ISSN 1561-8323 (print)
УДК 511.42
Поступило в редакцию 28.06.2017
Received 28.06.2017

В. И. Берник, М. А. Жур

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ВО МНОЖЕСТВАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ МАЛОЙ МЕРЫ ЛЕБЕГА

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Согласно теореме Абеля не все корни многочленов степени больше четырех могут быть записаны в виде радикалов. Поэтому в 1970 г. Бейкер и Шмидт ввели понятие регулярности для счетных множеств точек прямой и плоскости. Они доказали свойство регулярности множеств действительных алгебраических чисел. В данной работе найдены законы совместного распределения действительных и комплексных чисел фиксированной степени и ограниченной высоты в параллелепипедах в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^l \times \mathbb{C}^s$ малой меры Лебега. Основой доказательства является метрическая теорема о том, что целочисленные многочлены и их производные могут принимать малые значения только на множествах $K \subset \Omega$, мера которых не превосходит $\delta_0 \mu\Omega$ при любых $\delta_0 > 0$. Затем используются леммы из теории трансцендентных чисел, позволяющие доказывать существование алгебраических чисел в окрестности точек с малым значением модуля многочлена и небольшим модулем производной.

Ключевые слова: теорема Дирихле, алгебраические числа, высота многочлена, мера Лебега, существенные множества

Для цитирования: Берник, В. И. Алгебраические числа во множествах действительных и комплексных чисел малой меры Лебега / В. И. Берник, М. А. Жур // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 14–19.

Vasiliy I. Bernik, Maksim A. Zhur

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ALGEBRAIC NUMBERS IN SETS OF REAL AND COMPLEX NUMBERS OF SMALL LEBESGUE MEASURE

(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)

Abstract. According to Abel's theorem, not all roots of polynomials of degree greater than four can be written in the form of radicals. Therefore, in 1970 Baker and Schmidt introduced the notion of regularity for points of countable sets of a line and a plane. They proved the regularity property of sets of real algebraic numbers. In this paper, we find the laws for a joint distribution of real and complex numbers of fixed degree and bounded height in parallelepipeds in a space $\Omega = \mathbb{R}^l \times \mathbb{C}^s$ of small Lebesgue measure. The basis of the proof is the metric theorem that integer polynomials and their derivatives can take small values only on sets $K \subset \Omega$, the measure of which does not exceed $\delta_0 \mu\Omega$ for any $\delta_0 > 0$. Then we use the lemmas of the theory of transcendental numbers that make it possible to prove the existence of algebraic numbers in a neighborhood of points with a small value of the modulus of a polynomial and a small module of a derivative.

Keywords: Dirichlet's theorem, height of a polynomial, algebraic numbers, Lebesgue measure, essential sets

For citation: Bernik V. I., Zhur M. A. Algebraic numbers in sets of real and complex numbers of small Lebesgue measure. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 14–19 (in Russian).

Нетрудно доказать, что множество алгебраических чисел всюду плотно на комплексной плоскости. Однако, вместе с тем, для множества алгебраических чисел ограниченной высоты можно построить круги малого радиуса, не содержащие таких алгебраических чисел [1]. Распределение алгебраических чисел на комплексной плоскости – одна из ключевых задач в теории диофантовых приближений [2].

Пусть $Q > 1$ – натуральное число и

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}, \deg P = n,\ H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i| < Q. \qquad (1)$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – корни многочлена $P(x)$. Величина $H(P)$ называется высотой $P(x)$, а величина $H(\alpha_i)$ – высотой алгебраического числа, которая равна высоте минимального многочлена алгебраического числа α_i.

Определим множество, содержащее все многочлены вида (1)

$$P_n(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = n \geq 2, H(P) \leq Q\}.$$

Пусть

$$n \geq n_1 = 2s + l,$$

где l – число действительных корней многочлена $P(x)$; $2s$ – число комплексных корней $P(x)$ с ненулевой мнимой частью.

Далее $\Pi = \prod_{j=s+1}^{l+s} I_j(u_j) \times \prod_{t=1}^{s} K_t(u_t)$ – множество, где $I_j \in \mathbb{R}$; $K_t \in \mathbb{C}$; $I_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; $K_j \subset T_O(0,1)$, где $T_O(0,1) \in \mathbb{C}$ – круг с центром в точке $O(0, 0)$, а также $u_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., l\}$ и $u_i \in \mathbb{C}, i \in \{l+1, ..., s+l\}$ и $\mu I_j \leq Q^{-\eta_1}$, $\mu K_t \leq Q^{-\eta_1}$.

