

ISSN 1561-8323 (print)

МАТЕМАТИКА**MATHEMATICS**

УДК 517.958

Поступило в редакцию 25.01.2017

Received 25.01.2017

Академик В. И. Корзюк*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь***МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
НА ПРИМЕРЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

Данное сообщение ставит своей целью с помощью характеристического параллелограмма записать решение первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения в виде формулы, удобной для численной реализации. Вывод указанной формулы для численного решения основан на представлении классического решения рассматриваемой задачи. **Рассматриваемая задача ставится следующим образом. В полуполосе на плоскости двух независимых переменных задается одномерное волновое уравнение. К уравнению присоединяются условия Коши, которые задаются на основании полуполосы. На боковых полупрямых границы области задаются значения искомого решения через заданные функции. Данный метод характеристического параллелограмма может быть распространен на другие уравнения и задачи.**

Ключевые слова: классическое решение, граничные условия, условия Коши, условия согласования, характеристический параллелограмм

Academician Viktor I. Korzyuk*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION
WITH THE USE OF THE CHARACTERISTIC PARALLELOGRAM METHOD**

This article is aimed at constructing a solution to the first mixed problem for the one-dimensional wave equation in the form convenient for numerical implementation with the help of the characteristic parallelogram. The derivation of the formula for numerical solution is based on the representation of the classical solution of the considered problem.

This problem is formulated as follows. The one-dimensional wave equation is given in the half-strip on the plane of the two independent variables. Cauchy conditions assigned on the basis of the half-strip are related to the equation. Values of the sought solution are set by the given functions on the lateral half-line side of the area.

The parallelogram method can be extended to other equations and problems.

Keywords: classical solution, boundary conditions, Cauchy conditions, agreement conditions, characteristic parallelogram

Введение. В [1] (см. также [2; 3]) представлены результаты исследования классического решения первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе. Здесь доказано существование и единственность классического решения тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования на заданные функции задачи. Также представлена методика построения решения, используя соответствующие полученные формулы. Все это с помощью характеристических параллелограммов позволяет решение представить в виде формул для численного решения задачи и предложить соответствующий алгоритм реализации. Близкой к этой идее можно указать и работу [4].

Постановка задачи. На замыкании \bar{Q} области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in Q$ в декартовой системе координат плоскости \mathbb{R}^2 задается одномерное волновое уравнение

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где a^2 – положительное из \mathbb{R} действительное число; $\partial_t^2, \partial_x^2$ – частные производные по t и x второго порядка. К уравнению (1) на нижней части границы ∂Q полуполосы \bar{Q} присоединяются условия Коши

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

а на боковых частях – условия Дирихле

$$u(t, 0) = \mu^{(1)}(t), \quad u(t, l) = \mu^{(2)}(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (3)$$

Функции $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}, j = 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\begin{aligned} \mu^{(1)}(0) - \varphi(0) &= \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{a}(\psi(0) - d\mu^{(1)}(0)) = \delta^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2}(d^2\mu^{(1)}(0) - a^2 d^2\varphi(0) - f(0, 0)) &= \delta^{(3)}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(0) - \varphi(l) &= \sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{a}(d\mu^{(2)}(0) - \psi(l)) = \sigma^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2}(d^2\mu^{(2)}(0) - a^2 d^2\varphi(l) - f(0, l)) &= \sigma^{(3)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Классическое решение задачи (1)–(3). Пусть функция f принадлежит классу $C^{0,1}(\bar{Q})$, где $C^{0,1}(\bar{Q})$ – множество непрерывных на \bar{Q} функций с непрерывными производными первого порядка по второму аргументу. Обозначим через \tilde{f} продолжение функции f по второму аргументу на все множество \mathbb{R} . Продолжение \tilde{f} берется таким образом, чтобы $\tilde{f} \in C^{0,1}([0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Общее решение уравнения

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in ([0, \infty) \times \mathbb{R}), \quad (6)$$

в том числе и уравнения (1), представляется в виде суммы

$$u(t, x) = g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) + u_r(t, x) = u^{(0)}(t, x) + u_r(t, x), \quad (7)$$

где $g^{(j)}$ ($j = 1, 2$) – дважды непрерывно дифференцируемые функции из класса $C^2(D(g^{(j)}))$; $u^{(0)}$ – решение однородного уравнения (1); u_r – частное решение из $C^2(\bar{Q})$ неоднородного уравнения (1). Если $a > 0$, то $D(g^{(1)}) = (-\infty, l]$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$, $(t, x) \in \bar{Q}$. Интегрируя уравнение (6) получаем общее решение его в виде (7), где в качестве частного решения u_r могут быть функции

$$u_r(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi, \quad (8)$$

$$u_r(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x-at} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}\left(\frac{\xi-\tau}{2a}, \frac{\xi+\tau}{2}\right) d\xi d\tau \quad (9)$$

и др.

