ISSN 1561-8323 (print)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63

Поступило в редакцию 26.06.2017
Received 26.06.2017

П. П. Матус[1], Л. М. Хиеу[2]

*[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;
Католический университет Люблина, Люблин, Польша
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Аннотация. Настоящая работа посвящена построению монотонных разностных схем второго порядка локальной аппроксимации на неравномерных сетках по пространству для двумерного квазилинейного параболического уравнения конвекции–диффузии. Устанавливаются двусторонние оценки разностного решения и доказана важная априорная оценка в равномерной норме *C*.

Ключевые слова: неравномерная сетка, принцип максимума, принцип регуляризации, монотонная разностная схема, уравнение конвекции–диффузии

Для цитирования: Матус, П. П. Монотонные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного квазилинейного параболического уравнения конвекции–диффузии / П. П. Матус, Л. М. Хиеу // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 7–13.

Piotr P. Matus[1], Le Minh Hieu[2]

*[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus;
John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES ON NON-UNIFORM GRIDS FOR 2D QUASI-LINEAR PARABOLIC CONVECTION–DIFFUSION EQUATION

(Communicated by Academician Ivan V. Gaishun)

Abstract. The present paper is devoted to the construction of monotone difference second-order schemes for local approximation on non-uniform grids in space for 2D quasi-linear parabolic convection–diffusion equation. Two-sided estimates of the difference solution are found and an important a priori estimate in a uniform norm C is proved.

Keywords: non-uniform grid, maximum principle, regularization principle, monotone difference scheme, convection-diffusion equation

For citation: Matus P. P., Le Minh Hieu. Monotone difference schemes on non-uniform grids for 2D quasilinear parabolic convection–diffusion equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2017, vol. 61, no. 4, pp. 7–13 (in Russian).

Введение. В теории разностных схем [1; 2] принцип максимума применяется для исследования устойчивости и сходимости разностного решения в равномерной норме. Вычислительные методы, удовлетворяющие принципу максимума, принято называть монотонными [1; 2]. Монотонные схемы играют важную роль в вычислительной практике. Они позволяют получать численное решение без осцилляций даже в случае негладких решений [3].

При построении монотонных разностных схем желательно сохранить второй порядок аппроксимации по пространственной переменной. Такие схемы построены для параболических и гиперболических уравнений с наличием младших производных. Например, в [1; 2] приводится неконсервативная схема второго порядка аппроксимации для линейных параболических уравнений общего вида на равномерных сетках. В случае неравномерных сеток для стационарных и нестационарных задач с переменными коэффициентами без младших производных в [4] получена схема, для которой выполняется принцип максимума без ограничений на соотношения коэффициентов и шагов пространственной сетки (безусловная монотонность для стационарных уравнений). В [5] построены экономичные безусловно монотонные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке для нестационарных многомерных задач конвекции–диффузии.

Настоящая работа посвящена построению монотонных разностных схем второго порядка локальной аппроксимации на неравномерных сетках по пространству для двумерного квазилинейного параболического уравнения конвекции–диффузии. Построение таких схем основано на применении специального дифференциального тождества и принципа регуляризации [1; 2; 5]. Устанавливаются двусторонние оценки разностного решения и доказана важная априорная оценка в равномерной норме C.

Вспомогательные результаты. Пусть Ω_h – конечное множество узлов (сетка) в некоторой ограниченной области n-мерного евклидова пространства, $x \in \Omega_h$ – точка сетки Ω_h. Рассмотрим уравнение

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{1}$$

называемое канонической формой записи разностной схемы. Здесь $\mathcal{M}'(x) = \mathcal{M}(x) \setminus x$, $\mathcal{M}(x)$ – шаблон схемы. Будем предполагать выполнение обычных условий положительности коэффициентов

$$A(x) > 0, \quad B(x,\xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathcal{M}'(x), \tag{2}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathcal{M}'(x). \tag{3}$$

Для получения двусторонней оценки решения разностной схемы более удобной является следующая

Л е м м а [6]. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (2), (3). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (1) принадлежат интервалу изменения входных данных*

$$\min_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \le y(x) \le \max_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)}, \quad x \in \Omega_h. \tag{4}$$

С л е д с т в и е [1]. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда для решения разностной задачи (1) имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C*

$$\|y\|_C = \max_{x \in \Omega_h} |y(x)| \le \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

