ISSN 0002–354X (print)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

TECHNICAL SCIENCES

УДК 517.518.8:519.633:536.2

Поступило в редакцию 21.09.2015
Received 21.09.2015

В. А. Кот

Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

МЕТОД ВЗВЕШЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ФУНКЦИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)

Предложен приближенный интегральный метод решения краевых задач нестационарной теплопроводности, основанный на построении интегральных тождественных равенств относительно взвешенной температурной функции. Метод обладает простотой и, в отличие от других приближенных методов, позволяет получать решения с более высокой точностью.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, весовая функция, приближенный метод, интегральные тождества, собственные значения, фронт возмущения.

V. A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

WEIGHTED TEMPERATURE FUNCTION METHOD FOR SOLUTION OF UNSTEADY-STATE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

(Communicated by Corresponding Member N. V. Pavlukevich)

An approximate integral method based on constructing integral identical equalities for the weighted temperature function is proposed for solution of unsteady-state heat conduction boundary-value problems. This method is simple in use and allows one to obtain much more exact solutions as compared to the known approximate methods.

Keywords: heat conduction equation, weight function, approximate method, integral identities, eigenvalues, front of a disturbance.

Введение. Для практических приложений при решении краевых задач наибольший интерес представляют приближенные аналитические методы, позволяющие находить простые по форме решения в пределах допустимой точности [1; 2]. Среди них особое место занимают ортогональные методы взвешенных невязок [3; 4]. В зависимости от выбора весовых функций могут быть получены схемы, отвечающие методам моментов, коллокаций, Галеркина, наименьших квадратов и др. Такие аппроксимационные решения, как правило, содержат неизвестные коэффициенты, определяемые из приближенного решения дифференциального уравнения.

В аналитической теории теплопроводности методы, опирающиеся на понятие фронта температурного возмущения, характеризуются широким спектром подходов (см., напр., [5–9]). Основным недостатком интегральных методов является относительно низкая точность. Получаемые решения, как правило, затрагивают лишь наиболее простые случаи: медленно и монотонно изменяющееся во времени внешнее воздействие, отсутствие нелинейностей и т. д. В настоящей работе представлен приближенный метод взвешенной температурной функции (МВТФ), в основе которого лежат системы уравнений для взвешенной температурной функции, содержащие значение температурной функции $T(x,t)$ либо ее производной по пространственной координате в одной из граничных точек рассматриваемой области [10]. В приложении к полуограниченному пространству в качестве искомой функции выступает так называемый фронт температурного возмущения.

Постановка и решение задачи для конечномерной области. Представим МВТФ на примере рассмотрения задачи теплопроводности для протяженной платины с переменным вдоль оси x коэффициентом теплопроводности в следующей математической постановке (в безразмерной форме согласно обозначениям работы [10]):

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right),\quad 0<x<1,\quad t>0, \tag{1}$$

$$T(0,t)=\gamma(t),\quad \frac{\partial T(1,t)}{\partial x}=0,\quad t>0, \tag{2}$$

$$T(x,0)=0. \tag{3}$$

В операторной форме уравнение (1) принимает вид

$$D_t T=LT, \tag{4}$$

где $D_t\equiv\partial/\partial t,\ L\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – дифференциальный оператор, подчиняющийся формуле Грина

$$(Lu,\upsilon)-(u,L\upsilon)=\left[k(x)\left(\upsilon\frac{du}{dx}-u\frac{d\upsilon}{dx}\right)\right]_0^1, \tag{5}$$

где (u,υ) – скалярное произведение на отрезке $[0,1]$ функций $u=u(x)$ и $\upsilon=\upsilon(x)$.

Введем в рассмотрение последовательность интегральных линейных операторов

$$\mathcal{L}_n(T)\equiv(T,\mathcal{K}_n)=\int_0^1 T\,\mathcal{K}_n\,dx,\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

где $\mathcal{K}_n=\mathcal{K}_n(x)$ – весовые функции. Применив оператор $\mathcal{L}_n$ к правой части уравнения (4), воспользовавшись (5), получим

$$\mathcal{L}_n(LT)\equiv(LT,\mathcal{K}_n)=(T,L\mathcal{K}_n)+P_n, \tag{6}$$

$$P_n=k(0)\frac{d\mathcal{K}_n(0)}{dx}\gamma(t)-k(0)\mathcal{K}_n(0)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}-k(1)T(1,t)\frac{d\mathcal{K}_n(1)}{dx}. \tag{7}$$

Для исключения в функции P_n производной $\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x}$ либо члена $T(1,t)$ необходимо, соответственно, положить $\mathcal{K}_n(0)=0\vee\dfrac{d\mathcal{K}_n(1)}{dx}=0.$ В случае принятия $\mathcal{K}_n(0)=0$ мы имеем лишь одну неизвестную температуру в граничной точке $x=1$ (так называемую граничную функцию): $\varphi(t)=T(1,0)$.