Далее будем рассматривать общее решение (7) для уравнения (1) с частным решением (9).

От представления общего решения (7) требуем выполнения условия (2) и (3). Отсюда определяются функции $g^{(j)}$ ($j = 1, 2$) следующим образом:

$$g^{(j)}(z) = g^{(j, 0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + (-1)^j \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\xi) d\xi + (-1)^j C, \quad j = 1, 2, \quad z \in [0, l], \quad (10)$$

$$g^{(1)}(z) = g^{(1, k)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{2a} \int_0^{\frac{z}{a}} d\tau \int_{-z-a\tau}^{z+a\tau} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi - g^{(2, k-1)}(-z), \quad (11)$$

$$z \in [-kl, -(k-1)l], \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$g^{(2)}(z) = g^{(2, k)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) + \frac{1}{2a} \int_0^{\frac{z-l}{a}} d\tau \int_{z-a\tau}^{2l-z+a\tau} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi - g^{(1, k-1)}(2l-z), \quad (12)$$

$$z \in [kl, (k+1)l], \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где C – произвольная постоянная из \mathbb{R} .

В Q будем рассматривать прямоугольники $Q^{(k)} = \left((k+1)\frac{l}{a}, k\frac{l}{a} \right) \times (0, l)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, $\bar{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{Q}^{(k)}$.

Пусть точка $A = A^{(k)}$ с координатами (t, x) принадлежит $\bar{Q}^{(k)}$, $k \geq 2$. Через нее проводим характеристики $y_0 = \frac{y_1}{a} + t - \frac{x}{a}$, $y_0 = -\frac{y_1}{a} + t + \frac{x}{a}$ до пересечения с боковыми частями границы ∂Q области Q в точках B и C соответственно (рис. 1). Точки B и C имеют координаты $B = \left(t - \frac{x}{a}, 0 \right)$, $C = \left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}, l \right)$, где t и x – координаты A . Через B и C проводим новые характеристики, которые пересекаются в точке $A^{(k-1)} = \left(t - \frac{l}{a}, l - x \right)$. У нас получился характеристический параллелограмм $A^{(k)}BCA^{(k-1)}$.

Согласно формулам (7), (11) и (12) решение u задачи (1)–(3) в точке запишется следующим образом:

$$u(t, x) = \mu^{(1)}\left(t - \frac{x}{a}\right) + \mu^{(2)}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}\right) + \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{-x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^{t+\frac{x}{a}-\frac{l}{a}} d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{2l-a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + u_r(t, x) - g^{(1, k-1)}(2l-x-at) - g^{(2, k-1)}(at-x). \quad (13)$$

Если сравнить полученную формулу (13) с координатами вершин характеристического параллелограмма $ABCA^{(k-1)}$, то ее можно записать в виде

$$u(A) = u(A^{(k)}) = u(B) + u(C) - u_r(B) - u_r(C) + u_r(A^{(k)}) + u_r(A^{(k-1)}) - u(A^{(k-1)}). \quad (14)$$

Рассмотрим прямоугольник $\bar{Q}^{(1)}$. Он характеристиками $x = at$ и $x + at = l$ делится на четыре части $\Omega^{(1, j)}$, $j = 1, 4$. Подобласти $\Omega^{(1, j)}$ можно описать следующим образом:

$$\Omega^{(1, 1)} = \left\{ (t, x) \in Q^{(1)} : x \in \left(0, \frac{l}{2} \right], 0 < t < \frac{x}{a} \right\} \cup \left\{ (t, x) \in Q^{(1)} : x \in \left[\frac{l}{2}, l \right), 0 < t < \frac{l-x}{a} \right\},$$

