

ФИЗИКА**PHYSICS**

УДК 544.273.4;544.022.2

Поступило в редакцию 15.02.2017

Received 15.02.2017

Н. Л. Черкас¹, С. Л. Черкас²¹*Военная Академия Республики Беларусь, Минск, Республика Беларусь*²*Институт ядерных проблем БГУ, Минск, Республика Беларусь***КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ТВЕРДЫХ ДИСКОВ НА ПЛОСКОСТИ***(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)*

В рамках квазикристаллической модели предложен новый метод описания радиальной функции распределения твердых дисков на плоскости. Радиальная функция распределения моделируется размазыванием квадратной решетки и образованием дефектов типа вакансий. Наилучшие совпадения с радиальной функцией распределения, полученной решением интегрального уравнения Перкуса–Йевика, достигается в результате использования суперпозиции квадратной и гексагональной решеток. Примесь гексагональной решетки существенна на малых расстояниях. Найдены зависимости постоянной решетки, ширины размывания, примеси гексагональной решетки от параметра заполнения. Предполагается, что данный метод будет работать и области более высоких плотностей, где он может быть использован для описания перехода из жидкой фазы в гексатическую и затем в кристаллическую.

Ключевые слова: радиальная функция распределения, твердые диски на плоскости, вейвлеты, квазикристаллическая модель жидкости.

N. L. Cherkas¹, S. L. Cherkas²¹*Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*²*Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus***QUASI-CRYSTAL MODEL OF THE RADIAL DISTRIBUTION FUNCTION
FOR HARD DISKS IN THE PLANE***(Communicated by Corresponding Member L. M. Tomilchik)*

The quasi-crystal model of the radial distribution function for hard disks in the plane is suggested. It is shown that the coincidence with the distribution function, obtained by solving Percus–Yevick's equation, is found by smoothing a square lattice and injecting vacancy-type defects into it. A better approximation is reached when the lattice is a result of a mixture of smoothed square and hexagonal lattices. Impurity of a hexagonal lattice is considerable at short distances. Dependences of lattice constants, smoothing widths and impurity on the filling parameter are found. In conclusion, it is stated that a basis of such a chaotic system apparently as a gas of hard disks in the plane at rather small filling parameters is a square lattice with some impurity of the hexagonal lattice at small distances. It is of importance to carry out investigations in a range of higher concentration and to compare with the modeling by the Monte-Carlo method.

Keywords: radial distribution function, wavelet, hard disks in a plane, quasicrystal model of liquid.

Введение. Система твердых дисков на плоскости, с одной стороны, привлекает математиков и физиков своей простотой, с другой – на примере этой системы можно исследовать важнейшие математические и физические закономерности, такие как переход от порядка к беспорядку, от жидкости к кристаллу [1–7]. Наиболее удивительным для данной системы оказывается то, что

фазовый переход из жидкой фазы в кристаллическую осуществляется через гексатическую фазу [5; 7]. Однако возникает вопрос, в каких терминах можно описывать указанные фазовые переходы? Одним из методов может являться исследование зависимости от плотности параметров, описывающих бинарную радиальную функцию распределения. Бинарная функция распределения характеризует вероятность нахождения частицы в окрестности одной изначально выбранной частицы и определяет такие важнейшие характеристики системы твердых частиц, как сжимаемость и уравнение состояния [8; 9]. Предельным случаем функции распределения твердых дисков при увеличении концентрации является гексагональная решетка, т. е. двумерный кристалл. Естественно считать, что при концентрациях, близких к максимальной, двухчастичную функцию распределения можно описать размытием гексагональной решетки, что представляет собой так называемую квазикристаллическую модель (см. [10; 11] и приведенные там ссылки). При не слишком больших концентрациях частиц достаточно хорошо работают методы интегральных уравнений [9], основанные на расщеплении цепочки Боголюбова, в частности, интегральное уравнение Перкуса–Йефика [2; 9]. Возникает вопрос, может ли бинарная функция распределения быть описана в рамках квазикристаллической модели не только в непосредственной близости к кристаллу, но и при средних концентрациях, в той области, где работает приближение Перкуса–Йефика? В данной работе предлагается квазикристаллическая модель твердых дисков на плоскости, которая удовлетворительно согласуется с расчетами по уравнению Перкуса–Йефика.