Применив далее оператор $\mathcal{L}_n$ к левой части уравнения (4), с учетом теоремы Лейбница имеем

$$\mathcal{L}_n\dot{T}=(\dot{T},\mathcal{K}_n)=(T,\mathcal{K}_n)_t=(\mathcal{L}_x^n T)_t. \tag{8}$$

В итоге, объединив на основе (4) соотношения (6)–(8), получим уравнение

$$(\mathcal{L}_n T)_t=(T,L\mathcal{K}_n)+k(0)\frac{d\mathcal{K}_n(0)}{dx}\gamma(t)-k(1)\frac{d\mathcal{K}_n(1)}{dx}\varphi(t). \tag{9}$$

Чтобы освободиться в (9) от операций дифференцирования (при $n=1$), положим

$$L\mathcal{K}_1\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial x}\right)=0 \tag{10}$$

при начальном условии $\mathcal{K}_1(0)=0,$ либо альтернативном условии $\dfrac{d\mathcal{K}_1(0)}{dx}=\dfrac{1}{\lambda(0)}$ (здесь отметим, что второе из записанных условий может быть иным, что не является принципиальным). Интегрирование (10) при $\mathcal{K}_1(0)=0$ дает следующее решение: $\mathcal{K}_1(x)=\int\limits_0^x\dfrac{dx}{k(x)}.$ Тогда вместо (9) приходим к новому уравнению $(\mathcal{L}_1T)_t=\gamma(t)-\varphi(t).$ Его интегрирование с начальным условием (3) приводит к интегральному тождественному равенству

$$\mathcal{L}_1T\equiv\Upsilon_1(t)-\mathcal{F}_1(t), \tag{11}$$

где $\Upsilon_1(t)=\int\limits_0^t\gamma(t)\,dt,$ $\mathcal{F}_1(t)=\int\limits_0^t\varphi(t)\,dt.$ Ядра $\mathcal{K}_{n+1}$ $(n=1,2,...)$ определим из рекуррентного соотношения $\mathcal{K}_{n+1}=\mathcal{K}_n$ с начальным условием $\mathcal{K}_{n+1}(0)=\dfrac{d\mathcal{K}_{n+1}(0)}{dx}=0.$ Отсюда находим

$$\mathcal{K}_{n+1}=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}\int\limits_0^x\mathcal{K}_n\,dx,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

В соответствии с (9) запишем уравнение $(n+1)$-го порядка

$$(\mathcal{L}_{n+1}T)_t=(T,L\mathcal{K}_{n+1})-k(1)\frac{d\mathcal{K}_{n+1}(1)}{dx}\varphi(t)=(T,\mathcal{K}_n)-\varphi(t)\int\limits_0^1\mathcal{K}_{n+1}\,dx=\mathcal{L}_nT-\sigma_{n+1}\varphi(t), \tag{13}$$

где $\sigma_{n+1}=\int\limits_0^1\mathcal{K}_{n+1}\,dx.$ Из (11)–(13) приходим к последовательности из уравнений

$$\left\{(\mathcal{L}_nT)_t\equiv\Upsilon_{n-1}(t)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\mathcal{F}_{n-i}(t)\right\}_n,\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

где $\Upsilon_0(t)=\gamma(t),$ $\mathcal{F}_0(t)=\varphi(t),$ $\sigma_1=1.$

Введем в рассмотрение *интегральные характеристики* $\Upsilon_n(t)$ и $\mathcal{F}_n(t),$ определяемые соответственно как

$$\Upsilon_n(t)=\underbrace{\int\limits_0^t dt...\int\limits_0^t}_{n}\gamma(t)\,dt,\quad \mathcal{F}_n(t)=\underbrace{\int\limits_0^t dt...\int\limits_0^t}_{n}\varphi(t)\,dt,\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Интегрирование уравнений последовательности (14) с начальным условием (3) дает окончательно новую последовательность из тождественных равенств в виде

$$\left\{\mathcal{L}_nT\equiv\Upsilon_n(t)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\,\mathcal{F}_{n+1-i}(t)\right\}_n,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Если приближенное решение задачи (1)–(3) представить степенным полиномом

$$T(x,t)=\gamma(t)+\sum_{j=1}^{N}a_j(t)\,x^j,$$

то, с учетом граничного условия (2) и условия для граничной функции $T(1,t)=\varphi(t),$ мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\sum_i^N a_i(t)=\varphi(t)-\gamma(t),\quad \sum_i^N i\,a_i(t)=0,\quad \left\{\mathcal{L}_nT\equiv\Upsilon_n(t)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\,\mathcal{F}_{n+1-i}(t)\right\}_n,\quad n=\overline{1,N-2}. \tag{16}$$

