ISSN 1561-8323 (print)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 539.12

Поступило в редакцию 29.03.2017
Received 29.03.2017

Е. М. Овсиюк, А. Д. Коральков

Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Республика Беларусь

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА И ОТРАЖЕНИЕ ОТ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО БАРЬЕРА

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Ранее было установлено существование эффекта полного отражения частиц от космологического барьера, генерируемого геометрией пространства Лобачевского. В настоящей работе исследован эффект «космологического зеркала» в условиях нестатической геометрии пространства–временени. Детально рассмотрен случай скалярного поля в случае осциллирующей модели де Ситтера. В условиях нестатичности геометрии эффект отражения от космологического барьера сохраняется. Показано также, что обращение в нуль множителя $\cos^2 t$ в метрике пространства–времени не приводит к сингулярному поведению решений уравнения для скалярного поля, поскольку имеются простые асимптотики решений по временной переменной t в виде чистых фазовых множителей, и при рассмотрении квадрата модуля волновых функций эти фазовые множители при $\cos t \to 0$ обращаются в 1.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Фока–Гордона, спин 0, осциллирующая модель де Ситтера, разделение переменных, точные решения, отражение частиц

Elena M. Ovsiyuk, Artem D. Koralkov

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Republic of Belarus

SCALAR FIELD IN THE OSCILLATING DE SITTER UNIVERSE AND REFLECTION FROM A COSMOLOGICAL BARRIER

(Communicated by Corresponding Member L. M. Tomilchik)

Recently it has been shown that the Lobachevsky geometry simulates an ideal mirror distributed in the space. Since the Lobachevsky model enters some cosmological models of the Universe, using theses models we need to take into account the presence of the «cosmological mirror». The earlier analysis assumed a static character of the space-time geometry. In this article, the generalization of the cosmological reflection effect to the oscillating de Sitter Universe is given for the scalar field. It is shown that the vanishing factor $\cos^2 t$ in the metric of space-time does not lead to a singular behavior of solutions of the wave equation for the scalar field; instead, the solutions have a simple phase factor behavior in the time variable t, so the squared modulus of the wave function at $\cos t \to 0$ turns to be 1.

Keywords: Klein–Fock–Gordon equation, spin 0, the oscillating de Sitter universe, separation of the variables, exact solutions, reflection of the particles

Введение. В работах [1–7] на основе построения решений уравнений Шредингера, Максвелла и Дирака в квазидекартовых координатах пространства Лобачевского

$$dS^2 = dt^2 - [e^{-2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2] \tag{1}$$

было показано, что геометрия Лобачевского оказывает на все три поля в некотором смысле одно и то же действие: квазиплоские волны, распространяющиеся в пространстве Лобачевского, в некоторой точке отражаются от эффективного потенциального барьера, создаваемого геометрией пространства Лобачевского, и двигаются в обратную сторону. Другими словами, пространство

Лобачевского действует на поля как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля в такую среду растет с увеличением энергии частицы (поля), также эта величина зависит от радиуса кривизны пространства Лобачевского. В силу того, что модель Лобачевского входит составным элементом в некоторые космологические модели Вселенной, отмеченное свойство означает, что в данных моделях необходимо учитывать эффект наличия такого «космологического зеркала»; оно эффективно должно вести к перераспределению плотности частиц во Вселенной.

Однако выполненный ранее анализ предполагал статический характер геометрии пространства–времени. В настоящей работе проведено обобщение исследований [1–7] для скалярного поля в случае осциллирующей модели де Ситтера.

1. Разделение переменных. Общековариантное уравнение Клейна–Фока–Гордона [8]

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+eA_{\alpha}\right)\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}+\frac{e}{\hbar c}A_{\beta}\right)-M^{2}\right]\Psi=0 \qquad (2)$$

рассмотрим в нестатических квазидекартовых координатах (1) пространства анти де Ситтера. В отсутствие электромагнитного поля уравнение (2) упростится:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}+M^{2}\right)\Psi=0,\quad M^{2}=\frac{m^{2}c^{2}\rho^{2}}{\hbar^{2}};$$

с учетом явного вида метрического тензора (1) оно принимает вид

$$\left[\frac{1}{\cos^{3}t}\frac{\partial}{\partial t}\cos^{3}t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\cos^{2}t}\left(e^{2z}\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z}\frac{\partial}{\partial z}+e^{2z}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}-e^{2z}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)+M^{2}\right]\Psi=0.$$

