ISSN 0002–354X (print)
УДК 519.63
Поступило в редакцию 16.03.2017
Received 16.03.2017

Д. Б. Поляков

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О СОГЛАСОВАННЫХ ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ АППРОКСИМАЦИЙ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

В настоящей работе для линеаризованной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для однородного многомерного квазилинейного параболического уравнения с неограниченной нелинейностью установлены поточечные двусторонние оценки решения, согласованные с аналогичными оценками для дифференциальной задачи. Любопытно отметить, что доказанные двусторонние оценки не зависят от величины коэффициента диффузии. Непосредственным применением данных оценок устанавливается сходимость исследуемой разностной схемы в сеточной норме L_2. Приводится пример расчета по схеме Кранка–Никольсона, когда нарушение условий согласованности дифференциальной и разностной оценок приводит к немонотонности численного решения.

Ключевые слова: принцип максимума, двусторонние оценки, монотонная разностная схема, квазилинейное параболическое уравнение, согласованные оценки решения.

D. B. Poliakov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

CONSISTENT TWO-SIDED ESTIMATES FOR THE SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS QUASI-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS AND THEIR APPROXIMATIONS

(Communicated by Academician I. V. Gaishun)

In this article, for the linearized difference scheme that approximates the Dirichlet problem for the homogeneous multidimensional quasi-linear parabolic equation with unbounded nonlinearity, two-sided point-wise estimates of the solution are established which are fully consistent with the same estimates for the differential problem. It is interesting to note that the proved two-sided estimates do not depend on diffusion coefficient. The direct application of such estimates is the proof of the convergence of the considered difference scheme in the grid norm L_2. An example of the calculation by the Crank–Nicolson difference scheme is given, showing that the violation of the consistency conditions of differential and difference estimates leads to non-monotonic numerical solutions.

Keywords: maximum principle, two-side estimates, monotone finite-difference scheme, quasi-linear parabolic equation, consistent estimates of the solution.

Введение. Одним из классических приемов получения оценок решения дифференциальных и разностных задач является принцип максимума. Он с успехом применяется для доказательства существования и единственности решения начально-краевых задач для параболических и эллиптических уравнений [1]. В теории разностных схем [2] с его помощью исследуются устойчивость и сходимость разностного решения в равномерной норме. При этом привлекаются оценки приближенного решения сверху.

Важными являются также нижние оценки решения дифференциально-разностных задач или в общем случае – двусторонние оценки решения задачи. Для линейных задач они позволяют найти диапазон изменения искомого решения через входные данные задачи (коэффициенты уравнения и правую часть, начальные и граничные условия). В вычислительных методах для задач с неограниченной нелинейностью они позволяют доказывать принадлежность сеточного решения окрестности значений точного решения [3; 4].

В нелинейном случае такие оценки для точного решения позволяют доказывать важную в физических задачах неотрицательность точного решения, находить условия на входные данные, при которых задача является параболической или эллиптической. Для этого, начиная с классической монографии [5], применяется специальная техника, связанная с заменой переменных и минимизацией или максимизацией по параметру некоторых функций.

Данное сообщение посвящено развитию техники из [6] и ее применению для получения двусторонних оценок разностных схем, полностью согласованных с дифференциальной задачей. Отметим, что для линейных задач и задач с ограниченной нелинейностью для метода конечных элементов подобные оценки получены в работах И. Фараго и соавт. [7].

Любопытно отметить, что доказанные двусторонние оценки не зависят от величины коэффициента диффузии. Приводится пример расчета по схеме Кранка–Никольсона, когда нарушение условий согласованности дифференциальной и разностной оценок приводит к немонотонности численного решения.

Когда удается получить двусторонние оценки решения разностных схем, то исследование сходимости приводит для линеаризованных вычислительных алгоритмов к линейной задаче для погрешности метода. Используя метод энергетических неравенств [2], в работе устанавливается сходимость линеаризованной разностной схемы в сеточной норме L_2.

Двусторонние оценки решения начально-краевых задач для параболических уравнений с неограниченной нелинейностью. В области $\bar{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ 0 \le t \le T,\ x = (x_1, x_2),\ \alpha = 1, 2\}$ рассмотрим следующую задачу для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2}, \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1,2, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2}$$

и краевыми условиями Дирихле

$$u(\mathbf{x}, t)\,|_{(\mathbf{x},t)\in \partial Q_T} = \mu(\mathbf{x}, t), \tag{3}$$

где $W_\alpha = k_\alpha(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$

Введем область значений точного решения

$$D_u = \{u \in R: \quad u \in [m_1, m_2], \quad m_\alpha = \mathrm{const}, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Предполагается, что функции $k_\alpha = k_\alpha(u), \quad \alpha = 1, 2,$ достаточно гладкие и существуют константы $k_{\alpha,1}, k_{\alpha,2}, L_\alpha$, такие, что

$$k_{\alpha,1} < k_\alpha(u) \le k_{\alpha,2}, \quad |k'_\alpha(u)| \le L_\alpha, \quad \forall u \in D_u, \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T, \quad \alpha = 1, 2.$$

Предположим, что функция $u(\mathbf{x}, t)$ непрерывна в $\bar{Q}_T$, имеет внутри Q_T непрерывные производные, входящие в (1), и удовлетворяет (1) и начальным и граничным условиям (2) и (3). Пусть $Q_{t_1} = \{(\mathbf{x}, t) \in Q_T : t \le t_1\}$.