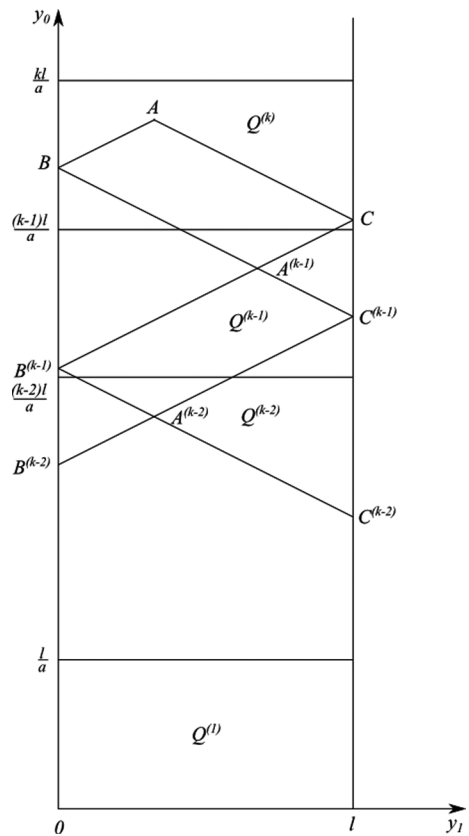


Рис. 1

$$\Omega^{(1,2)} = \left\{ (t, x) \in Q^{(1)} : x \in \left(0, \frac{l}{2} \right), \frac{x}{a} < t < \frac{l-x}{a} \right\},$$

$$\Omega^{(1,3)} = \left\{ (t, x) \in Q^{(1)} : x \in \left(\frac{l}{2}, l \right), \frac{l-x}{a} < t < \frac{x}{a} \right\},$$

$$\Omega^{(1,4)} = \left\{ (t, x) \in Q^{(1)} : x \in \left(0, \frac{l}{2} \right], \frac{l-x}{a} < t < l \right\} \cup \left\{ (t, x) \in Q^{(1)} : x \in \left[\frac{l}{2}, l \right), \frac{x}{a} < t < l \right\}.$$

Если рассматривать замыкания, то $\bar{Q}^{(1)} = \bigcup_{j=1}^4 \bar{Q}^{(1,j)}$.

Для $(t, x) \in \bar{Q}^{(1)}$ полностью характеристический параллелограмм не получится, а только его часть, где (t, x) – одна из его вершин. Конфигурация частей данного характеристического параллелограмма отличается друг от друга в зависимости от принадлежности их $\bar{Q}^{(1,j)}$ для каждого $j = \overline{1,4}$. Поэтому формулы решения задачи (1)–(3) также будут разные. Рассмотрим отдельно каждый случай для $\bar{Q}^{(1,j)}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

1. $j = 1$. Согласно формулам (7) и (10) значение решения задачи (1), (2) в точке (t, x) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(t, x) = u(A^{(1)}) &= g^{(1,0)}(x - at) + g^{(2,0)}(x + at) + u_r(t, x) = \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi = \end{aligned} \quad (15)$$

$$g^{(1,0)}(E^{(0)}) + g^{(2,0)}(F^{(0)}) + u_r(A^{(1)}), \quad A^{(1)} \in \bar{Q}^{(1,1)},$$

где $E^{(0)} = (0, x - at)$, $F^{(0)} = (0, x + at)$ (рис. 2).

2. $j = 2$. В соответствии с формулами (7), (10) и (11) в этом случае

$$\begin{aligned} u(t, x) = u(A^{(1)}) &= g^{(1,1)}(x - at) + g^{(2,0)}(x + at) + u_r(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi + \mu^{(1)} \left(t - \frac{x}{a} \right) + \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{-x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi = \end{aligned} \quad (16)$$

$$u(B^{(1)}) + g^{(2,0)}(F^{(0)}) - g^{(2,0)}(E^{(1)}) + u_r(B^{(1)}) + u_r(A^{(1)}),$$

где $B^{(1)} = \left(t - \frac{x}{a}, 0 \right)$, $E^{(1)} = (0, at - x)$ (рис. 3).