Полученное уравнение можно переписать так:

$$\cos^{2}t\left(\frac{1}{\cos^{3}t}\frac{\partial}{\partial t}\cos^{3}t\frac{\partial}{\partial t}+M^{2}\right)\Psi=\left(e^{2z}\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z}\frac{\partial}{\partial z}+e^{2z}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+e^{2z}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)\Psi;$$

следовательно, переменные разделяем подстановкой

$$\Psi(x)=e^{iax}e^{iby}T(t)F(z).$$

Дальше получаем

$$\cos^{2}t\left(\frac{1}{\cos^{3}t}\frac{d}{dt}\cos^{3}t\frac{d}{dt}+M^{2}\right)T=-\Lambda^{2}T,$$

$$\left(e^{2z}\frac{d}{dz}e^{-2z}\frac{d}{dz}-(a^{2}+b^{2})e^{2z}\right)F(z)=-\Lambda^{2}F(z),$$

Λ^2 – постоянная разделения. Таким образом, имеем два уравнения второго порядка:

$$\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}-3\tan t\frac{d}{dt}+\frac{\Lambda^{2}}{\cos^{2}t}+M^{2}\right)T=0,$$
$$\left(\frac{d^{2}}{dz^{2}}-2\frac{d}{dz}+\Lambda^{2}-(a^{2}+b^{2})e^{2z}\right)F(z)=0. \qquad (3)$$

Уравнение по переменной z подстановкой $F(z)=e^{z}\varphi(z)$ приводится к виду одномерного уравнения Шредингера с эффективным потенциалом $U(z)$ барьерного типа (плавно растущего до бесконечности с увеличением координаты $z\to+\infty$):

$$\left(\frac{d^{2}}{dz^{2}}+\Lambda^{2}-U(z)\right)\varphi(z)=0,\quad U(z)=1+(a^{2}+b^{2})e^{2z}. \qquad (4)$$

При $\Lambda^2 > 1$ физическая ситуация легко интерпретируется: слева возможна суперпозиция волн (падающей и отраженной), а справа за барьером волновая функция резко спадает до нуля.

Отметим, что случай $a = 0,\ b = 0$ является особым: при этом в (4) исчезает эффективный потенциальный барьер

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \Lambda^2 - 1\right)\varphi(z) = 0, \quad \varphi = e^{\pm i\sqrt{\Lambda^2-1}z}, \quad \Lambda^2 > 1,$$

т. е. для функции $f(z)$ здесь возникают решения типа обычных плоских волн.

2. Отражение частиц. Возвратимся к (3) и перейдем к переменной $Z = \sqrt{a_1^2 + b_2^2}\ e^z$:

$$Z \in (0, +\infty), \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} - \frac{1}{Z}\frac{d}{dZ} + \frac{\Lambda^2}{Z^2} - 1\right)F(Z) = 0. \tag{5}$$

Будем искать решения в виде $F(Z) = Z^A e^{BZ} f(Z)$. При A и B, выбранных согласно (дальше предполагаем $\Lambda^2 > 1$)

$$A = 1 - i\sqrt{\Lambda^2 - 1}, \quad B^2 = 1,$$

приходим к уравнению для $f(Z)$

$$Z\frac{d^2 f}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ)\frac{df}{dZ} - B(1 - 2A)f = 0.$$

Делаем еще одну замену $Z = y/2$:

$$y\frac{d^2 f}{dy^2} + (2A - 1 + By)\frac{df}{dy} + B(A - \frac{1}{2})f = 0;$$

при $B = -1$ получаем уравнение для вырожденной гипергеометрической функции [9]:

$$y\frac{d^2 Y}{dy^2} + (c - y)\frac{dY}{dy} - aY = 0, \quad c = 2a,$$

$$F(Z) = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y(y), \quad a = 1/2 - i\sqrt{\Lambda^2 - 1}, \quad c = 2a.$$

Будем использовать две пары линейно независимых решений [9]:

$$Y_1 = \Phi(a, 2a, y), \quad Y_2 = y^{1-2a}\Phi(1 - a, 2 - 2a, y);$$

$$Y_5 = \Psi(a, 2a, y), \quad Y_7 = e^y \Psi(a, 2a, -y);$$

они связаны линейными соотношениями Куммера [9]