Тогда имеет место

Т е о р е м а 1 (О. А. Ладыженская [7]). *Для решения $u(\mathbf{x}, t)$ задачи (1)–(3) в любой точке $(\mathbf{x}, t_1) \in \bar{Q}_T$ имеет место двусторонняя оценка:*

$$u(\mathbf{x}, t_1) \ge m_1 = \sup_{\lambda > 0}\left(e^{\lambda t_1} \min\left\{0, \min_{Q_{t_1}}\{\mu, u_0\} e^{-\lambda t}\right\}\right),$$

$$u(\mathbf{x}, t_1) \le m_2 = \inf_{\lambda > 0}\left(e^{\lambda t_1} \max\left\{0, \max_{Q_{t_1}}\{\mu, u_0\} e^{-\lambda t}\right\}\right).$$

Двусторонние оценки решения разностных схем. Для аппроксимации задачи (1)–(3) на равномерной пространственно-временной сетке в прямоугольнике $\overline{Q}_T$

$$\overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_{\alpha,i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha;\ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, ..., N_0; \tau N_0 = T\}, \quad \overline{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{t_{N_0} = T\},$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_{h_1} \times \overline{\omega}_{h_2} \times \overline{\omega}_\tau, \quad \omega_{t_n} = \{(\mathbf{x}, t) \in \overline{\omega} : t \le t_n\}$$

используем линеаризованную разностную схему

$$y_t = (a_1(y)\hat{y}_{\overline{x}_1})_{x_1} + (a_2(y)\hat{y}_{\overline{x}_2})_{x_2}, \tag{4}$$

$$y(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{\omega}_h, \tag{5}$$

$$y\,|_{\overline{\omega} \cap \partial Q_T} = \mu. \tag{6}$$

Шаблонные функционалы

$$a_\alpha(y) = 0,5(k_\alpha(y_{i_\alpha - 1}) + k_\alpha(y_{i_\alpha})), \quad \alpha = 1, 2,$$

как обычно выбираются из условия аппроксимации второго порядка по пространственным переменным для эллиптического оператора [2]:

$$(a_\alpha(u)\hat{u}_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = O(h_\alpha^2 + \tau).$$

Здесь и далее мы используем обычные обозначения теории разностных схем [2]:

$$y = y_{i_1 i_2}^n = y(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, t_n), \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau, \quad \hat{y} = y_{i_1 i_2}^{n+1},$$

$$v_{\overline{x}_\alpha} = (v_{i_\alpha} - v_{i_\alpha - 1})/h_\alpha, \quad v_{x_\alpha} = (v_{i_\alpha + 1} - v_{i_\alpha})/h_\alpha.$$

Т е о р е м а 2. *Для решения $y(\mathbf{x}, t)$ задачи (4)–(6) в любой точке $(\mathbf{x}, t_n) \in \omega$ имеет место двусторонняя оценка*

$$y(x, t_n) \ge m_{1,\tau} = \sup_{\lambda > 0}\left(e^{\lambda t_n} \min\left\{0, \min_{\omega_{t_n}}\{\mu, u_0\}e^{-\lambda t}\right\}\right),$$

$$y(x, t_n) \le m_{2,\tau} = \inf_{\lambda > 0}\left(e^{\lambda t_n} \max\left\{0, \max_{\omega_{t_n}}\{\mu, u_0\}e^{-\lambda t}\right\}\right).$$

