ISSN 1561-8323 (print)
УДК 511.42

Поступило в редакцию 10.04.2017
Received 10.04.2017

А. С. Кудин

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О МАЛОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Работа посвящена усилению и обобщению известной леммы из монографии А. О. Гельфонда «Трансцендентные и алгебраические числа» об оценке порядка приближения нуля неприводимым делителем целочисленного полинома. В лемме Гельфонда утверждается, что если полином $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ степени не более n и высоты не более Q имеет в некоторой трансцендентной точке $x\in\mathbb{R}$ значение $|P(x)|<Q^{-w}$, то при $w>6n$ найдется делитель $P(x)$, полином $d(x)\in\mathbb{Z}[x]$, являющийся степенью неприводимого над полем рациональных чисел целочисленного полинома, для которого справедливо $|d(x)|<Q^{-w+6n}$. Лемма Гельфонда и ее аналоги имеют важные приложения во многих проблемах метрической теории диофантовых приближений. Одно из них – результат В. И. Берника 1983 г. об оценке сверху размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности, который вместе с результатом А. Бейкера и В. Шмидта 1970 г. об оценке снизу размерности Хаусдорфа позволил найти ее точное значение. В. И. Берник усилил и обобщил лемму Гельфонда, используя более слабое условие $w>3n$ и получая более сильную оценку $|d(x)|<Q^{-w+n}$, а также рассматривая значения полиномов на заданном интервале. Однако область применения данного результата была ограничена из-за достаточно сильных условий на w. В данной работе получена оценка $|d(x)|<Q^{-w+n-1}$ на некотором интервале при отсутствии ограничений на w, что усиливает и обобщает лемму Гельфонда и существующие аналогичные результаты. В работе используются методы теории трансцендентных чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, трансцендентные числа, результант, неприводимый делитель, лемма Гельфонда

Alexey S. Kudin

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON THE ORDER OF ZERO APPROXIMATION BY IRREDUCIBLE DIVISORS OF INTEGER POLYNOMIALS

(Communicated by Corresponding Member V. V. Gorokhovik)

In the article we present an improvement to the lemma on the order of zero approximation by irreducible divisors of integer polynomials from A. O. Gelfond's monograph "Transcendental and algebraic numbers". The lemma says that if a polynomial $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ of degree not exceeding n and of height not exceeding Q satisfies inequality $|P(x)|<Q^{-w}$, $w>6n$, for some transcendental point $x\in\mathbb{R}$, then there exists a divisor $d(x)\in\mathbb{Z}[x]$ of $P(x)$ that can be written as a degree of some polynomial irreducible over the field of rational numbers satisfying $|d(x)|<Q^{-w+6n}$. Gelfond's lemma and similar results have important applications to many problems of the metric theory of Diophantine approximation. One of such applications is the result of V. Bernik (1983) on the upper bound for the Hausdorff dimension of the set of real numbers with specified order of zero approximation by the values of integer polynomials. This result along with the result of A. Baker and W. Schmidt (1970) on the lower bound of the Hausdorff dimension of the set mentioned above gives the exact formula. In order to prove the upper bound V. Bernik improved and extended Gelfond's lemma by using a weaker condition $w>3n$ and obtaining a better estimate $|d(x)|<Q^{-w+n}$, as well as by considering the values of polynomials on an interval. However, the condition on w is still restrictive and limits the range of problems this result could be applied to. In our work, we improve the existing results by obtaining the estimate $|d(x)|<Q^{-w+n-1}$ on some interval for any w. The result is obtained using the methods of the theory of transcendental numbers.

Keywords: Diophantine approximation, Hausdorff dimension, transcendental numbers, resultant, irreducible divisor, Gelfond's lemma

Пусть $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ – целочисленный полином степени $\deg P=n$ и высоты $H(P)=\max_{0\le i\le n}|a_i|$. Обозначим как $\mathcal{P}_n$ множество целочисленных полиномов степени не более n и как $\mathcal{P}_n(Q)$ множество целочисленных полиномов степени не более n и высоты не более Q. Пусть $\mu(A)$ – мера Лебега измеримого множества $A\subset\mathbb{R}$. Запись $f\ll_{v_1,v_2,...}g$ будет означать, что существует некоторая величина $C>0$ такая, что $f<Cg$. При этом величина C может зависеть от величин $v_1,v_2,...$, но не зависит от f и g.