Квазикристаллическая модель. Двухчастичная функция распределения $g(\mathbf{p})$ позволяет описать среднее число частиц $\Delta N = g(\mathbf{p})d^2\mathbf{p}$ в окрестности одной произвольно выбранной частицы, которая считается находящейся в начале координат. Функция распределения равна нулю при $\rho < 2R$, где R – радиус диска, поскольку частицы считаются непроницаемыми. На большом расстоянии от выбранной частицы функция $g(\mathbf{p}) = n_0$, где n_0 – средняя поверхностная плотность дисков. В предельном случае максимально плотной упаковки заполненная дисками плоскость представляет собой идеальный двумерный кристалл, так что

$$\tilde{g}(\mathbf{p}) = \sum_i \delta^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i), \quad (1)$$

где $\delta^{(2)}(\mathbf{p})$ представляет собой двумерную дельта-функцию Дирака; \mathbf{p}_i – радиус-векторы частиц в идеальной решетке. Суммирование в (1) ведется по всем частицам, кроме одной, находящейся в начале координат. Поскольку на одну ячейку кристалла приходится по одной частице, средняя плотность частиц в идеальном кристалле легко вычисляется: $\tilde{n}_0 = \frac{1}{S} = \left(\frac{Na^2}{4} \tan \frac{\pi}{M} \right)^{-1}$, где S – площадь элементарной ячейки; a – постоянная решетки (диаметр вписанной в ячейку элементарной окружности, рис. 1); M – число сторон элементарной ячейки.

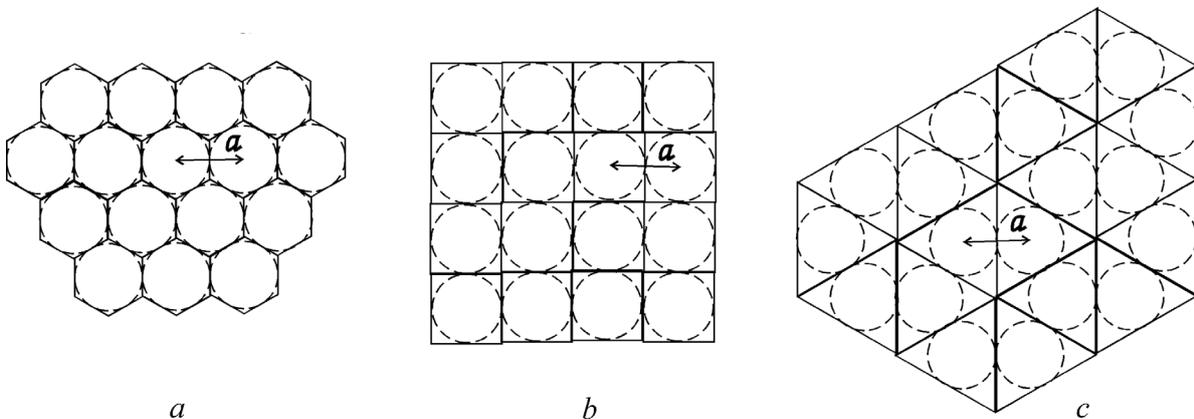


Рис. 1. Двумерные решетки: гексагональная (a), квадратная (b), треугольная (c)

Fig. 1. Two-dimensional lattices: hexagonal (a), square (b), triangular (c)

Корреляционная функция записывается как $\tilde{K}(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{g}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{n}_0$. Переход от порядка (идеального кристалла) к беспорядку (газу твердых дисков) осуществляется, с одной стороны, образованием дефектов типа вакансий, когда существует вероятность отсутствия частицы в узле [11], с другой – разрушением самой решетки [11]. На первом этапе функцию распределения запишем как

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} n_0 + \tilde{K}(\boldsymbol{\rho}) = n_0 + \left(\sum_i \delta^{(2)}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i) - \tilde{n}_0 \right) e^{-\lambda(\rho - 2R)}, & \rho > 2R, \\ 0 & , \rho < 2R, \end{cases} \quad (2)$$