Постановка задачи и разностная схема. Пусть в области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0 \le t \le T]$, где $\bar{\Omega} = \{0 \le x_1 \le l_1,\ 0 \le x_2 \le l_2\}$ – прямоугольник с границей Γ, требуется найти функцию $u(x,t)$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющую начально-краевой задаче для двумерного квазилинейного параболического уравнения конвекции–диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(x)u + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \tag{5}$$

с граничными условиями Дирихле

$$\begin{aligned} u(0,x_2,t)&=\mu_1(x_2,t), \quad u(l_1,x_2,t)=\mu_2(x_2,t), \quad 0\le x_2\le l_2, \quad 0<t\le T,\\ u(x_1,0,t)&=\mu_3(x_1,t), \quad u(x_1,l_2,t)=\mu_4(x_1,t), \quad 0\le x_1\le l_1, \quad 0<t\le T, \end{aligned} \tag{6}$$

и начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\bar{\Omega}. \tag{7}$$

Предполагаем, что $q(x)\ge 0$, $x\in\Omega$, и существуют такие значения $k_{\min}$ и $k_{\max}$, чтобы было выполнено условие параболичности уравнения (5) на решении [7]

$$0<k_{\min}\le k_\alpha(u)\le k_{\max}, \quad \forall u\in\bar{D}_u, \quad k_{\min},k_{\max}=\text{const}, \quad \alpha=1,2,$$

$$\bar{D}_u=\{u(x,t):\ m_1\le u(x,t)\le m_2, \ (x,t)\in\bar{Q}_T\},$$

где m_1 и m_2 – константы, определяемые из условий

$$m_1=\min\left\{0,\mu_{\min}(x,t),\min_{x\in\bar{\Omega}}u_0(x)\right\} + T\min\left\{0, \inf_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\},$$

$$m_2=\max\left\{0,\mu_{\max}(x,t),\max_{x\in\bar{\Omega}}u_0(x)\right\} + T\max\left\{0, \sup_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\},$$

$$\mu_{\min}(x,t) = \min_{(x,t)\in\bar{Q}_T}\{\mu_1(x_2,t),\mu_2(x_2,t),\mu_3(x_1,t),\mu_4(x_1,t)\},$$

$$\mu_{\max}(x,t) = \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T}\{\mu_1(x_2,t),\mu_2(x_2,t),\mu_3(x_1,t),\mu_4(x_1,t)\}.$$

Далее предполагаем, что решение задачи (5)–(7) существует и единственно, а все входящие в (5) коэффициенты и искомая функция обладают непрерывными ограниченными производными необходимого по ходу изложения порядка.

В области $\bar{\Omega}$ введем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\bar{\omega}}_h=\left\{x_{i_1i_2}=\left(x_1^{i_1},x_2^{i_2}\right),\ x_\alpha^{i_\alpha}=x_\alpha^{i_\alpha-1}+h_\alpha^{i_\alpha},\ i_\alpha=1,2,\dots,N_\alpha-1,\ x_\alpha^0=0,\ x_\alpha^{N_\alpha}=l_\alpha,\ \alpha=1,2\right\},$$

для которой $\sum\limits_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}h_\alpha^{i_\alpha}=l_\alpha$, $\alpha=1,2$. Через $\hat{\omega}_h$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\hat{\bar{\omega}}_h$, а через γ_h – множество граничных узлов. Кроме того, будем рассматривать неравномерную сетку по временной переменной

$$\hat{\bar{\omega}}_\tau=\{t_0=0,\ t_n=t_{n-1}+\tau_n,\ n=1,2,\dots,N_0\}=\hat{\omega}_\tau\cup\{T\}, \quad \textstyle\sum_{n=1}^{N_0}\tau_n=T.$$

Для простоты будем использовать безындексные обозначения для независимых переменных

$$x=x_{i_1i_2}, \quad x_\alpha=x_\alpha^{i_\alpha}, \quad x_{\alpha\pm}=x_\alpha^{i_\alpha\pm1}, \quad h_\alpha=h_\alpha^{i_\alpha}, \quad h_{\alpha+}=h_\alpha^{i_\alpha+1}, \quad t=t_n, \quad \hat{t}=t_{n+1},$$

и для сеточных функций

$$g=g_{i_1i_2}=g(x_1^{i_1},x_2^{i_2},t_n)=g(x,t), \quad g^{\pm1_1}=g_{i_1\pm1,i_2}, \quad g^{\pm1_2}=g_{i_1,i_2\pm1}, \quad \hat{g}=g^{n+1}=g(x,t_{n+1}).$$