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1 - 2a)}{\Gamma(1 - a)}Y_1 + \frac{\Gamma(2a - 1)}{\Gamma(a)}Y_2, \quad Y_7 = \frac{\Gamma(1 - 2a)}{\Gamma(1 - a)}Y_1 - \frac{\Gamma(2a - 1)}{\Gamma(a)}Y_2,$$

которые после умножения на $y^{a+1/2}e^{-y/2}$ дают

$$F_5 = \frac{\Gamma(1 - 2a)}{\Gamma(1 - a)}F_1 + \frac{\Gamma(2a - 1)}{\Gamma(a)}F_2, \quad F_7 = \frac{\Gamma(1 - 2a)}{\Gamma(1 - a)}F_1 - \frac{\Gamma(2a - 1)}{\Gamma(a)}F_2;$$

эти линейные соотношения связывают две пары решений уравнения (5).

Обращаем внимание, что решения F_1, F_2 описывают при $z \to -\infty$ волны с легко интерпретируемым асимптотическим поведением:

$$z \to -\infty, (y \to 0),$$

$$F_1 \sim y^{a+1/2} = \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1-i\sqrt{\Lambda^2-1}} e^z e^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}z},$$

$$F_2 \sim y^{a+1/2} y^{1-2a} = \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1+i\sqrt{\Lambda^2-1}} e^z e^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}z}.$$

Следовательно, например, функция F_5 (и связанная с ней φ_5) при $z \to -\infty$ ведет себя как суперпозиция двух плоских волн:

$$\varphi_5 \sim \frac{\Gamma(1 - 2a)}{\Gamma(1 - a)}\left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1-i\sqrt{\Lambda^2-1}} e^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}z} + \frac{\Gamma(2a - 1)}{\Gamma(a)}\left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1+i\sqrt{\Lambda^2-1}} e^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}z}.$$

Можно определить коэффициент отражения R:

$$M_- e^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}z} + M_+ e^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}z}, \quad R = \left|\frac{M_-}{M_+}\right|^2, \quad R = \left|\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(2a-1)}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-a)}\right|^2.$$

Учтем

$$1-2a = +2i\sqrt{\Lambda^2-1}, \quad 2a-1 = -2i\sqrt{\Lambda^2+1}, a = 1/2 - i\sqrt{\Lambda^2-1}, \quad 1-a = 1/2 + i\sqrt{\Lambda^2-1},$$

тогда

$$R = \left|\frac{\Gamma(+2i\sqrt{\Lambda^2-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\Lambda^2-1})}\right|^2 \left|\frac{\Gamma(1/2 - i\sqrt{\Lambda^2-1})}{\Gamma(1/2 + i\sqrt{\Lambda^2-1})}\right|^2 \equiv 1.$$

Найдем поведение F_5 в области больших y. Применяя известное асимптотическое соотношение $Y_5 = \Psi(a, c, y) \sim y^{-a}$, получим

$$z \to +\infty, \quad F_5 = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim$$

$$\left(2\sqrt{a^2+b^2}e^z\right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{a^2+b^2}e^z\right) \to \exp^{-e^{+\infty}} = 0.$$

Таким образом, решение F_5 описывает ситуацию, когда падающая слева волна отражается с вероятностью 1 от эффективного барьера; справа за барьером решение резко спадает до нуля. Легко найти критическую точку, после которой волновая функция резко убывает:

$$\Lambda^2 - 1 = (a^2+b^2)e^{2z} \quad \Rightarrow \quad z_0 = \ln\sqrt{\frac{\Lambda^2-1}{a^2+b^2}}.$$

3. Анализ уравнения по временной координате. В уравнении для функции $T(t)$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 3\tan t\frac{d}{dt} + \frac{\Lambda^2}{\cos^2 t} + M^2\right)T = 0 \qquad (6)$$

введем новую переменную

$$y = \frac{1-i\tan t}{2} = \frac{e^{-it}}{2\cos t}, \quad 1-y = \frac{1+i\tan t}{2} = \frac{e^{+it}}{2\cos t}; \qquad (7)$$