3. $j = 3$. Пусть $(t, x) = A^{(1)} \in \bar{Q}^{(1,3)}$. В соответствии с формулами (7), (10) и (12) имеем

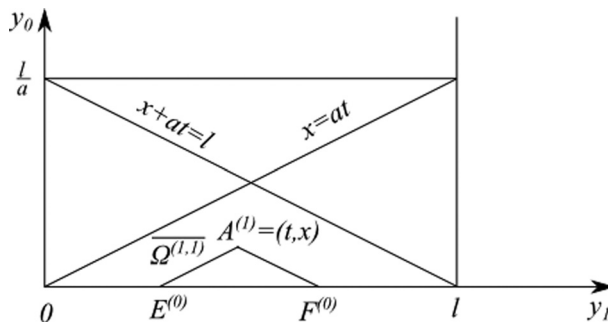


Рис. 2

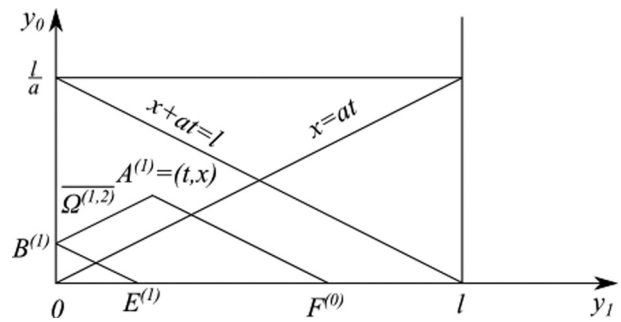


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = u(A^{(1)}) &= g^{(1,0)}(x - at) + g^{(2,1)}(x + at) + u_r(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) - \varphi(at - x + 2l)] + \\
 &\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{at-x+2l} \psi(\xi) d\xi + \mu^{(2)}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}\right) + \frac{1}{2a} \int_0^{t+\frac{x-l}{a}} d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{2l-x-a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \\
 &\frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi = u(C^{(1)}) + g^{(1,0)}(E^{(0)}) - g^{(2,0)}(F^{(1)}) - u_r(C^{(1)}) + u_r(A^{(1)}),
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $C^{(1)} = \left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}, l\right)$, $E^{(0)} = (0, x - at)$, $F^{(1)} = (0, at - x + 2l)$ (рис. 4).

4. $j = 4$. Пусть $(t, x) \in \bar{\Omega}^{(1,4)}$. Согласно формулам (7), (10)–(12) в этом случае решение задачи (1)–(3) определяется формулой (рис. 5)

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= g^{(1,1)}(x - at) + g^{(2,1)}(x + at) + u_r(t, x) = -\frac{1}{2}[\varphi(at - x) + \varphi(at - x + 2l)] + \\
 &\mu^{(1)}\left(t - \frac{x}{a}\right) + \mu^{(2)}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}\right) + \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{-x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \\
 &\frac{1}{2a} \int_0^{t+\frac{x-l}{a}} d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{2l-x-a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at-x+2l} \psi(\xi) d\xi = \\
 &u(B^{(1)}) + u(C^{(1)}) - g^{(1,0)}(E^{(1)}) - g^{(2,0)}(F^{(1)}) - u_r(B^{(1)}) - u_r(C^{(1)}) + u_r(A^{(1)}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, для получения численного решения задачи (1)–(3) методом характеристического параллелограмма с помощью формул (15)–(18) находим эти решения в точках $\bar{Q}^{(1)}$. При этом используем заданные условия (2) и (3), а также значения интеграла (8) функции f правой части уравнения (1), который определяет частное решение этого уравнения. Затем, используя формулу (14), находим численные значения и задачи (1)–(3) в $\bar{Q}^{(2)}$, в $\bar{Q}^{(3)}$ и т. д. Продвигаясь по $\bar{Q}^{(j)}$ можно найти значения решения u в $\bar{Q}^{(k)}$ для любого номера k . Данный процесс решения задачи (1)–(3) можно несколько обобщить.

Пусть $A^{(k)} = A$, $B^{(k)} = B$, $C^{(k)} = C$. Рассматривая построенные параллелограммы для каждого прямоугольника $\bar{Q}^{(j)}$, можно указать координаты всех его вершин. Если $A^{(k)} = A = (t, x)$, то через координаты t, x , числа a и l можно определить координаты всех остальных вершин. А именно:

$$A^{(j)} = \begin{cases} \left(t - \frac{(k-j)l}{a}, x\right), & j = k, k-2, k-4, \dots, \\ \left(t - \frac{(k-j)l}{a}, l-x\right), & j = k-1, k-3, \dots, \end{cases}$$