Многие задачи метрической теории диофантовых приближений связаны с исследованием свойств множества $\mathcal{L}_n(w)$ всех $x\in\mathbb{R}$, для которых существует бесконечное число полиномов $P\in\mathcal{P}_n$, удовлетворяющих неравенству

$$|P(x)| < H(P)^{-w}.$$

Нетрудно доказать, используя принцип ящиков Дирихле, что $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathcal{L}_n(w)) = 0$ при $w < n$. В 1932 г. К. Малер [1] выдвинул предположение, что $\mu(\mathcal{L}_n(w)) = 0$ при $w > n$. Данная проблема была полностью решена В. Г. Спринджуком [2]. В дальнейшем стала актуальной задача нахождения размерности Хаусдорфа $\dim\mathcal{L}_n(w)$ при $w > n$. Окончательное ее решение дано в работах А. Бейкера и В. Шмидта [3] и В. И. Берника [4]. В [3] получены оценки сверху и снизу

$$\frac{n+1}{w+1} \le \dim\mathcal{L}_n(w) < 2\frac{n+1}{w+1},$$

однако они не совпадали. В [4] получена точная оценка сверху

$$\dim\mathcal{L}_n(w) \le \frac{n+1}{w+1},$$

из чего следовало $\dim\mathcal{L}_n(w) = \frac{n+1}{w+1}$.

В ходе доказательства данной оценки в [4] было получено усиление и обобщение одной леммы А. О. Гельфонда.

Л е м м а 1 [5, лемма VI, с. 183]. *Пусть задан некоторый полином $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $n \in \mathbb{N}$, $Q > 0$, общий делитель коэффициентов которого равен единице. Если для некоторого трансцендентного числа $x \in \mathbb{R}$ выполняется $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > 6n$, то найдется делитель $P(x)$, полином $d(x)$, являющийся степенью неприводимого над полем рациональных чисел полинома, который удовлетворяет неравенству*

$$|d(x)| < Q^{-w+6n}.$$

В работе В. И. Берника условие на w было ослаблено, а оценка $|d(x)|$ улучшена. Также значения полиномов рассматривались на некотором интервале.

Л е м м а 2 [4, лемма 14]. *Пусть задан некоторый полином $P \in \mathcal{P}_n(Q^\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $Q > 0$. Если для всех точек интервала $x \in I$ выполняется $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > 3\lambda n$, то найдется делитель $P(x)$, полином $d(x)$, являющийся степенью неприводимого над полем рациональных чисел полинома, который удовлетворяет для всех $x \in I$ неравенству*

$$|d(x)| \ll_n Q^{-w+\lambda n}.$$

Нетрудно доказать, что при достаточно большом w (например, $w > n^2$) справедлива оценка $|d(x)| \ll_n Q^{-w+\lambda(n-1)}$. Естественным образом возникает задача получения аналогичной оценки при как можно более слабых условиях на w.

В дальнейшем в работе [6] были получены продвижения в данном направлении ($w > 2{,}5n-1$), однако это было достигнуто за счет ухудшения оценки значения делителя $|d(x)| \ll_n Q^{-w+1{,}5n-1}$.

В данной работе мы усиливаем предыдущие результаты и получаем оценку сильнее $|d(x)| \ll_n Q^{-w+\lambda(n-1)}$ при отсутствии ограничений на w.