При построении монотонных схем второго порядка точности на трехточечном шаблоне для задачи (5)–(7) на неравномерной сетке $\omega=\hat{\omega}_h\times\hat{\omega}_\tau$ будем ориентироваться на соотношение [8]

$$u_{(2)\bar{x}_1\hat{x}_1}-\frac{\partial^2u(\bar{x},t)}{\partial x_1^2}=O(\hbar_1^2+\hbar_2^2), \quad u_{(1)\bar{x}_2\hat{x}_2}-\frac{\partial^2u(\bar{x},t)}{\partial x_2^2}=O(\hbar_1^2+\hbar_2^2). \tag{8}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$y_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}=\frac{1}{\hbar_\alpha}(y_{x_\alpha}-y_{\bar{x}_\alpha}), \quad y_{x_\alpha}=\frac{1}{h_{\alpha+}}(y^{(+1_\alpha)}-y), \quad y_{\bar{x}_\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}(y-y^{(-1_\alpha)}),$$

$$y_{(1)}=y(x^2)=y+\delta_1^+y_{x_1}+\delta_1^-y_{\bar{x}_1}, \quad y_{(2)}=y(x^1)=y+\delta_2^+y_{x_2}+\delta_2^-y_{\bar{x}_2},$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \bar{x}_\alpha = x_\alpha + \tilde{h}_\alpha, \quad \tilde{h}_\alpha = (h_{\alpha+} - h_\alpha)/3, \quad \hbar_\alpha = 0{,}5(h_\alpha + h_{\alpha+}),$$

$$x^1 = (x_1, \bar{x}_2), \quad x^2 = (\bar{x}_1, x_2), \quad \bar{g} = g(\bar{x}), \quad \delta_\alpha^\pm = 0{,}5(\tilde{h}_\alpha \pm |\tilde{h}_\alpha|), \quad \alpha = 1, 2.$$

Отметим, что значения искомой сеточной функции y в неузловых точках x^1, x^2 усредняются по формулам второго порядка аппроксимации с учетом направленных разностей. Выражения (8) означают, что относительно нерасчетной точки $\bar{x}$ (в случае равномерной сетки $\bar{x} \equiv x$) $u_{(3-\alpha)\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ аппроксимирует вторую частную производную по компоненту x_α $(\alpha = 1, 2)$ со вторым порядком.

Для построения монотонных разностных схем второго порядка аппроксимации для уравнения (5) на неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau$ воспользуемся тождеством $(ku')' = ku'' + k'u'$ и принципом регуляризации. Уравнение (5) может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial k_\alpha(u)}{\partial x_\alpha} + v_\alpha(u) \right) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(x)u + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T]. \tag{9}$$

Тогда задачу (9), (6), (7) аппроксимируем разностной схемой вида

$$\begin{gathered} y_{(\delta)t} = \sum_{\alpha=1}^{2} \bar{\kappa}_\alpha \bar{k}_\alpha \hat{y}_{(3-\alpha)\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\bar{r}_\alpha^+ \hat{y}_{(3-\alpha)x_\alpha} + \bar{r}_\alpha^- \hat{y}_{(3-\alpha)\bar{x}_\alpha} \right) - \bar{q}\hat{y}_{(\delta*)} + \hat{\bar{f}}, \quad x \in \hat{\omega}_h, \\ y_{0i_2}^{n+1} = \mu_1(x_2^{i_2}, t_{n+1}), \quad y_{N_1 i_2}^{n+1} = \mu_2(x_2^{i_2}, t_{n+1}), \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_{i_1 0}^{n+1} = \mu_3(x_1^{i_1}, t_{n+1}), \quad y_{i_1 N_2}^{n+1} = \mu_4(x_1^{i_1}, t_{n+1}), \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_{i_1 i_2}^{0} = u_0(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}), \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau_+}, \qquad \hat{y} = y(x_{i_1 i_2}, t_{n+1}), \qquad \tau_+ = \tau_{n+1},$$

$$y_{(\delta)} = y + \sum_{\alpha=1}^{2} (\delta_\alpha^+ y_{x_\alpha} + \delta_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}), \qquad y_{(\delta*)} = y + \sum_{\alpha=1}^{2} (\delta_\alpha^- y_{x_\alpha} + \delta_\alpha^+ y_{\bar{x}_\alpha}),$$

