1007/s10891-008-0023-6.
8. Sneddon I. *Fourier transforms*. New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1951. 542 p.
9. Beitmen G., Ardeji A. *Tables of Integral Transformations. V. 1. Transformations of Fourier, Laplace, Mellin*. Moscow, 1969. 344 p. (in Russian)
10. Volkov I. K., Kanatnikov A. N. *Integral transformations and operational calculus*. Moscow, 2002. 228 p. (in Russian)
11. Alhasov A. B., Ramazanov M. M. Radial Model of Steam Extraction from a High-Temperature Bed by Means of a Single Well. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 3, pp. 556–565. doi.org/10.1007/s10891-014-1045-x.
12. Mundry, E. Über die lösung der wärmeleitungsgleichung für den aussenraum eines zylinders mit kreisförmigem querschnitt. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1966, vol. 9, no. 3, pp. 189–197. doi.org/10.1016/0017-9310(66)90017-2.

Информация об авторах

Кот Валерий Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Для цитирования

Кот, В. А. Прямое интегрирование уравнения теплопроводности для полуограниченного пространства / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 108–118.

Information about the authors

Kot Valery Andreevich – Ph. D. (Engineering), Senior researcher, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

For citation

Kot V. A. Direct integration of the heat conduction equation for a semi-bounded space. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 108–118. (in Russian)