где n_0 – поверхностная плотность частиц в образце; $\tilde{g}(\boldsymbol{\rho})$ обозначает функцию распределения на данном этапе. При этом подразумевается, что радиус дисков меньше радиуса вписанной в ячейку окружности. Формула (2) записана в предположении, что корреляционная функция идеального кристалла $\tilde{K}(\boldsymbol{\rho})$ экспоненциально ограничивается при больших ρ , причем принимается во внимание, что $\tilde{g}(\boldsymbol{\rho})$ должна иметь правильную асимптотику на бесконечности, где она равна n_0 , и при $\rho < 2R$, где она равна нулю, поскольку твердые диски не могут сблизиться на расстояние меньше диаметра. На втором этапе осуществляется размазывание решетки с помощью некоторого интегрального преобразования

$$g(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\rho' > 2R} G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \tilde{g}(\boldsymbol{\rho}') d^2 \boldsymbol{\rho}', \quad \rho > 2R, \quad (3)$$

где мы положили

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \Delta(\rho) \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho})^2}{2\sigma^2(\rho)}\right).$$

Интегральное преобразование осуществляет отображение множества интегрируемых функций, определенных на двумерной области $\rho > 2R$ само в себя. При $\rho < 2R$ по-прежнему считается $g(\boldsymbol{\rho}) = 0$. Нормировочный множитель $\Delta(\rho)$ равен

$$\Delta(\rho) = \left(\int_{\rho' > 2R} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho})^2}{2\sigma^2(\rho)}\right) d^2 \boldsymbol{\rho}' \right)^{-1} = \left(2\pi \int_{2R}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\rho'^2 + \rho^2)}{2\sigma^2(\rho)}\right) I_0\left(\frac{\rho'\rho}{\sigma^2(\rho)}\right) \rho' d\rho' \right)^{-1},$$

где $I_0(z)$ – функция Бесселя. В данной нормировке при действии преобразования (3) на функцию, равную некоторой константе, она не меняется. В результате находим

$$g(\boldsymbol{\rho}) = n_0 + \Delta(\rho) \left(\sum_i \exp\left(-\lambda(\rho_i - 2R) - \frac{(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho})^2}{2\sigma^2(\rho)}\right) - 2\pi \tilde{n}_0 \int_{2R}^{\infty} \exp\left(-\lambda(\rho' - 2R) - \frac{(\rho'^2 + \rho^2)}{2\sigma^2(\rho)}\right) I_0\left(\frac{\rho'\rho}{\sigma^2(\rho)}\right) \rho' d\rho' \right).$$

Поскольку мы не рассматриваем ориентационный порядок и его потерю (что также является интересной проблемой), то проведем усреднение $\bar{g}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\boldsymbol{\rho}) d\phi$ по углу, задающему ориентацию вектора $\boldsymbol{\rho}$ в полярных координатах. Таким образом, все направления равноправны, и функция распределения зависит только от расстояния, но не зависит от направления. Заметим, что обычно обсуждается радиальная функция распределения $W(\rho) = \bar{g}(\rho) / n_0$, причем диаметр твердых дисков полагается равным единице. В результате приходим к следующей формуле для радиальной функции распределения:

$$W(\rho) = 1 + 2\pi\Delta(\rho) \left(\frac{1}{n_0} \sum_i N_i \exp \left(-\lambda(\rho_i - 1) - \frac{(\rho_i^2 + \rho^2)}{2\sigma^2(\rho)} \right) I_0 \left(\frac{\rho_i \rho}{\sigma^2(\rho)} \right) - \right. \\ \left. \frac{\tilde{n}_0}{n_0} \int_1^\infty \exp \left(-\lambda(\rho' - 1) - \frac{(\rho'^2 + \rho^2)}{2\sigma^2(\rho)} \right) I_0 \left(\frac{\rho' \rho}{\sigma^2(\rho)} \right) \rho' d\rho' \right), \quad (4)$$

где суммирование ведется уже не по отдельным узлам решетки, а по координационным окружностям, на которых находятся узлы, расположенные на одном расстоянии от начала координат; N_i – число узлов, лежащих на i -й координационной окружности.