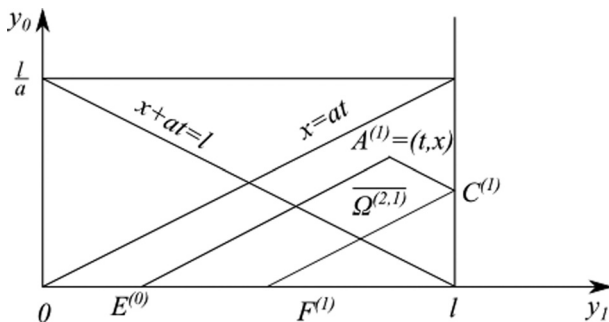


Рис. 4

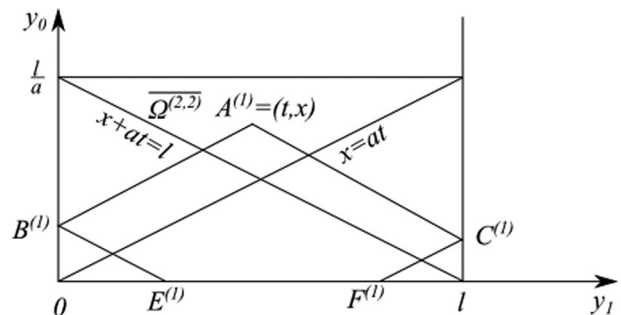


Рис. 5

$$B^{(j)} = \begin{cases} \left(t - \frac{x}{a} - \frac{(k-j)l}{a}, 0 \right), & j = k, k-2, k-4, \dots, \\ \left(t + \frac{x}{a} - \frac{(k-j+1)l}{a}, 0 \right), & j = k-1, k-3, \dots, \end{cases} \quad (19)$$

$$C^{(j)} = \begin{cases} \left(t + \frac{x}{a} - \frac{(k-j-1)l}{a}, l \right), & j = k, k-2, k-4, \dots, \\ \left(t - \frac{x}{a} - \frac{(k-j)l}{a}, l \right), & j = k-1, k-3, \dots \end{cases}$$

Отметим, что последовательность в (19) для $A^{(k)}$ заканчивается нумерацией $j = 1$. Вид $A^{(1)}$ зависит от k . Если k – четное число, то $A^{(1)} = \left(t - \frac{k-1}{a}l, l-x \right)$, если k – нечетное число, то $A^{(1)} = \left(t - \frac{k-1}{a}l, x \right)$.

Представление решения формулой (14) в точке $A = A^{(k)}$ можно продолжить дальше. Для этого согласно этой же формуле значение $u(A^{(k-1)})$ заменяем через $u(A^{(k-2)})$ и заданные значения u через граничные условия (3) и правую часть f уравнения (1), затем $u(A^{(k-2)})$ – через $u(A^{(k-3)})$ и т. д. Эту процедуру продолжаем до тех пор пока не получим в аналитическом представлении $u(A^{(k)})$ через $u(A^{(1)})$ и граничные слагаемые. Но конкретный вид этого представления зависит от четности номера k . Рассмотрим каждый отдельно из этих случаев.

Пусть k – четное число, $(t, x) \in Q^{(k)}$. Если проследить в этом построение решения задачи (1)–(3), то получим его значение в точке $A = (t, x)$ в виде

$$u(t, x) = u(A^{(k)}) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[u(B^{(j)}) - u_r(B^{(j)}) \right] + \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[u(C^{(j)}) - u_r(C^{(j)}) \right] + u_r(A^{(k)}) + u_r(A^{(1)}) - u(A^{(1)}), \quad (20)$$

где $A^{(1)} = \left(t - \frac{k-1}{a}l, l-x \right)$.

Если k – нечетное число, то

$$u(t, x) = u(A^{(k)}) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[u(B^{(j)}) - u_r(B^{(j)}) \right] + \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[u(C^{(j)}) - u_r(C^{(j)}) \right] + u_r(A^{(k)}) - u_r(A^{(1)}) + u(A^{(1)}), \quad (21)$$

где $A^{(1)} = \left(t - \frac{k-1}{a}l, x \right)$, $u(A^{(1)})$, определяется одной из формул (15)–(18).

У т в е р ж д е н и е. Формулы (20) и (21) показывают, что значения $u(t, x)$ решения задачи (1)–(3) можно вычислить для любого прямоугольника $\bar{Q}^{(k)}$ через граничные значения (2) и (3) задачи, частное решение $u_r(t, x)$ и решения u в прямоугольнике $\bar{Q}^{(1)}$ минус вычисления его в подобласти $Q^{(2, k-1)} = \left(\frac{2l}{a}, \frac{(k-1)l}{a} \right) \times (0, l) \subset Q$.