$$\bar{r}_\alpha^+ = 0{,}5(\bar{r}_\alpha + |\bar{r}_\alpha|) \ge 0, \qquad \bar{r}_\alpha^- = 0{,}5(\bar{r}_\alpha - |\bar{r}_\alpha|) \le 0,$$

$$\bar{k}_\alpha = k_\alpha(y_{(\delta)}), \quad \bar{r}_\alpha = (k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{\overset{\Delta}{x}_\alpha} + v_\alpha(y_{(\delta)}),$$

$$(k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{\overset{\Delta}{x}_\alpha} = \frac{(k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{x_\alpha} + (k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{\bar{x}_\alpha} + (k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{\overset{\circ}{x}_\alpha}}{3},$$

$$(k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{x_\alpha} = \frac{k_\alpha\left(y_{(3-\alpha)}^{+1_\alpha}\right) - k_\alpha(y_{(3-\alpha)})}{h_+},$$

$$(k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{\bar{x}_\alpha} = \frac{k_\alpha(y_{(3-\alpha)}) - k_\alpha\left(y_{(3-\alpha)}^{-1_\alpha}\right)}{h},$$

$$(k_\alpha(y_{(3-\alpha)}))_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = \frac{k_\alpha\left(y_{(3-\alpha)}^{+1_\alpha}\right) - k_\alpha\left(y_{(3-\alpha)}^{-1_\alpha}\right)}{h + h_+},$$

$$\bar{\kappa}_\alpha = \frac{1}{1 + \bar{R}_\alpha}, \quad \bar{R}_\alpha = \bar{b}_\alpha^+ \frac{h_{\alpha+} + 2h_\alpha}{6} - \bar{b}_\alpha^- \frac{2h_{\alpha+} + h_\alpha}{6}, \quad \bar{b}_\alpha^\pm = \frac{\bar{r}_\alpha^\pm}{\bar{k}_\alpha}.$$

Нетрудно показать, что разностная схема (10) аппроксимирует задачу (9), (6), (7) со вторым порядком по пространственной переменной.

3. Монотонность, двусторонние и априорные оценки. Для простоты дальнейших исследований ограничимся рассмотрением случая сгущения сеток по переменным x_1 и x_2 к началу соответствующего отрезка. Тогда $h_\alpha^{i_\alpha+1} - h_\alpha^{i_\alpha} > 0$, $\delta_\alpha^- = 0$, $\alpha = 1, 2$, и схема (10) примет более простой вид

$$y_t + \frac{h_{1+}-h_1}{3}y_{tx_1} + \frac{h_{2+}-h_2}{3}y_{tx_2} = \sum_{\alpha=1}^{2}\overline{\kappa}_\alpha \overline{k}_\alpha \left(\hat{y} + \frac{h_{3-\alpha+}-h_{3-\alpha}}{3}\hat{y}_{x_{3-\alpha}}\right)_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} +$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\overline{r}_\alpha^{+}\left(\hat{y} + \frac{h_{3-\alpha+}-h_{3-\alpha}}{3}\hat{y}_{x_{3-\alpha}}\right)_{x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2}\overline{r}_\alpha^{-}\left(\hat{y} + \frac{h_{3-\alpha+}-h_{3-\alpha}}{3}\hat{y}_{x_{3-\alpha}}\right)_{\bar{x}_\alpha} + \tag{11}$$
$$-q(\overline{x})\left(\hat{y} + \frac{h_{1+}-h_1}{3}\hat{y}_{\bar{x}_1} + \frac{h_{2+}-h_2}{3}\hat{y}_{\bar{x}_2}\right) + f(\overline{x},\hat{t}), \quad x \in \hat{\omega}_h.$$

Для применения принципа максимума схему (11) приведем к каноническому виду (1) и проверим достаточные условия на коэффициенты (2), (3).