Сравнение с решениями уравнения Перкуса–Йефика. Следующим вопросом является, какая именно решетка должна быть размазана, и как соотносится постоянная решетки a с радиусом дисков в зависимости от параметра заполнения $\eta = n_0 \pi R^2$. Оказывается, что в диапазоне параметров заполнения 0,3–0,62 качественное соответствие с решениями уравнения Перкуса–Йефика достигается, если размазывать квадратную решетку, причем считать параметр размывания $\sigma(\rho)$, зависящим от расстояния, т. е. пики при увеличении расстояния от выбранной частицы размываются сильнее. В частности, была использована следующая зависимость $\sigma(\rho) = \gamma\sqrt{\rho}$. С другой стороны, очевидно, что при увеличении концентрации мы должны прийти к гексагональной решетке. Таким образом, осуществляется переход от квадратной решетки к гексагональной, который может быть описан в рамках следующей модели. Предположим, что радиальная функция распределения является суммой распределений, полученных размыванием квадратной и гексагональной решеток с весовыми функциями, зависящими от расстояния:

$$W(\rho) = W_{\text{squ}}(\rho)(1 - e^{-b\rho^2}) + W_{\text{gex}}(\rho)e^{-b\rho^2}. \quad (5)$$

При больших параметрах b радиальная функция распределения определяется в основном квадратной решеткой, и только в окрестности края диска начинает играть роль гексагональная решетка. Сравнение с решениями уравнения Перкуса–Йефика показывает, что, действительно, добавление примеси гексагональной решетки улучшает совпадение. В то же время мы обнаружили, что добавление примеси треугольной решетки не приводит к улучшению, поэтому данная решетка в (5) не используется.

Для простоты мы предполагали, что параметры γ и λ , определяющие размывание и количество дефектов-вакансий, одни и те же для обеих решеток, однако константы решеток брались различными. В табл. 1 приведены параметры, при которых достигается качественное совпадение с решениями уравнений Перкуса–Йефика (рис. 2, 3). Следует заметить, что для твердых дисков на плоскости уравнение Перкуса–Йефика аналитически не решается, поэтому использовались численные методы.

Константы решеток a_{squ} и a_{gex} для моделирования квазикристаллической радиальной функции распределения при различных коэффициентах заполнения η , а также другие параметры, фигурирующие в формулах (4), (5)

Lattice constants a_{squ} and a_{gex} for the modeling of the quasi-crystal radial distribution function at different filling coefficients η as well as other parameters available in formulas (4), (5)

η	a_{squ}	a_{gex}	γ	λ	b
0,62	1,04	1,1	0,158	0,027	0,4
0,6	1,056	1,12	0,176	0,03	0,41
0,55	1,095	1,14	0,192	0,1	0,45
0,5	1,11	1,2	0,2	0,2	0,53
0,45	1,112	1,3	0,209	0,5	0,7
0,4	1,115	1,6	0,213	0,9	1,1
0,35	1,117	2,1	0,224	1,4	0,75
0,3	1,12	2,3	0,236	2	0,6

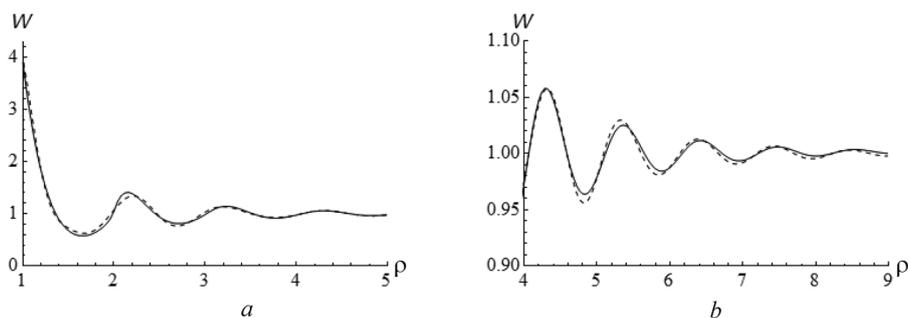


Рис. 2. Радиальная функция распределения для параметра заполнения $\eta = 0,62$ в диапазоне $\rho \in \{1, 5\}$ (a), в диапазоне $\rho \in \{4, 9\}$ («хвост» распределения) (b). Сплошная линия – решение уравнения Перкуса–Йевики, штриховая – квазикристаллическая модель