Решение системы (16) дает полиномиальные коэффициенты $a_j(t),$ $j=\overline{1,N},$ которые содержат граничную функцию $\varphi(t),$ а также граничные характеристики $\Upsilon_n(t)$ и $\mathcal{F}_n(t),$ $n=\overline{1,N-2}.$ Для определения $\varphi(t)$ можно воспользоваться интегралом теплового баланса

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 T(x,t)dx = -k(0)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}, \tag{17}$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\gamma'(t) + \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i{}'(t)}{i+1} + k(0)a_1(t) = 0. \tag{18}$$

В результате подстановки в (18) найденных коэффициентов $a_j(t)\,(j=\overline{1,N})$ приходим к определяющему уравнению (записано в общем виде)

$$\sum_{i=0}^{N-1}(p_{i-1}\mathcal{F}_{i-1}(t) - q_{i-1}\Upsilon_{i-1}(t)) = 0, \tag{19}$$

где $\Upsilon_{-1}(t) = \gamma'(t)$; p_{i-1} и q_{i-1} – коэффициенты (с целью сокращения представленного материала коэффициенты не приводятся), $p_{-1} = 1$.

Отметим, что определяющее уравнение для граничной функции $\varphi(t)$ можно также получить из интегрального тождественного равенства (15) $(N-1)$-го порядка, которое имеет вид

$$\int_0^1 T(x,t)\mathcal{K}_{N-1}dx = \Upsilon_{N-1}(t) - \sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\mathcal{F}_{N-i}(t).$$

В таком случае, подстановка в (19) полиномиальных коэффициентов $a_j(t)\,(j=\overline{1,N})$ приводит к следующему интегральному уравнению относительно граничной функции $\varphi(t)$:

$$\sum_{i=0}^{N-1}(\nu_i\mathcal{F}_i(t) - \omega_i\Upsilon_i(t)) = 0, \tag{20}$$

где ν_i и ω_i – коэффициенты (с целью сокращения представленного материала данные коэффициенты не приводятся), $\nu_0 = 1$.

Далее, продифференцировав одно из уравнений (19) либо (20) соответственно, $(N-2)$-кратно либо $(N-1)$-кратно, мы приходим к одному из следующих обыкновенных дифференциальных уравнений $(N-1)$-го порядка:

$$\varphi^{(N-1)}(t) + p_1\varphi^{(N-2)}(t) + p_2\varphi^{(N-3)}(t) + \ldots + p_{N-1}\varphi(t) = \sum_{i=0}^{N-1}q_i\gamma^{(N-1-i)}(t), \tag{21}$$

$$\varphi^{(N-1)}(t) + \nu_1\varphi^{(N-2)}(t) + \nu_2\varphi^{(N-3)}(t) + \ldots + \nu_{N-1}\varphi(t) = \sum_{i=0}^{N-1}\nu_i\gamma^{(N-1-i)}(t). \tag{22}$$

Начальные условия для уравнений (21) и (22) вытекают, соответственно, из интегральных уравнений (19) и (20), а также из очевидных тождеств

$$\mathcal{F}_n(0) = \underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n}\varphi(t)\,dt\Big|_{t=0} \equiv 0, \quad \Upsilon_n(0) = \underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n}\gamma(t)\,dt\Big|_{t=0} \equiv 0, \quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Поскольку полученные уравнения (21) и (22) по структуре друг другу идентичны и отличаются лишь коэффициентами, представляется целесообразным ограничиться рассмотрением процесса получения необходимых начальных условий лишь для одного из данных уравнений, например, уравнения (21). При $t=0$ уравнение (19), с учетом (23) и условия $\varphi(0)=0$, принимает вид

$$p_{-1}\varphi'(0) = q_{-1}\gamma'(0) + q_0\gamma(0).$$

Далее продифференцируем (19), что дает уравнение

$$\sum_{i=0}^{N-1}(p_{i-1}\mathcal{F}_{i-2}(t) - q_{i-1}\Upsilon_{i-2}(t)) = 0. \tag{24}$$