В рассматриваемом нами случае шаблон схемы 8-точечный и состоит из узлов, изображенных на рисунке. Узлы шаблона пронумеруем согласно фигуре. Тогда для схемы (11) получим

$$\sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B^n(x,\xi) = \sum_{j=1}^{7} B_j^n.$$

Для того чтобы выписать коэффициенты A^n, B^n, F^n, необходимо записать схему (11) в индексной форме. После элементарных преобразований находим

$$B_1^n = \tau_+\left(\frac{\overline{\kappa}_2\overline{k}_2}{\hbar_2} - \overline{r}_2^{-}\right)\frac{h_1+2h_{1+}}{3h_2h_{1+}} + \overline{q}\,\frac{\delta_2^+}{h_2}, \quad B_2^n = \tau_+\left(\frac{\overline{\kappa}_2\overline{k}_2}{\hbar_2} - \overline{r}_2^{-}\right)\frac{\delta_1^+}{h_2h_{1+}},$$

$$B_3^n = \tau_+\left(\frac{\overline{\kappa}_1\overline{k}_1}{\hbar_1} - \overline{r}_1^{-}\right)\frac{h_2+2h_{2+}}{3h_1h_{2+}} + \overline{q}\,\frac{\delta_1^+}{h_1}, \quad B_5^n = \tau_+\left(\frac{\overline{\kappa}_1\overline{k}_1}{\hbar_1} - \overline{r}_1^{-}\right)\frac{\delta_2^+}{h_1h_{2+}},$$

$$B_4^n = -\frac{\delta_1^+}{h_{1+}} + \frac{\tau_+}{h_{1+}h_{2+}}\left(\frac{\overline{\kappa}_1\overline{k}_1(h_2+2h_{2+})}{3\hbar_1} + \frac{\overline{r}_1^{+}(h_2+2h_{2+})}{3} - \frac{\delta_1^+}{h_2}(2\overline{\kappa}_2\overline{k}_2 + \overline{r}_2^{+}h_2 - \overline{r}_2^{-}h_{2+})\right),$$

$$B_6^n = -\frac{\delta_2^+}{h_{2+}} + \frac{\tau_+}{h_{1+}h_{2+}}\left(\frac{\overline{\kappa}_2\overline{k}_2(h_1+2h_{1+})}{3\hbar_2} + \frac{\overline{r}_2^{+}(h_1+2h_{1+})}{3} - \frac{\delta_2^+}{h_1}(2\overline{\kappa}_1\overline{k}_1 + \overline{r}_1^{+}h_1 - \overline{r}_1^{-}h_{1+})\right),$$

$$B_7^n = \frac{\tau_+}{h_{1+}h_{2+}}\left(\frac{\overline{\kappa}_1\overline{k}_1\delta_2^+}{\hbar_1} + \frac{\overline{\kappa}_2\overline{k}_2\delta_1^+}{\hbar_2} + \overline{r}_1^{+}\delta_2^+ + \overline{r}_2^{+}\delta_1^+\right), \quad F^n = y_{(\delta)}^n + \tau_+ f(\overline{x},\hat{t}),$$

$$A^n = 1 + \tau_+\overline{q} + \sum_{j=1}^{7} B_j^n, \quad D^n = A^n - \sum_{j=1}^{7} B_j^n = 1 + \tau_+\overline{q}.$$

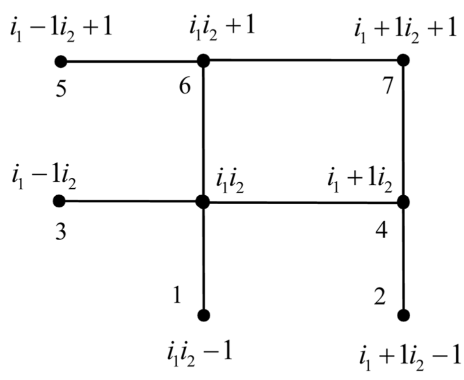
Нам нужно найти условие, чтобы $\overline{k}_{\alpha,i_1i_2}^{\,n} > 0$ для всех $i_\alpha = \overline{1, N-1}$, $\alpha=1,2$, $n = \overline{0, N_0}$. Очевидно, что когда $n = 0$ имеем $\overline{k}_{\alpha,i_1i_2}^{\,0} = k_\alpha(y_{(\delta)i_1i_2}^0)$, где

$$y_{(\delta)i_1i_2}^0 = u_{0,i_1i_2} + \delta_1^+(u_{0,i_1i_2})_{x_1} + \delta_2^+(u_{0,i_1i_2})_{x_2} = \left(1 - \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} - \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}}\right)u_{0,i_1i_2} + \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}}u_{0,i_1+1i_2} + \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}}u_{0,i_1i_2+1}.$$

Так как

$$0 < \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} < \frac{1}{3}, \quad 0 < \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}} < \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} - \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}} > 0,$$