Fig. 2. Radial distribution function for the filling parameter $\eta = 0.62$ over the range $\rho \in \{1, 5\}$ (a), over the range $\rho \in \{4, 9\}$ (distribution “tail”) (b). Solid line – Percus–Yevick’s equation solution, dotted line – the quasi-crystal model

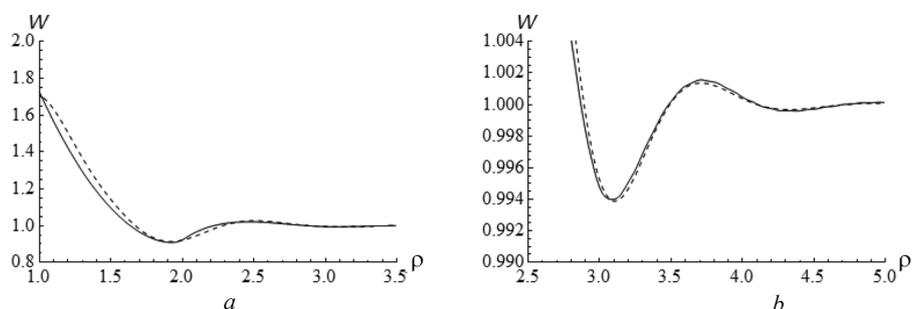


Рис. 3. Радиальная функция распределения для параметра заполнения $\eta = 0,3$ в диапазоне $\rho \in \{1, 3, 5\}$ (a), в диапазоне $\rho \in \{2, 5, 5\}$ («хвост» распределения) (b). Сплошная линия – решение уравнения Перкуса–Йевики, штриховая – квазикристаллическая модель

Fig. 3. Radial distribution function for the filling parameter $\eta = 0.3$ over the range $\rho \in \{1, 3, 5\}$ (a), over the range $\rho \in \{2.5, 5\}$ (distribution “tail”) (b). Solid line – Percus–Yevick’s equation solution, dotted line – the quasi-crystal model

Уравнение Перкуса–Йевики работает до параметров заполнения чуть более 0,6. В данной работе параметры формул (4), (5) подбирались вручную для достижения совпадения с решениями уравнения Перкуса–Йевики. В принципе, данная модель может служить базисом для вариационных методов, позволяющих найти параметры размазывания, дефектов и постоянные решеток путем минимизации некоторого функционала [12]. Также представляется интересным рассмотреть данную модель при больших параметрах заполнения, в области, где работает только метод Монте-Карло [1; 3].

Заключение. Таким образом, можно считать, что в основе такой, казалось бы, хаотической системы, как газ твердых дисков на плоскости даже при сравнительно небольших параметрах заполнения лежит квадратная решетка с некоторой примесью гексагональной решетки, существенной при малых расстояниях от центральной частицы. Обращает на себя внимание тот факт, что достаточно хорошо описываются хвосты распределений, которые трудно получить с помощью моделирования методом Монте-Карло. С математической точки зрения рассматриваемая система размазанных функций представляет собой частный случай вейвлетов. Напомним, что вейвлеты – это система локализованных функций, образуемых из базовой функции изменением центра и масштаба. Выбор системы вейвлетов во многом произволен. Выше было показано, что данная система вейвлетов позволяет качественно правильно описывать решения уравнения Перкуса–Йевики. При более высоких концентрациях, когда система становится ближе к кристаллу, точность аппроксимации должна возрасти. Предложенный в данной работе метод описания радиальной функции распределения может служить инструментом для изучения перехода системы твердых дисков из жидкого состояния в гексатическую фазу, который, как предполагают [7], является переходом первого рода. Если это так, то параметры, описывающие корреляцион-

ную функцию (константы решеток, величина размывания, примесь гексагональной решетки), должны меняться скачкообразно с изменением концентрации дисков. Мы позволим себе высказать гипотезу, что при переходе к гексатической фазе скачкообразно обращается в нуль примесь квадратной решетки. Для дальнейшего исследования данных предположений необходимо сравнение с методом моделирования Монте-Карло.

С практической точки зрения, описание радиальной функции распределения аналитическими выражениями, предложенными в данной работе, позволит повысить точность вычисления интегралов от радиальной функции распределения, возникающих в задаче о прохождении электромагнитной волны через слой плотноупакованных сферических частиц [13] или слой с упорядоченными цилиндрическими порами [14].