Здесь $\mathcal{F}_{-2}(t)=\varphi''(t),\ \ \Upsilon_{-2}(t)=\gamma''(t).$ При $t=0$ из (24), с учетом (23) и условия $\varphi(0)=0,$ имеем

$$p_{-1}\varphi''(t)+\varphi'(t)=q_{-1}\gamma''(0)+q_0\gamma'(0)+q_1\gamma(0).$$

Продолжив последовательное дифференцирование уравнения (19), приходим к системе из $(N-3)$-линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\sum_{i=0}^{n}(p_{n-i-1}\varphi^{(i)}(0)-q_{n-i-1}\gamma^{(i)}(0))=0\right\}_n,\quad n=\overline{1,N-3}. \tag{25}$$

Решение системы (25) дает искомые начальные значения $\varphi^{(i)}(0)\ (i=\overline{1,N-3}).$ В таком случае, дифференциальное уравнение (21) и найденные начальные условия $\varphi^{(i)}(0)\ (i=\overline{0,N-3})$ представляют задачу Коши относительно функции $\varphi(t)=T(1,t).$

Укажем на другой возможный (альтернативный) вариант решения уравнения (21), что связано с введением в рассмотрение новой функции $S(t)=\mathcal{F}_{N-2}(t).$ Для нее запишем очевидные тождества

$$\mathcal{F}_{N-2-i}(t)\equiv S^{(i)}(t),\quad i=\overline{0,N-1},$$

которые дают возможность перевести интегральное уравнение (19) в обыкновенное дифференциальное уравнение с функцией $S(t)$:

$$\sum_{i=0}^{N-1}(p_{i-1}S^{(N-1-i)}(t)-q_{i-1}\Upsilon_{i-1}(t))=0. \tag{26}$$

Учитывая нулевые условия (23), для уравнения (26) имеем начальные условия:

$$S(0)=S'(0)=S''(0)=S^{(3)}(0)=...=S^{(\mathrm{N}-2)}(0)=0. \tag{27}$$

Решение задачи (26), (27) дает функцию $S(t).$ Учитывая, что $S(t)=\mathcal{F}_{N-2}(t),$ определение искомой граничной функции $\varphi(t)$ предполагает $(N-2)$-кратное дифференцирование $S(t),$ т. е. $\varphi(t)=D_t^{N-2}S(t).$

В виде иллюстративного примера рассмотрим важный случай $\lambda=k(x)=\exp(-m\,x)$ при $T(0,t)=1.$ Температурную функцию $T(x,t)$ представим полиномом шестой степени

$$T(x,t)=1+\sum_{j=1}^{6}a_j(t)\,x^j.$$

Из граничного условия (2) и условия $T(1,t)=\varphi(t)$ следуют два уравнения:

$$\sum_{j=1}^{5}ja_j=0,\quad \sum_{j=1}^{5}a_j=\varphi(t)-1.$$

Для замыкания системы получим оставшиеся четыре уравнения, воспользовавшись тождественными равенствами (15) для $n=\overline{1,\ 4}.$ Из (12) находим весовые функции $(m=1)$:

$$\mathcal{K}_1(x)=\exp(x)-1,\quad \mathcal{K}_2(x)=(\operatorname{sh}x-x)\exp x,$$

$$\mathcal{K}_3(x)=\frac{\exp(x)}{12}(\exp(x)(\exp(x)-6x+9)-6x-9)-\frac{1}{12},$$

$$\mathcal{K}_4(x)=\frac{\exp(2x)}{72}(28\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}2x-6x(2\operatorname{ch}x+3)).$$

Опустив выкладки по определению коэффициентов $a_j(t)\ (j=\overline{1,6})$ и применив вытекающее из (17) уравнение $\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i{}'(t)}{i+1}+a_1(t)=0,$ приведем в окончательном виде определяющее уравнение

$$\begin{gathered}1{,}0543\cdot10^{-6}\varphi'(t)+4{,}7258\cdot10^{-4}\varphi(t)+0{,}05\mathcal{F}_1(t)+1{,}6625\mathcal{F}_2(t)+16{,}2742\mathcal{F}_3(t)+24\mathcal{F}_4(t)=\\3{,}6026\cdot10^{-6}-3{,}2117\cdot10^{-4}t+0{,}01049t^2-0{,}16076t^3+t^4.\end{gathered}\tag{28}$$

Решение (28) дает искомую граничную функцию

$$\begin{gathered}\varphi(t)=1-1{,}3382\,\mathrm{e}^{-1{,}7821t}+0{,}530\,\mathrm{e}^{-13{,}538t}-0{,}27557\mathrm{e}^{-35{,}578t}+\\0{,}107585\,\mathrm{e}^{-84{,}876t}-0{,}02413\,\mathrm{e}^{-312{,}467t}.\end{gathered}$$

На рис. 1 представлены графики изменения температуры по сечению неоднородной пластины, рассчитанные на основе МВТФ, а также численным методом. Ошибка аппроксимационного решения по сравнению с численным методом составляет сотые доли процента. Последующие приближения ($N>6$) дают практически точное решение.