то $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u_0(x) \le y_{(\delta)i_1i_2}^0 \le \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u_0(x)$, или $y_{(\delta)i_1i_2}^0 \in [m_1, m_2]$, т. е. $\overline{k}_{\alpha,i_1i_2}^{\,0} = k_\alpha(y_{(\delta)i_1i_2}^0) > 0$. Предположим, что для произвольного n тоже верно неравенство $\overline{k}_{\alpha,i_1i_2}^{\,n} > 0$. Тогда из этого предположения имеем $B_j^n > 0$, $j = 1,2,3,5,7$. Остальные коэффициенты $B_j^n > 0$, $j = 4,6$ будут положительными, если выполнены следующие условия:



$$\frac{h_{1+}-h_1}{\hbar_1} < \frac{3\overline{\kappa}_1^n \overline{k}_1^n}{2\overline{\kappa}_2^n \overline{k}_2^n + \overline{r}_2^{n+} h_2 - \overline{r}_2^{n-} h_{2+}} \left(\frac{\hbar_2}{\hbar_1}\right)^2, \tag{12}$$

$$\frac{h_{2+}-h_2}{\hbar_2} < \frac{3\overline{\kappa}_2^n \overline{k}_2^n}{2\overline{\kappa}_1^n \overline{k}_1^n + \overline{r}_1^{n+} h_1 - \overline{r}_1^{n-} h_{1+}} \left(\frac{\hbar_1}{\hbar_2}\right)^2, \tag{13}$$

$$\tau_+ \ \ge \ \max\left\{\left\|\Delta t_1^n\right\|_C, \ \left\|\Delta t_2^n\right\|_C\right\}, \tag{14}$$

где

$$\Delta t_1^n = \frac{h_{2+}(h_{1+}-h_1)}{3}\left(\frac{\overline{\kappa}_1^n \overline{k}_1^n (h_2+2h_{2+})}{3\hbar_1} - \frac{\delta_1^+}{h_2}(2\overline{\kappa}_2^n \overline{k}_2^n + \overline{r}_2^{n+} h_2 - \overline{r}_2^{n-} h_{2+})\right)^{-1},$$

$$\Delta t_2^n = \frac{h_{1+}(h_{2+}-h_2)}{3}\left(\frac{\overline{\kappa}_2^n \overline{k}_2^n (h_1+2h_{1+})}{3\hbar_2} - \frac{\delta_2^+}{h_1}(2\overline{\kappa}_1^n \overline{k}_1^n + \overline{r}_1^{n+} h_1 - \overline{r}_1^{n-} h_{1+})\right)^{-1}.$$

На основании оценки (4) леммы для произвольного $t = t_n \in \omega_\tau$ и всех $i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, имеем

$$\begin{gathered}\min\left\{\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \min_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}}\left(\frac{y_{(\delta)i_1i_2}^n + \tau_{n+1}\overline{f}_{i_1i_2}^{n+1}}{1+\tau_{n+1}\overline{q}_{i_1i_2}}\right)\right\} \le \\ y_{i_1i_2}^{n+1} \le \max\left\{\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \max_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}}\left(\frac{y_{(\delta)i_1i_2}^n + \tau_{n+1}\overline{f}_{i_1i_2}^{n+1}}{1+\tau_{n+1}\overline{q}_{i_1i_2}}\right)\right\}.\end{gathered} \tag{15}$$

Из очевидных неравенств $\min\limits_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}}(y_{(\delta)i_1i_2}^n) \ge \min\limits_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}} y_{i_1i_2}^n$, $\max\limits_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}}(y_{(\delta)i_1i_2}^n) \le \max\limits_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}} y_{i_1i_2}^n$ из (15) следует, что

$$\begin{gathered}\min\left\{0, \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \min_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}} y_{i_1i_2}^n + \tau_{n+1}\inf_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\} \le \\ y_{i_1i_2}^{n+1} \le \max\left\{0, \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \max_{\substack{1\le i_1\le N_1-1\\ 1\le i_2\le N_2-1}} y_{i_1i_2}^n + \tau_{n+1}\sup_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\}.\end{gathered} \tag{16}$$

Используя индукцию по n, из (16) получаем двустороннюю оценку через входные данные без предположения о знакоопределенности входных данных

$$m_1^{n+1} \le y_{i_1i_2}^{n+1} \le m_2^{n+1}, \quad i_\alpha = 0, 1, \ldots N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{17}$$