тогда уравнение (6) запишется в виде

$$\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\frac{d}{dy} - \Lambda^2 - \frac{1}{4}\frac{M^2}{y} - \frac{1}{4}\frac{M^2}{1-y}\right]T = 0.$$

Вводим подстановку $T = y^A(1-y)^B G$:

$$y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2} + \left[-\frac{1}{2} + 2A - (2A+2B-1)y\right]\frac{dG}{dy} +$$

$$\left[-(A+B)(A+B-2) - \Lambda^2 + \frac{1}{4}\frac{2A(2A-3)-M^2}{y} + \frac{1}{4}\frac{2B(2B-3)-M^2}{1-y}\right]G = 0.$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при y^{-1} и $(1-y)^{-1}$:

$$A = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}, \quad B = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9};$$

при этом уравнение упрощается

$$y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2} + \left[-\frac{1}{2} + 2A - (2A+2B-1)y\right]\frac{dG}{dy} - [(A+B)(A+B-2) + \Lambda^2]G = 0;$$

оно может быть отождествлено с уравнением гипергеометрического типа

$$y(1-y)G'' + [c - (a+b+1)y]G' - abG = 0.$$

Для параметров $c,\ a,\ b$ находим представления

$$c=-\frac{1}{2}+2A,\quad a=A+B-1\pm i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad b=A+B-1\mp i\sqrt{\Lambda^2-1}.$$

Выбирая разными способами параметры A, B, можно получить две пары решений.

Первая пара:

$$\text{I.}\quad A=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},\quad B=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},$$

$$T=y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}(1-y)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}G(a,b,c;y),$$

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9}+i\sqrt{\Lambda^2-1},$$

$$b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9}-i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad c=1+\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9};$$

$$\text{I}'.\quad A'=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},\quad B'=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},$$

$$T'=y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}(1-y)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}G(a',b',c';y),$$

$$a'=\frac{1}{2}+i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad b'=\frac{1}{2}-i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad c'=1+\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9};$$

эти решения совпадают вследствие тождества для решений Куммера:

$$F(a,b,c,y)=(1-y)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,z).$$

Вторая пара:

$$\text{II.}\quad \overline{A}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},\quad \overline{B}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},$$

$$\overline{T}=y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}(1-y)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}G(\overline{a},\overline{b},\overline{c};y),$$

$$\overline{a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9}+i\sqrt{\Lambda^2-1},$$

$$\overline{b}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9}-i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad \overline{c}=1-\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9};$$

$$\text{II}'.\quad \overline{A}'=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},\quad \overline{B}'=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9},$$

$$\overline{T}'=y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}(1-y)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}}G(a',b',c';y),$$

$$\overline{a}'=\frac{1}{2}+i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad \overline{b}'=\frac{1}{2}-i\sqrt{\Lambda^2-1},\quad \overline{c}'=1-\frac{1}{2}\sqrt{4M^2+9};$$

эти решения совпадают вследствие тождества $F(a,b,c,y)=(1-y)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,z)$.

Фактически, два независимых решения I и II строятся на основе следующих двух решений Куммера для гипергеометрического уравнения:

$$U_1=F(a,b,c;y)\ \Rightarrow\ \text{I},$$

$$U_5=y^{1-c}(1-y)^{c-a-b}F(1-a,1-b,2-c;y)\ \Rightarrow\ \text{II}.$$

Возвратимся к формулам (7):

$$y=\frac{1-x}{2}=\frac{1-i\tan t}{2}=\frac{e^{-it}}{2\cos t},\quad 1-y=\frac{1+i\tan t}{2}=\frac{e^{+it}}{2\cos t}.$$

При $\cos t = 0$ получаем бесконечное значение для переменной y:

$$\cos t = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} + \pi N, \quad y = \infty, \quad y \to -\frac{i(-1)^N}{0}, \quad 1 - y \to +\frac{i(-1)^N}{0},$$

$$t^A (1-y)^B \to \left(-\frac{i(-1)^N}{0}\right)^A \left(+\frac{i(-1)^N}{0}\right)^B = (-i)^A i^B (-1)^{A+B} \left(\frac{1}{0}\right)^{A+B};$$