Постановка и решение задачи для полуограниченного пространства. Запишем задачу в следующей математической постановке (в безразмерной форме согласно [10; 11]):

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right),\tag{29}$$

$$\text{(i)}:\quad T(0,t)=\gamma_{\mathrm{I}}(t);\quad \text{(ii)}:\quad -k(0)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\gamma_{\mathrm{II}}(t);\quad \text{(iii)}:\quad T(0,t)-\mathrm{Bi}^{-1}\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\gamma_{\mathrm{III}}(t),\tag{30}$$

$$T(\infty,t)=0,\quad T(x,0)=0.\tag{31}$$

Граничные условия (30)–(i), (30)–(ii) и (30)–(iii) отвечают, соответственно, граничным условиям Дирихле, Неймана либо описывают теплообмен по закону Ньютона.

Введем в рассмотрение фронт температурного возмущения $\delta(x)$ с условиями

$$T(\delta(t),t)=\frac{\partial T(\delta(t),t)}{\partial x}=0.$$

Введем также в рассмотрение последовательность из интегральных линейных операторов

$$\mathcal{L}_n(T)\equiv(T,\mathcal{K}_n)=\int\limits_0^{\delta(t)}T\,\mathcal{K}_n\,dx,\quad n\in\mathbb{Z}_+,\tag{32}$$

где $\mathcal{K}_n=\mathcal{K}_n(x)$ – весовые функции. Применив оператор $\mathcal{L}_n$ к уравнению (4) (операторная форма уравнения (32)), получим для его правой части

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_n(LT)\equiv(LT,\mathcal{K}_n)=(T,L\mathcal{K}_n)+\\k(0)\frac{d\mathcal{K}_n(0)}{dx}T(0,t)-k(0)\mathcal{K}_n(0)\,\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}.\end{gathered}\tag{33}$$

Применив оператор $\mathcal{L}_n$ к левой части уравнения (4), с учетом теоремы Лейбница имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_n\dot{T}=(\dot{T},\mathcal{K}_n)=(T,\mathcal{K}_n)_t-\\\mathcal{K}_n(\delta(t))T(\delta(t),t)\delta'(t)=(\mathcal{L}_nT)_t.\end{gathered}$$

Отсюда приходим к уравнению

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}_nT)_t=(T,L\mathcal{K}_n)+k(0)\frac{d\mathcal{K}_n(0)}{dx}T(0,t)-\\k(0)\mathcal{K}_n(0)\,\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}.\end{gathered}\tag{34}$$

Условие Дирихле. Если исходить из условия (30)–(i), то тогда уравнение (34) со-

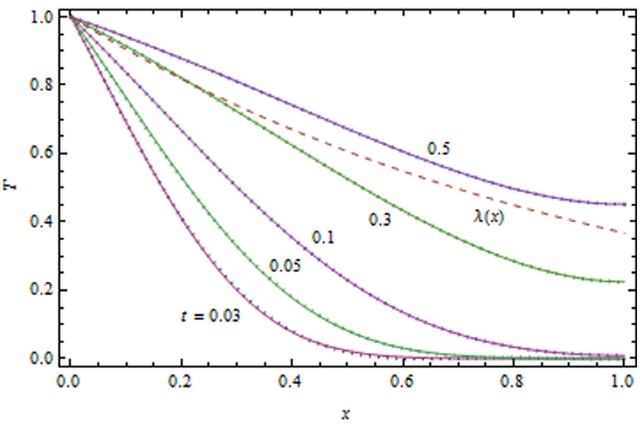

Рис. 1. Температурные профили в пластине при $\lambda(x)=\exp(-x)$, полученные на основе точного (численного) решения (сплошные линии) и на основе МВТФ (пунктирные линии)

Fig. 1. Temperature distributions over the plate at $\lambda(x)=\exp(-x)$, obtained from the exact (numerical) solution (solid lines) and from the solution based on WTFM (dotted lines)

держит неизвестную производную $\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x}$. Для ее исключения потребуем (в дальнейшем верхние индексы (I), (II) и (III) обозначают, соответственно, граничные условия Дирихле, Неймана и Ньютона)

$$\mathcal{K}_n^{(\mathrm{I})}(0)=0, \quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{35}$$