З а м е ч а н и е 1. *Полученные результаты в теоремах 1 и 2 имеют вид*

$$m_1 \le u \le m_2, \quad m_{1,\tau} \le y \le m_{2,\tau},$$

где

$$m_1 = m_{1,\tau}, \quad m_{2,\tau} = m_2.$$

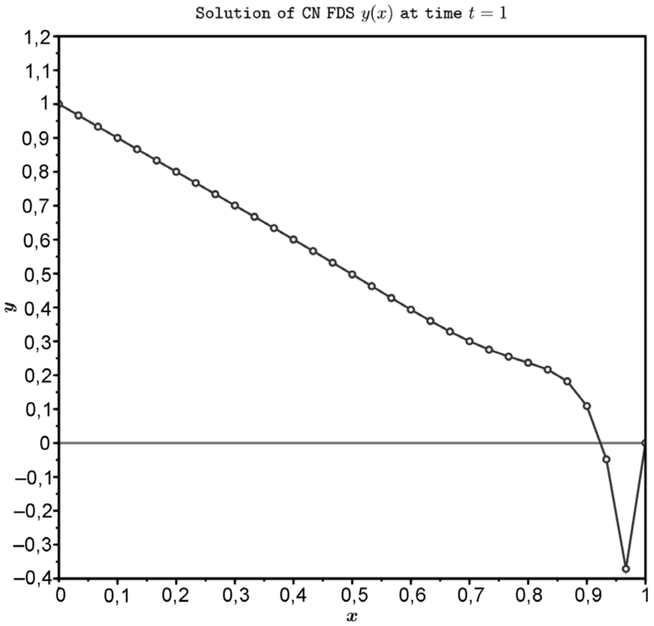
В этом смысле разностные оценки наследуют свойства дифференциальной задачи.

Таким образом, мы показали, что решение линеаризованной разностной схемы (4)–(6) принадлежит области значений точного решения дифференциальной задачи (1)–(3) без условий на шаги сетки. Возникает вопрос: насколько это существенно?

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для одномерного линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1, \ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

Двусторонняя оценка решения для этой задачи имеет вид $0 \le u \le 1$.



Численное решение при t = 1

Numerical solution at t = 1

Аппроксимируем данное уравнение схемой Кранка–Никольсона [7] с указанными ниже параметрами:

$$y_t = y^{(0,5)}_{\bar{x}x}, \quad y^{(0,5)} = 0,5(\hat{y} + y),$$

$$h = \frac{1}{30}, \quad \tau = \frac{1}{11}.$$

Как видно из рисунка, решение разностной схемы не сохраняет положительность, и появляются нефизические осцилляции. Их причина, как известно [2], в нарушении достаточной условной монотонности разностной схемы Кранка–Никольсона, которые имеют следующий вид: $\tau \le \dfrac{h^2}{2}$.

Сходимость разностной схемы в сеточной норме L_2. Когда удается получить двусторонние оценки решения разностных схем, то исследование сходимости приводит для линеаризованных вычислительных алгоритмов к линейной задаче для погрешности метода $z = y - u$. В данном разделе будем дополнительно предполагать, что точное решение задачи (1)–(3) достаточно гладкое, а именно $u(\mathbf{x}, t) \in C^{4,2}(Q_T)$. Определим следующее скалярное произведение и соответствующую норму:

$$(u, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 u_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2}, \quad \| u \| = \sqrt{(u, u)}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Для решения разностной схемы (4)–(6) справедлива следующая оценка точности метода:*

$$\| z^{n+1} \| \le c(h_1^2 + h_2^2 + \tau), \quad c = \text{const} > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. *Обобщение результатов данной работы на задачи конвекции-диффузии произвольной размерности носят редакционный характер.*

Список использованных источников

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

3. Matus, P. P. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations / P. P. Matus, L. M. Hieu, L. G. Volkov // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 310. – P. 186–199. doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.006.

4. Matus, P. On Convergence of Difference Schemes for IBVP for Quasilinear Parabolic Equations with Generalized Solutions // Comp. Meth. Appl. Math. – 2014. – Vol. 14, N 3. – P. 361–371. doi.org/10.1515/cmam-2014-0008.

5. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

6. Ладыженская, О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 149–177.

7. Farago, I. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems / I. Farago, R. Horvath // SIAM J. Sci. Comput. – 2006. – Vol. 28, N 6. – P. 2313–2336. doi.org/10.1137/050627241.

References

1. Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (in Russian).

2. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 656 p. (in Russian).

3. Matus P. P., Hieu L. M., Volkov L. G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 310, pp. 186–199. doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.006.

4. Matus P. On Convergence of Difference Schemes for IBVP for Quasilinear Parabolic Equations with Generalized Solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 361–371. doi.org/10.1515/cmam-2014-0008.

5. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p. (in Russian).

6. Ladyzhenskaya O. A. Solution of the first boundary problem in the large for quasi-linear parabolic equations. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Moscow Mathematical Society], 1958, vol. 7, pp. 149–177 (in Russian).

7. Farago I., Horvath R. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, vol. 28, no. 6, pp. 2313–2336. doi.org/10.1137/050627241.

Информация об авторе

Поляков Дмитрий Борисович – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mitia87@gmail.com.

Information about the author

Poliakov Dmitriy Borisovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mitia87@gmail.com.

Для цитирования

Поляков, Д. Б. О согласованных двусторонних оценках решений однородных квазилинейных параболических уравнений и их аппроксимаций / Д. Б. Поляков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 2. – С. 13–17.

For citation

Poliakov D. B. Consistent two-sided estimates for the solutions of homogeneous quasi-linear parabolic equations and their approximations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 2, pp. 13–17 (in Russian).