соответственно, для множителей перед гипергеометрическими функциями в двух решениях находим выражения:

$$\text{I.} \quad A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}, \quad B = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}, \quad \left(\frac{1}{0}\right)^{A+B} \to \left(\frac{1}{0}\right)^{3/2+\sqrt{4M^2+9}/2},$$

$$\text{II.} \quad A = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}, \quad B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{4M^2+9}, \quad \left(\frac{1}{0}\right)^{A+B} \to \left(\frac{1}{0}\right)^{3/2-\sqrt{4M^2+9}/2}.$$

Чтобы описать поведение решений около этой особой точки (точнее, особых точек по переменной t) воспользуемся соотношением Куммера [9]

$$U_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} U_3 + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} U_4, \tag{8}$$

где

$$U_1 = F(a, b, c; y), \quad U_3 = (-y)^{-a} F\left(a, a+1-c, a+1-b; \frac{1}{y}\right),$$

$$U_4 = (-y)^{-b} F\left(b, b+1-c, b+1-a; \frac{1}{y}\right).$$

При $y \to \infty$ (8) принимает вид

$$F(a, b, c; y \to \infty) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} (-y)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} (-y)^{-b}.$$

Соответственно, полное решение $T(y)$ уравнения в окрестности этой бесконечности с учетом выражений для a, b, c

$$c = -\frac{1}{2} + 2A, \quad a = A + B - 1 + i\sqrt{\Lambda^2 - 1}, \quad b = A + B - 1 - i\sqrt{\Lambda^2 - 1}$$

задается равенством (убираем несущественный общий множитель $\Gamma(c)$)

$$T = y^A (-y)^B \left[\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} (-y)^{-A-B+1-i\sqrt{\Lambda^2-1}} + \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} (-y)^{-A-B+1+i\sqrt{\Lambda^2-1}} \right].$$

Таким образом, получаем

$$T(y \to \infty; \cos t \to 0) = (-1)^A \frac{e^{-it}}{2\cos t} \times$$

$$\left[\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} (-y)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}} + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} (-y)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}} \right].$$

В этом пункте следует вспомнить о множителе $\sqrt{-g} = \cos^3 t e^{-2z}$; очевидно, при комбинировании с квадратом модуля волновой функции он будет компенсировать ноль в знаменателе, и результирующий множитель не будет расходящимся в точках $\cos t = 0$.

Исследуем поведение функций $(-y)^{\pm i\sqrt{\Lambda^2-1}}$ в окрестности точек $\cos t = 0\ (y \to \infty)$. Здесь имеем равенства

$$(-y)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}} = \left(-\frac{1}{e^{2it}+1}\right)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}}, \quad (-y)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}} = \left(-\frac{1}{e^{2it}+1}\right)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}}.$$

Будем по отдельности рассматривать два случая: приближение к точке сингулярности слева и справа. Приближение к точке сингулярности слева $(\delta \to +\infty)$ описывается соотношениями

$$\begin{gathered} e^{2it} \to -1, \quad e^{2it} = -1 - \frac{1}{\delta}, \quad \delta \to +\infty, \\ (-y)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}} = (+\delta)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}} = e^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}\ln\delta}, \\ (-y)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}} = (-\delta)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}} = e^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}\ln(-\delta)}. \end{gathered} \tag{9}$$

Приближение к точке сингулярности справа $(\delta \to +\infty)$ описывается соотношениями

$$\begin{gathered} e^{2it} \to -1, \quad e^{2it} = -1 + \frac{1}{\delta}, \quad \delta \to +\infty, \\ (-y)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}} = (-\delta)^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}} = e^{+i\sqrt{\Lambda^2-1}\ln(-\delta)}, \\ (-y)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}} = (+\delta)^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}} = e^{-i\sqrt{\Lambda^2-1}\ln\delta}. \end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, и вход и выход из точек временной сингулярности $\cos t = 0$ описывается (бесконечно) осциллирующими во времени волновыми функциями вида $e^{i\alpha\delta}$, $\delta \to \infty$. Физический смысл этих особенностей недостаточно ясен. Чтобы исследовать поведение второго решения II, нужно использовать другое соотношение Куммера:

$$U_5 = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(b+1-c)} e^{\pi(1-c)} U_3 + \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(a+1-c)} e^{\pi(1-c)} U_4;$$

в остальном анализ аналогичен. Очевидно, что если использовать независимые решения для функции $T = T(t)$, основанные на решениях Куммера U_1, U_5, то будем иметь более простые асимптотики в виде чистых фазовых множителей из (9), (10). При рассмотрении квадрата модуля волновых функций эти фазовые множители при $\cos t \to 0$ будут обращаться в 1. Это означает, что обращение в нуль множителя $\cos^2 t$ в метрике пространства–времени (1) не приводит к сингулярному поведению решений уравнения для скалярного поля.