Освободиться в (34) от операций дифференцирования (при $n=1$) позволяет уравнение

$$L\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}\equiv\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}}{dx}\right)=0 \tag{36}$$

с начальными условиями

$$\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}(0)=0, \qquad \frac{d\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}(0)}{dx}=\frac{1}{\lambda(0)}. \tag{37}$$

Решение (36), (37) дает весовую функцию $\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}(x)=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}$. Отсюда вместо (34) запишем уравнение $(\mathcal{L}_1^{(\mathrm{I})}T)_t=\gamma_{\mathrm{I}}(t)$, интегрирование которого дает тождественное равенство

$$\mathcal{L}_1^{(\mathrm{I})}T\equiv\Upsilon_1^{(\mathrm{I})}(t)=\int\limits_0^t\gamma_{\mathrm{I}}(t)\,dt. \tag{38}$$

Весовые функции $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{I})}$ определим с помощью рекуррентного соотношения $\mathcal{K}_{n+1}=\mathcal{K}_n$ с однородным начальным условием $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{I})}(0)=\dfrac{d\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{I})}(0)}{dx}=0.$ Тогда находим

$$\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{I})}=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}\int\limits_0^x\mathcal{K}_n^{(\mathrm{I})}\,dx, \quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

откуда вытекает последовательность

$$\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}, \quad \mathcal{K}_2^{(\mathrm{I})}=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}, \quad \mathcal{K}_3^{(\mathrm{I})}=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)}\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x)},\dots.$$

Тогда для уравнений (34) $(n+1)$-го порядка получим

$$(\mathcal{L}_{n+1}^{(\mathrm{I})}T)_t=(T,L\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{I})})=(T,\mathcal{K}_n^{(\mathrm{I})})=\mathcal{L}_n^{(\mathrm{I})}T. \tag{39}$$

Из (38) и (39) приходим к последовательности

$$\left\{(\mathcal{L}_n^{(\mathrm{I})}T)_t\equiv\Upsilon_{n-1}^{(\mathrm{I})}(t)\right\}_n, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{40}$$

где $\Upsilon_0^{(\mathrm{I})}(t)=\gamma(t), \quad \Upsilon_n^{(\mathrm{I})}(t)=\underbrace{\int\limits_0^t dt\dots\int\limits_0^t}_{n}\gamma_{\mathrm{I}}(t)\,dt.$ Интегрирование уравнений последовательности (40) с учетом (31) дает окончательно

$$\left\{\mathcal{L}_n^{(\mathrm{I})}T\equiv\Upsilon_n^{(\mathrm{I})}(t)\right\}_n, \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Условие Неймана. Для граничного условия (30)–(ii) проинтегрируем уравнение (29) в пределах $x=[0,\delta(t)]$:

$$\int\limits_0^{\delta(t)}\frac{\partial T}{\partial t}dx=\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\delta(t)}T\,dx=-k(0)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\gamma_{\mathrm{II}}(t). \tag{41}$$

Интегрирование (41) приводит к тождественному равенству

$$\int_0^{\delta(t)} T\,dx = \int_0^{\delta(t)} T\mathcal{K}_1^{(\mathrm{I})}\,dx = \Upsilon_1^{(\mathrm{I})}(t),$$

где $\mathcal{K}_1 = 1$. Применив рекуррентное соотношение $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{II})} = \mathcal{K}_n^{(\mathrm{II})}$ с условиями $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{II})}(0) = \dfrac{d\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{II})}(0)}{dx} = 0,$ определим весовые функции

$$\mathcal{K}_1^{(\mathrm{II})} = 1, \quad \mathcal{K}_2^{(\mathrm{II})} = \int_0^x \frac{x}{k(x)}\,dx, \quad \mathcal{K}_3^{(\mathrm{II})} = \int_0^x \frac{dx}{k(x)} \int_0^x dx \int_0^x \frac{x}{k(x)}\,dx, \ldots,$$

сводящие дифференциальное уравнение (29) к последовательности из тождественных равенств

$$\left\{ \mathcal{L}_n^{(\mathrm{II})} T \equiv \Upsilon_n^{(\mathrm{II})}(t) = \underbrace{\int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n} \gamma_{\mathrm{II}}(t)\,dt \right\}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теплообмен по закону Ньютона. При теплообмене согласно граничному условию (30)–(iii) для определения весовой функции $\mathcal{K}_1^{(\mathrm{III})}$ положим в (33)

$$k(0)\frac{d\mathcal{K}_n(0)}{dx} T(0,t) - k(0)\mathcal{K}_n(0)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \gamma_{\mathrm{III}}(t). \tag{42}$$