Т е о р е м а 1. *Пусть задан некоторый интервал $I \subset (-M, M)$, $M \ge 1$, и некоторый полином $P \in \mathcal{P}_n(Q^\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $Q > 0$. Если для всех точек интервала $x \in I$ выполняется $|P(x)| < Q^{-w}$, $w \in \mathbb{R}$, то найдется делитель $P(x)$, полином $t_1(x)$, $\deg t_1 = n_1$, $H(t_1) = Q^{\lambda_1}$, $\lambda_1 \ge 0$, являющийся степенью неприводимого над полем рациональных чисел полинома, который удовлетворяет для всех $x \in I$ неравенству*

$$|t_1(x)| \ll_n Q^{-w+n_1(\lambda-\lambda_1)+(n-n_1)\lambda_1+\delta}, \tag{1}$$

для любого $\delta > 0$ и всех $Q > Q_0(n, \delta, M)$, откуда следует

$$|t_1(x)| \ll_n Q^{-w+\lambda(n-1)+\delta}. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 3 [2]. *Если $P \in \mathcal{P}_n$ – приводимый полином, $P(x) = P_1(x)\cdot\ldots\cdot P_k(x)$ $(2 \le k \le n)$, $\deg P_i \ge 1$ $(1 \le i \le k)$, то*

$$H(P) \ll_n H(P_1)\cdot\ldots\cdot H(P_k) \ll_n H(P).$$

Л е м м а 4 [4]. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$ – *некоторый интервал и* $B \subset I$ – *измеримое множество вещественных чисел с условием* $\mu(B) \geq k^{-1}\mu(I)$, *где* k – *натуральное число. Если для всех* $x \in B$ *выполняется неравенство* $|P(x)| < U$, *где* $P \in \mathcal{P}_n$ *и* $U > 0$, *то для всех* $x \in I$ *выполняется неравенство*

$$|P(x)| < (3k)^n (n+1)^{n+1} U.$$

Л е м м а 5 [5]. *Пусть* $\delta, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ – *некоторые действительные числа,* n_1, n_2 – *натуральные числа,* α – *трансцендентное действительное число,* $\alpha \in (-M, M)$, $M \geq 1$, $Q > Q_0\,(n_1, n_2, \delta, M)$ – *достаточно большое действительное число. Далее пусть* $P_1(x) \in \mathcal{P}_{n1}(Q^{\lambda_1})$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{n2}(Q^{\lambda_2})$ – *полиномы без общих корней. Тогда, если для некоторых действительных* τ_1, τ_2 *выполняются неравенства* $|P_1(\alpha)| < Q^{-\tau_1}$, $|P_2(\alpha)| < Q^{-\tau_2}$, *то*

$$\min(\tau_1, \tau_2) < n_1\lambda_2 + n_2\lambda_1 + \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Если полином $P(x)$ неприводим, утверждение леммы тривиально. В противном случае представим $P(x)$ в виде произведения степеней различных неприводимых полиномов:

$$P(x) = t_1(x) \cdot \ldots \cdot t_k(x),$$

где $2 \leq k \leq n$. Очевидно, существует измеримое множество $B \subset I$, $\mu(B) \geq \frac{1}{2}\mu(I)$, для всех точек x которого $|t_1(x)| \leq |t_2(x)|$ (в противном случае, поменяем местами $t_1(x)$ и $t_2(x)$). Продолжая данную процедуру, получим измеримое множество $B \subset I$, $\mu(B) \gg_n \mu(I)$, для всех точек x которого выполняется

$$|t_1(x)| \leq |t_2(x)| \leq \ldots \leq |t_k(x)|. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторое трансцендентное число $x \in B$. Введем обозначения для степени, высоты и аппроксимации полиномов $t_i(x)$:

$$n_i = \deg t_i(x),$$
$$H(t_i) = Q^{\lambda_i}, \lambda_i \geq 0,$$
$$|t_i(x)| = Q^{-\tau_i},\ \tau_i \in \mathbb{R}.$$

Из определения $t_i(x)$ и леммы 3 вытекают следующие свойства введенных величин (для любого $\delta > 0$ при $Q > Q_0(\delta, n)$):

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \leq n,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i < \lambda + \delta,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i > w.$$

Из (3) получаем

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq \tau_k.$$

Применим лемму 5 к $t_1(x)$ и каждому $t_i(x)$, $2 \leq i \leq k$:

$$\tau_i = \min(\tau_1, \tau_i) < n_1\lambda_i + n_i\lambda_1 + \delta.$$

Просуммируем данные неравенства по всем $2 \leq i \leq k$. Здесь и далее операции над величинами δ производятся по условным правилам $n\delta = \delta$ и $\delta + \ldots + \delta = \delta$

$$\sum_{i=2}^{k} \tau_i < n_1\left(\sum_{i=2}^{k} \lambda_i\right) + \left(\sum_{i=2}^{k} n_i\right)\lambda_1 + \delta < n_1(\lambda - \lambda_1) + (n - n_1)\lambda_1 + \delta.$$

Следовательно,

$$w < \tau_1 + n_1(\lambda - \lambda_1) + (n - n_1)\lambda_1 + \delta. \tag{4}$$

Таким образом, неравенство (1) выполняется для всех трансцендентных чисел $x \in B$, откуда по лемме 4 следует его справедливость на всем интервале I.