Заключение. Анализ может быть обобщен и на случай расширяющейся модели де Ситтера, однако это требует отдельного рассмотрения, поскольку предполагает использование комплексных координат в вещественном пространстве–времени; примеры такого рода применения комплексных координат см. в [10].

Благодарности. Авторы признательны В. М. Редькову за постановку задачи и полезные советы в работе.

Acknowledgements. The authors are grateful to V. M. Redkov for the problem statement and wholesome suggestions.

Список использованных источников

1. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / V. M. Red'kov [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2009. – Vol. 12, N 3. – P. 232–250.

2. Овсиюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Весцi Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.

3. Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна / Е. М. Овсиюк [и др.] // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. физ.-мат. науки. – 2012. – Т. 1, № 141. – С. 137–145.

4. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весн. Брэсцкага ўніверсітэта. Сер. 4: Фізіка, матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–36.

5. Овсиюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весцi НАН Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2012. – № 4. – С. 80–83.

6. Ovsiyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, N 4. – P. 331–344.

7. Овсиюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2 / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 76–85.

8. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

9. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.

10. Редьков, В. М. Частица в магнитном поле: 2-мерное сферическое пространство Римана и комплексный аналог полуплоскости Пуанкаре / В. М. Редьков, Е. М. Овсиюк, А. М. Ишханян // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 55–62.

References

1. Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Ovsiyuk E. M., Spix G. J. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2009, vol. 12, no. 3, pp. 232–250.

2. Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Solutions of the Maxwell equations in the quasi-Cartesian coordinates in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2009, no. 4, pp. 99–105 (in Russian).

3. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Kisel' V. V., Red'kov V. M. New problems in quantum mechanics and the Heun equation. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Ser. fiz.-mat. nauki* [St. Petersburg State Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics], 2012, vol. 1, no. 141, pp. 137–145 (in Russian).

4. Ovsiyuk E. M., Veko O. V. On Modeling a Potential Barrier in Schrödinger Theory by Geometry of the Lobachevsky Space. *Vesn. Brestskaga universiteta. Ser. 4: Fizika, matematyka* [Vesnik of Brest University. Series 4: Physics, Mathematics], 2011, no. 2, pp. 30–36 (in Russian).

5. Ovsiyuk E. M., Veko O. V. Plane-wave solutions for a particle with spin 1/2 in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2012, no. 4, pp. 80–83 (in Russian).

6. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2013, vol. 16, no. 4, pp. 331–344.

7. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. Modeling of a medium with the property of a perfect mirror for the light and spin 1/2 particles. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2015, no. 1, pp. 76–85 (in Russian).

8. Red'kov V. M. *Particle fields in the Riemann space and the Lorents group*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2009. 496 p. (in Russian).

9. Beitmen G., Erdeii A. *Higher transcendental functions*. Vol. 1: *Gauss hypergeometric function. Legendre function*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 294 p. (in Russian).

10. Red'kov V. M., Ovsiyuk E. M., Ishkhanyan A. M. Particle in the magnetic field: 2D Riemann spherical space and complex analogue of the Poincaré half-plane. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2013, vol. 57, no. 1, pp. 55–62 (in Russian).

Информация об авторах

Овсиюк Елена Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская область, Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Коральков Артем Дмитриевич – студент. Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская область, Республика Беларусь). E-mail: artemkoralkov@gmail.com.

Information about the authors

Ovsiyuk Elena Mikhailovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Gomel region, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Koralkov Artem Dmitrievich – Student. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Gomel region, Republic of Belarus). E-mail: artemkoralkov@gmail.com.

Для цитирования

Овсиюк, Е. М. Скалярное поле в осциллирующей вселенной де Ситтера и отражение от космологического барьера / Е. М. Овсиюк, А. Д. Коральков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 18–25.

For citation

Ovsiyuk E. M., Koralkov A. D. Scalar field in the oscillating De Sitter universe and reflection from a cosmological barrier. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 3, pp. 18–25 (in Russian).