Сопоставив (42) и (30)–(iii), приходим к следующим соотношениям:

$$\mathcal{K}_1^{(\mathrm{III})}(0) = \frac{1}{\mathrm{Bi}\,\lambda(0)}, \quad \frac{d\mathcal{K}_1^{(\mathrm{III})}(0)}{dx} = \frac{1}{\lambda(0)}. \tag{43}$$

Решение дифференциального уравнения $L\mathcal{K}_1^{(\mathrm{III})} = 0$ с начальными условиями (43) дает функцию

$$\mathcal{K}_1^{(\mathrm{III})} = \int_0^x \frac{dx}{k(x)} + \frac{1}{\mathrm{Bi}\,\lambda(0)}. \tag{44}$$

С учетом (42)–(44) уравнение (34) принимает вид

$$\mathcal{L}_1^{(\mathrm{III})} T = \Upsilon_1^{(\mathrm{III})}(t). \tag{45}$$

Проинтегрировав уравнение (45), получим

$$\mathcal{L}_1^{(\mathrm{III})} T = \Upsilon_1^{(\mathrm{III})}(t).$$

Нахождение весовых функций $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{III})}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ аналогично: посредством уравнения $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{III})} = \mathcal{K}_n^{(\mathrm{III})}$ с однородными начальными условиями $\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{III})}(0) = \dfrac{d\mathcal{K}_{n+1}^{(\mathrm{III})}(0)}{dx} = 0.$ Отсюда, в частности, получаем $\mathcal{K}_2^{(\mathrm{III})} = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{k(x)} + \frac{x}{\mathrm{Bi}\,k(0)} \right) \frac{dx}{k(x)}.$ В итоге приходим к последовательности

$$\mathcal{L}_n^{(\mathrm{III})} T \equiv \Upsilon_n^{(\mathrm{III})}(t) = \underbrace{\int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n} \gamma_{\mathrm{III}}(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{46}$$

В виде иллюстративного примера рассмотрим краевую задачу при $T(0,t) = 1$ и $\lambda = k(x) = (1+5x)^{-1}$. Температурный профиль представим полиномом

$$T(x,t) = 1 + \sum_{j=1}^{6} a_j(t) \frac{x^j}{\delta(t)^j}.$$

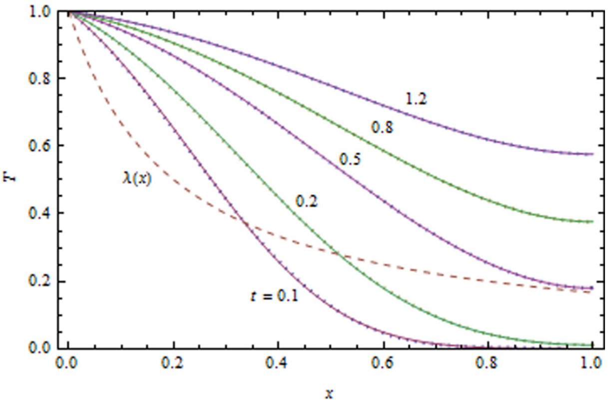

Рис. 2. Температурные профили в полуограниченном пространстве при $\lambda(x)=(1+5x)^{-1}$: сплошные линии – численное решение, пунктирные – решение на основе МВТФ ($N=6$)

Fig. 2. Temperature distributions in the semi-bounded space at $\lambda(x)=(1+5x)^{-1}$: solid lines – numerical solution, dotted lines – solution based on WTFM ($N=6$)

Из условий на фронте возмущения (35) имеем два уравнения: $\sum_{j=1}^{N} a_j(t)=-1$ и $\sum_{j=1}^{N} j\,a_j(t)=0$. Дополнительные три уравнения получим из трех тождественных равенств последовательности (46) с найденными весовыми функциями

$$\mathcal{K}_1 = x\left(1+\frac{4}{2}x\right),\quad \mathcal{K}_2=\frac{x^3}{6}(1+5x+5x^2),$$

$$\mathcal{K}_3=\frac{x^5}{120}\left(1+\frac{15}{2}x+\frac{50}{3}x^2+\frac{125}{12}x^3\right).$$

Еще одно уравнение запишем, потребовав выполнение уравнения (29) в точке $x=0$. Отсюда имеем $\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]_{x=0}=0,$ откуда следует уравнение $a_2(t)-\frac{\delta(t)}{2}a_1(t)=0$. Фронт температурного возмущения $\delta(t)$ определим из интеграла теплового баланса $\frac{d}{dt}\int_0^{\delta(t)} T\,dx=-k(0)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}$, откуда следует дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^{6}\left(\frac{a_j(t)}{2(j+1)}\sigma'(t)+\frac{a_j{}'(t)}{j+1}\sigma(t)\right)+a_1(t)=0, \tag{47}$$

где $\sigma(t)=\delta(t)^2$. Температурные профили, полученные на основе (47), приведены на рис. 2. Отмечаем практически полное слияние приближенного и точного (численного) решений.