Подобно разбиению прямоугольника $Q^{(1)} = \left(0, \frac{l}{a} \right) \times (0, l)$ на подобласти $\Omega^{(1, i)}$, $i \in \overline{1, 4}$, прямоугольник $Q^{(k)} = \left((k-1)\frac{l}{a}, k\frac{l}{a} \right) \times (0, l)$ характеристиками $x - at = -(k-1)l$, $x + at = kl$ разобьем на соответствующие подобласти $\Omega^{(k, i)}$, $i \in \overline{1, 4}$.

З а м е ч а н и е. Если условия согласования (4) и (5) являются неоднородными, т. е. $\sum_{i=1}^3 \left[(\delta^{(i)})^2 + (\sigma^{(i)})^2 \right] \neq 0$, то решение задачи (1)–(3) или его производные терпят разрыв на некоторых или на всех характеристиках $x - at = -(j-1)l$, $x + at = jl$, $j = 1, 2, \dots, k$. Поэтому в этом случае при нахождении решения на характеристиках $x - at = -(k-1)l$, $x + at = kl$ рассматривается как

предельное значение на соответствующей характеристике внутри области $\Omega^{(k,s)}$, $s \in (1, 2, 3, 4)$. При использовании формул (20) или (21) следует брать вершину $A^{(1)}$ в $\Omega^{(1,s)}$, если $s = 1, 4$, и если $s = 2$ и используется формула (20), то $A^{(1)} \in \Omega^{(1,3)}$, для $s = 3 - A^{(1)} \in \Omega^{(1,2)}$. Если k – нечетное, то используется формула (21) и здесь для $(t, x) \in \bar{\Omega}^{(k,s)}$ точка $A^{(1)}$ должна принадлежать $\Omega^{(1,s)}$ для $s = 2, 3$.

Заключение. В данной работе предложен метод характеристического параллелограмма представления классического решения задач для гиперболических уравнений второго порядка. Основным результатом работы является доказательство формулы (14). **Решение задачи определяется** с помощью вершин характеристических параллелограммов. Здесь используются формулы классического решения для соответствующей задачи. В настоящем сообщении метод характеристического параллелограмма продемонстрирован на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. Полученные формулы эффективно можно использовать для численного решения исходной задачи как в случае однородных условий согласования, так и для неоднородных.

Данный метод можно применить и для других задач и уравнений гиперболического типа на основе классических для них решений.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 37–42.
2. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 45–49.
3. Корзюк, В. И. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма // Тр. Ин-та математики. – 2009. – Т. 17, № 2. – С. 23–34.
4. Разностная формула среднего значения для двумерного линейного гиперболического уравнения / В. З. Мешков [и др.] // Международная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», приуроченной 110-летию со дня рождения академика А. Н. Тихонова (31 октября – 3 ноября 2016 г., Москва): тезисы докладов. – Москва, 2016. – С. 59.

References

1. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Fitting conditions in the boundary problems for hyperbolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2013, vol. 57, no. 5, pp. 37–42 (in Russian).
2. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Shirma M. S. Classical solution of the first mixed problem for the equation of the string vibration. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2009, vol. 53, no. 1, pp. 45–49 (in Russian).
3. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Shirma M. S. Solution of the first mixed problem for the wave equation by the method of characteristics. *Trudy Instituta Matematiki*, 2009, vol. 17, no. 2, pp. 23–34 (in Russian).
4. Meshkov V. Z., Ermakova Yu. D., Polovinkin I. P., Polovinkina M. V. Difference formula of the mean value for the two-dimensional linear hyperbolic equation. *Mezhdunarodnaia konferentsiia «Sovremennye problemy matematicheskoi fiziki i vychislitel'noi matematiki», priurochennoi 110-letiiu so dnia rozhdeniia akademika A. N. Tikhonova (31 oktiabria – 3 noiabria 2016 goda, Moskva), tezis dokladov* [International conference “Contemporary problems of mathematical physics and computational mathematics” dedicated to the 110th anniversary of A. N. Tikhonov]. Moscow, 2016, pp. 59 (in Russian).

Информация об авторе

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Information about the author

Korzyuk Viktor Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Для цитирования

Корзюк, В. И. Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В. И. Корзюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 7–13.

For citation

Korzyuk V. I. Solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the use of the characteristic parallelogram method. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 3, pp. 7–13 (in Russian).