где

$$m_1^{n+1} = \min\{0, \mu_{\min}(x,t), \min_{x\in\overline{\Omega}} u_0(x)\} + t_{n+1}\min\left\{0, \inf_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\} \ \ge \ m_1,$$

$$m_2^{n+1} = \max\{0, \mu_{\max}(x,t), \max_{x\in\overline{\Omega}} u_0(x)\} + t_{n+1}\max\left\{0, \sup_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\} \ \le \ m_2.$$

Из (17) получаем $y_{i_1i_2}^{n+1} \in [m_1, m_2]$, $i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, т. е. $\overline{k}_{\alpha,i_1i_2}^{n+1} = k_\alpha(y_{(\delta)i_1i_2}^{n+1}) > 0$. Таким образом, неравенства (12)–(14) гарантируют выполнение условия монотонности (2), (3). Тогда имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия (12)–(14). Тогда разностная схема (11) монотонна, ее решения принадлежат окрестности точного решения* $y \in \bar{D}_u$ *и имеют место двусторонние оценки вида (17).*

На основании принципа максимума обычным образом устанавливается и следующая важная априорная оценка в норме *C*.

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условия (12)–(14). Тогда для решения разностной схемы (11) при любом* $t_n \in \hat{\omega}_\tau$ *верна априорная оценка*

$$\left\|y(t_{n+1})\right\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\left\|u_0\right\|_{\bar{C}}, \max_{1\le k\le n+1}\left\|\mu(t_k)\right\|_{C_\gamma}\right\} + t_{n+1}\max_{1\le k\le n+1}\left\|\bar{f}(t_k)\right\|_C,$$

где

$$\left\|\mu(t_k)\right\|_{C_\gamma} = \max\left\{\left\|\mu_1(t_k)\right\|_{C_\gamma}, \left\|\mu_2(t_k)\right\|_{C_\gamma}, \left\|\mu_3(t_k)\right\|_{C_\gamma}, \left\|\mu_4(t_k)\right\|_{C_\gamma}\right\}.$$

Список использованных источников

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. А. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 420 с.
4. Матус, П. П. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, Во Тхи Ким Туен, Ф. Гаспар // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 18–22.
5. Разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений математической физики с переменными коэффициентами / А. А. Самарский [и др.] // ЖВМ и МФ. – 2001. – Т. 41, № 3. – С. 407–419.
6. Малафей, Д. А. Экономичные монотонные разностные схемы для многомерных задач конвекции–диффузии на неравномерных сетках / Д. А. Малафей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 4. – С. 21–25.
7. Матус, П. П. Принцип максимума для разностных схем с непостоянными входными данными / П. П. Матус, Л. М. Хиеу, Л. Г. Волков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 5. – С. 13–17.
8. Samarskii, A. Difference schemes with operator factors / A. Samarskii, P. Vabishchevich, P. Matus. – Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 384 p. doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

References

1. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes.* Moscow, Nauka Publ., 1989. 616 p. (in Russian).
2. Samarskii A. A., Gulin A. A. Numerical methods. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p. (in Russian).
3. Fridman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. N. J., Prentice Hall, 1964. 347 p.
4. Matus P. P., Vo Thi Kim Tuyen, Gaspar F. Monotone difference schemes for linear parabolic equations with mixed boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no. 5, pp. 18–22 (in Russian).
5. Mazhukin V. I., Malaphei D. A., Matus P. P., Samarskii A. A. Difference schemes on irregular grids for equations of mathematical physics with variable coefficients. *Computational mathematics and mathematical physics*, 2001, vol. 41, no. 3, pp. 379–391.
6. Malaphei D. A. Economical monotone difference schemes for multidimensional problem of convection diffusion on nonuniform grids. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2000, vol. 44, no. 4, pp. 21–25 (in Russian).
7. Matus P. P., Hieu L. M., Vulkov L. G. Maximum principle for finite-difference schemes with non sigh-constant input data. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 5, pp. 13–17 (in Russian).
8. Samarskii A., Vabishchevich P., Matus P. *Difference schemes with operator factors.* Boston, Dordrecht, London, Kluwer Academic Publishers, 2002. 384 p. doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: matus@im.bas-net.by.

Ле Минь Хиеу – аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lmhieuktdn@gmail.com.

Information about the authors

Matus Piotr Pavlovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: matus@im.bas-net.by.

Le Minh Hieu – Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lmhieuktdn@gmail.com.