Заключение. В отличие от классических точных методов, дающих решения в виде тригонометрических, цилиндрических и специальных функций, получаемые МВТФ решения представляются степенными полиномами, максимально приспособленными для проведения инженерных расчетов, решения задач оптимизации, обратных задач и т. д. В итоге удается максимально упростить процесс получения решения, сводя его к выполнению последовательности достаточно простых операций. МВТФ гармонично объединяет простоту и высокую точность, существенно превышающую точность других известных приближенных методов.

Список использованных источников

1. Власова, Е. А. Приближенные методы математической физики / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с.

2. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике / В. С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 496 с.

3. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер; пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

4. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

5. Wood, A. S. A new look at the heat balance integral method / A. S. Wood // Appl. Math. Model. – 2001. – Vol. 25, N 10. – P. 815–824. doi.org/10.1016/s0307-904x(01)00016-6.

6. Mitchell, S. L. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems / S. L. Mitchell, T. G. Myers // SIAM Review. – 2010. – Vol. 52, N 1. – P. 57–86. doi.org/10.1137/080733036.

7. Myers, T. G. Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods / T. G. Myers // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2009. – Vol. 36, N 2. – P. 143–147. doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013.

8. Layeni, O. P. Hybrids of the heat balance integral method / O. P. Layeni, J. V. Johnson // Appl. Math. Comput. – 2012. – Vol. 218, N 14/15. – P. 7431–7444. doi.org/10.1016/j.amc.2012.01.001.

9. Mitchell, S. L. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions / S. L. Mitchell, T. G. Myers // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 53, N 17/18. – P. 3540–3551. doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.04.015.

10. Кот, В. А. Тождества взвешенной температуры / В. А. Кот // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 2. – С. 409–424.

11. Лыков, В. А. Теория теплопроводности / В. А. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

12. Carslow, H. S. Conduction of Heat in Solids / H. S. Carslow, J. C. Jaeger. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1992. – 510 p.

References

1. Vlasova E. A., Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. *Approximate methods of mathematical physics*. Moscow, Publishing house of the Moscow State Technical University N. E. Bauman, 2001. 700 p. (in Russian).

2. Zarubin V. S. *Mathematical modeling in technology*. Moscow, Publishing house of the Moscow State Technical University N. E. Bauman, 2003. 496 p. (in Russian).

3. Fletcher K. *Numerical Methods Based on the Galerkin Method*. Moscow, Mir Publ., 1988. 352 p. (in Russian).

4. Mikhlin S. G. *Variational methods in mathematical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 512 p. (in Russian).

5. Wood A. S. A new look at the heat balance integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, vol. 25, no. 10, pp. 815–824. doi.org/10.1016/s0307-904x(01)00016-6.

6. Mitchell S. L., Myers T. G. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems. *SIAM Review*, 2010, vol. 52, no. 1, pp. 57–86. doi.org/10.1137/080733036.

7. Myers T. G. Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2009, vol. 36, no. 2, pp. 143–147. doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013.

8. Layeni O. P., Johnson J. V. Hybrids of the heat balance integral method. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, no. 14, pp. 7431–7444. doi.org/10.1016/j.amc.2012.01.001.

9. Mitchell S. L., Myers T. G. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, no. 17/18, pp. 3540–3551. doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.04.015.

10. Kot V. A. Weighted temperature identities. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, no. 2, pp. 423–438. doi.org/10.1007/s10891-015-1207-5.

11. Lykov V. A. *Theory of heat conduction*. Moscow, Vysshaya shkola, 1967. 600 p. (in Russian).

12. Carslow H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, UK, Oxford University Press, 1992. 510 p.

Информация об авторе

Кот Валерий Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Information about the authors

Kot Valery Andreevich – Ph. D. (Engineering), Senior researcher, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Для цитирования

Кот, В. А. Метод взвешенной температурной функции в решении задач нестационарной теплопроводности / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 2. – С. 64–73.

For citation

Kot V. A. Weighted temperature function method for solution of unsteady-state heat conduction problems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 2, pp. 64–73 (in Russian).