Благодарности. Авторы признательны И. С. Щукиной за разработку компьютерной программы для решения уравнения Перкуса–Йевика.

Acknowledgement. The authors acknowledge I. S. Shchukina for the development of the computer program for solution of the Percus–Yevick equation.

Список использованных источников

1. Fernandez, J. F. Melting of systems of hard disks by Monte Carlo simulations / J. F. Fernandez, J. J. Alonso, J. Stankiewicz // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 55, N 1. – P. 750–764. doi.org/10.1103/physreve.55.750.
2. Adda-Bedia, M. Solution of the Percus–Yevick equation for hard disks / M. Adda-Bedia, E. Katzav, D. Vella // *J. Chem. Phys.* – 2008. – Vol. 128, N 18. – P. 184508-6. doi.org/10.1063/1.2919123.
3. Kapfer, S. C. Sampling from a polytope and hard-disk Monte Carlo / S. C. Kapfer, W. Krauth // *J. Phys.: conf. ser.* – 2013. – Vol. 454. – P. 012031-12. doi.org/10.1088/1742-6596/454/1/012031.
4. Gaal, A. T. Long-range order in a hard disk model in statistical mechanics / A. T. Gaal // *Electron. Comm. in Probab.* – 2014. – Vol. 19, N 9. – 9 pp. doi.org/10.1214/ecp.v19-3047.
5. Atkinson, S. Existence of isostatic, maximally random jammed monodisperse hard-disk packings / S. Atkinson, F. H. Stillinger, S. Torquato // *Proc. National Acad. Sci.* – 2014. – Vol. 111, N 52. – P. 18436–18441. doi.org/10.1073/pnas.1408371112.
6. Melting of 2D liquid crystal colloidal structure / A. Brodin [et al.] // *Cond. Matter Phys.* – 2010. – Vol. 13, N 3. – P. 33601-12. doi.org/10.5488/cmp.13.33601.
7. Hard-disk equation of state: First-order liquid-hexatic transition in two dimensions with three simulation methods / M. Engel [et al.] // *Phys. Rev. E.* – 2013. – Vol. 87, N 4. – P. 042134-8. doi.org/10.1103/physreve.87.042134.
8. Sokołowski, S. A note on the two-dimensional radial distribution function / S. Sokołowski // *Czec. J. Phys. B.* – 1978. – Vol. 28, N 7. – P. 713–720. doi.org/10.1007/bf01595993.
9. Коваленко, Н. П. Метод интегральных уравнений в статистической теории жидкости / Н. П. Коваленко, И. З. Фишер // *УФН.* – 1972. – Т. 108, № 2. – С. 209–239.
10. Аринштейн, Э. А. Модель фазового перехода жидкость–кристалл и квазикристаллическая модель жидкости / Э. А. Аринштейн // *ТМФ.* – 2007. – Т. 151, № 1. – С. 155–171. doi.org/10.4213/tmf6018.
11. Черкас, Н. Л. Модель радиальной функции распределения пор в слое пористого оксида алюминия / Н. Л. Черкас, С. Л. Черкас // *Кристаллография.* – 2016. – Т. 61, № 2. – С. 285–290. doi.org/10.7868/s0023476115060053.
12. Аринштейн, Э. А. Прямой вариационный метод в теории жидкости / Э. А. Аринштейн // *ТМФ.* – 2004. – Т. 141, № 1. – С. 152–160. doi.org/10.4213/tmf109.
13. Hong, K. M. Multiple scattering of electromagnetic waves by a crowded monolayer of spheres: Application to migration imaging films / K. M. Hong // *JOSA.* – 1980. – Vol. 70, N 7. – P. 821–826. doi.org/10.1364/josa.70.000821.
14. Anisotropic light scattering in nanoporous materials: A Photon Density of States Effect / A. A. Lutich [et al.] // *Nano Lett.* – 2004. – Vol. 4, N 9. – P. 1755–1758. doi.org/10.1021/nl049620e.