Оценим максимальное значение функции $f(n_1, \lambda_1) = n_1(\lambda - \lambda_1) + (n - n_1)\lambda_1$ при $1 \le n_1 \le n - 1$ и $0 \le \lambda_1 \le \lambda$. На границах заданной области выполняется $f(n_1, \lambda_1) \le \lambda(n-1)$:

$$f(n_1, 0) = n_1\lambda \le \lambda(n-1),$$

$$f(n_1, \lambda) = \lambda(n - n_1) \le \lambda(n-1),$$

$$f(1, \lambda_1) = \lambda_1 + (n-2)\lambda_1 \le \lambda(n-1),$$

$$f(n-1, \lambda_1) = \lambda_1(n-1) - (n-2)\lambda_1 \le \lambda(n-1).$$

Локальный максимум может находиться в точке, определяемой условиями на частные производные,

$$0 = \frac{\partial f(n_1, \lambda_1)}{\partial n_1} = \lambda - 2\lambda_1,$$

$$0 = \frac{\partial f(n_1, \lambda_1)}{\partial \lambda_1} = n - 2n_1.$$

Однако $f\left(\frac{n}{2}, \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{n\lambda}{2} \le \lambda(n-1)$. Таким образом, из (4) получим

$$w < \tau_1 + \lambda(n-1) + \delta,$$

откуда следует (2) для всех трансцендентных чисел $x \in B$, и следовательно, для всех $x \in I$. Теорема 1 доказана.

Список использованных источников

1. Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Mathematische Annalen. – 1932. – Vol. 106, N 1. – S. 131–139. doi.org/10.1007/bf01455882
2. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
3. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1970. – Vol. s3-21, N 1. – P. 1–11. doi.org/10.1112/plms/s3-21.1.1
4. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1983. – Т. 42, № 3. – С. 219–253.
5. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 224 с.
6. Бударина, Н. В. Значения неприводимых делителей целочисленных полиномов / Н. В. Бударина, В. И. Берник, Х. О'Доннелл // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. B: Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2015. – № 2 (46). – С. 17–22.

References

1. Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Mathematische Annalen*, 1932, vol. 106, no. 1, ss. 131–139. doi.org/10.1007/bf01455882
2. Sprindzhuk V. G. *Mahler's problem in metric number theory*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1967. 184 p. (in Russian).
3. Baker A., Schmidt W. M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1970, vol. s3-21, no. 1, pp. 1–11. doi.org/10.1112/plms/s3-21.1.1
4. Bernik V. I. Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation. *Acta Arithmetica*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian).
5. Gelfond A. O. *Transcendental and algebraic numbers*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1952. 224 p. (in Russian).
6. Budarina N. V., Bernik V. I., O'Donnell H. The values of the irreducible divisors of integer polynomials. *Vesnik Magileuskaga dziarzhaunaga universiteta imia A. A. Kuliashova. Seryia B: Pryrodaznauchyia navuki (matematyka, fizika, biyalogiya)* [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B: Natural sciences (mathematics, physics, biology)], 2015, no. 2(46), pp. 17–22 (in Russian).

Информация об авторе

Кудин Алексей Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: knxd@yandex.ru.

Information about the author

Kudin Alexey Sergeevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Junior researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: knxd@yandex.ru.

Для цитирования

Кудин, А. С. О малости неприводимых делителей целочисленных полиномов / А. С. Кудин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 14–17.

For citation

Kudin A. S. On the order of zero approximation by irreducible divisors of integer polynomials. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 3, pp. 14–17 (in Russian).