References

1. Fernandez J. F., Alonso J. J., Stankiewicz J. Melting of systems of hard disks by Monte Carlo simulations. *Physical Review E*, 1997, vol. 55, no. 1, pp. 750–764. doi.org/10.1103/physreve.55.750.
2. Adda-Bedia M., Katzav E., Vella D. Solution of the Percus–Yevick equation for hard disks. *The Journal of Chemical Physics*, 2008, vol. 128, no. 18, pp. 184508-6. doi.org/10.1063/1.2919123.
3. Kapfer S. C., Krauth W. Sampling from a polytope and hard-disk Monte Carlo. *Journal of Physics: Conference Series*, 2013, vol. 454, no. 1, pp. 012031-12. doi.org/10.1088/1742-6596/454/1/012031.
4. Gaal A. T. Long-range order in a hard disk model in statistical mechanics. *Electronic Communications in Probability*, 2014, vol. 19, no. 9, 9 pp. doi.org/10.1214/ecp.v19-3047.
5. Atkinson S., Stillinger F. H., Torquato S. Existence of isostatic, maximally random jammed monodisperse hard-disk packings. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2014, vol. 111, no. 52, pp. 18436–18441. doi.org/10.1073/pnas.1408371112.

6. Brodin A., Nych A., Ognysta U., Lev B., Nazarenko V., Skarabot M., Musevio I. Melting of 2D liquid crystal colloidal structure. *Condensed Matter Physics*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 33601-12. doi.org/10.5488/cmp.13.33601.
7. Engel M., Anderson J. A., Glotzer S. C., Isobe M., Bernard E. P., Krauth W., Hard-disk equation of state: First-order liquid-hexatic transition in two dimensions with three simulation methods. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, no. 4, pp. 042134-8. doi.org/10.1103/physreve.87.042134.
8. Sokołowski S. A note on the two-dimensional radial distribution function. *Czechoslovak Journal of Physics*, 1978, vol. 28, no. 7, pp. 713–720. doi.org/10.1007/bf01595993.
9. Kovalenko N. P., Fisher I. Z. Method of integral equations in statistical theory of liquids. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1972, vol. 108, no. 10, pp. 209–239 (in Russian). doi.org/10.3367/ufnr.0108.197210a.0209.
10. Arinshtein É. A. A model of the liquid-crystal phase transition and the quasicrystal model of liquid. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2007, vol. 151, no. 1, pp. 571–585. doi:10.1007/s11232-007-0043-y.
11. Cherkas N. L., Cherkas S. L. Model of the radial distribution function of pores in a layer of porous aluminum oxide. *Crystallography reports*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 285–290. doi:10.1134/S106377451506005X.
12. Arinshtein É. A. Direct Variational Method in the Theory of Liquids. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 141, no. 1, pp. 1461–1468. doi:10.1023/B:TAMP.0000043861.74454.65.
13. Hong K. M. Multiple scattering of electromagnetic waves by a crowded monolayer of spheres: Application to migration imaging films. *Journal of the Optical Society of America*, 1980, vol. 70, no. 7, pp. 821–826. doi.org/10.1364/josa.70.000821.
14. Lutich A. A., Gaponenko S. V., Gaponenko N. V., Molchan I. S., Sokol V. A., Parkhutik V. Anisotropic light scattering in nanoporous materials: A Photon Density of States Effect. *Nano Letters*, 2004, vol. 4, no. 9, pp. 1755–1758. doi.org/10.1021/nl049620e.

Информация об авторах

Черкас Надежда Леонидовна – канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель, Военная академия Республики Беларусь (пр. Независимости, 220, 220057, Минск, Республика Беларусь). E-mail: n_cherkas@mail.ru.

Черкас Сергей Леонидович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета (ул. Бобруйская, 11, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: cherkas@inp.bsu.by.

Для цитирования

Черкас, Н. Л. Квазикристаллическая модель радиальной функции распределения твердых дисков на плоскости / Н. Л. Черкас, С. Л. Черкас // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 2. – С. 18–24.

Information about the authors

Cherkas Nadezhda Leonidovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Military Academy of the Republic of Belarus (220, Nezavisimosti Ave., 220057, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n_cherkas@mail.ru.

Cherkas Sergei Leonidovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior researcher, Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University (11, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: cherkas@inp.bsu.by.

For citation

Cherkas N. L., Cherkas S. L. Quasi-crystal model of the radial distribution function for hard disks in the plane. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 2, pp. 18–24 (in Russian).