Вначале приведем формулировки утверждений, необходимых для доказательства теоремы.

Л е м м а 1 [3, с. 184]. *Пусть α_1 – ближайший к x корень $P(x)$. Тогда справедливо неравенство*

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\max(|P(x_1)|, ..., |P(x_{s+l})|) < c_1 Q^{-\eta_1}, \tag{2}$$

где $x \in \Pi$; $\sum_{i=1}^{s+l} \eta_1 \leq n-1$. Нетрудно показать [4], используя принцип ящиков Дирихле, что неравенство (2) выполняется при $c_1 > 2\sqrt{2}(n+1)$, где c_1 зависит только от n.

Обозначим через $\mathfrak{L}_n(Q)$ множество точек $x \in \Pi$, для которых существует многочлен $P \in P_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} \max(|P(x_1)|, ..., |P(x_{s+l})|) < c_1 Q^{-\eta_1}, \\ \min(|P'(x_1)|, ..., |P'(x_{s+l})|) \leq \delta_0 Q, \delta_0 > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathfrak{L}_n(Q)$ – множество $x \in \Pi$, $|x| > \delta$, для которых система неравенств (3) имеет решение $P(z) \in P_n(Q)$ при условиях*

$$\begin{aligned} &|u_m - u_k| > \delta, m, k \in \{s+1, ..., s+l\}, \\ &|u_i - \overline{u}_j| > \delta, \\ &|\overline{u}_i - \overline{u}_j| > \delta, i, j \in \{1, ..., s\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда справедлива оценка

$$\mu \mathfrak{L}_n(Q) < \frac{1}{2n} \mu K.$$

Т е о р е м а 2. *Если $\sum_{i=1}^{s+l} \mu_i \leq n-1$, то в параллелепипеде $\Pi = \prod_{j=s+1}^{l+s} I_j(u_j) \times \prod_{t=1}^{s} K_t(u_t)$ существует не менее $c_{14} Q^{n+1} \mu K$ точек с алгебраическими координатами степени n и высоты $H(\overline{\alpha}) < Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Из условия разделенности точек (4) и леммы 1 следует, что множество $\mathfrak{L}_n(Q)$ содержится в объединении параллелепипедов

$$\bigcup_{P \in P_n(Q)} \sigma_P(\alpha),$$

где

$$\sigma_P(\alpha) = \{x \in \Pi : |x_i - \alpha_{0i}| < c_1 Q^{-\eta_1} |P'(\alpha_{0i})|^{-1}, i \in \{1, 2, ..., s+l\}\}, \eta_2 = \frac{(n_1 - 1)}{n-1} \eta_1.$$

Тогда для меры множества $\mathfrak{L}_n(Q)$ выполняется оценка

$$\mu\mathfrak{L}_n(Q) \le \mu \bigcup_{P\in P_n(Q)} \sigma_P(\alpha) \le \bigcup_{P\in P_n(Q)} \mu\sigma_P(\alpha).$$

Рассмотрим расширенные параллелепипеды

$$\sigma'_P(\alpha) = \{x \in \Pi : |x_i - \alpha_{1i}| < c_2 Q^{-\eta_2} |P'(\alpha_{1i})|^{-1}, i \in \{1, 2, ..., s+l\}\}. \tag{5}$$

Очевидно, что меры параллелепипедов $\sigma_P(\alpha)$ и $\sigma'_P(\alpha)$ связаны неравенствами

$$\mu\sigma_P(\alpha) \le c_1^{l+s} c_2^{-l-s} Q^{\sum_{i=1}^{s+l}(\eta_2-\eta_1)} \mu\sigma'_P(\alpha) \le c_1^{l+s} c_2^{-l+s} Q^{n_1-n} \mu\sigma'_P(\alpha). \tag{6}$$

Зафиксируем вектор $\overline{b} = (a'_n, a'_{n-1}, ..., a'_{n_1+1})$ и рассмотрим класс многочленов с фиксированными коэффициентами $\overline{b}$

$$T_n(\overline{b}) = \{P \in P_n(Q) : P = a'_n x^n + a'_{n_1+1} x^{n_1+1} + a_{n_1} x^{n_1} + ... + a_0\}.$$

Очевидно, что

$$\#\{\overline{b}\} \le c_3 Q^{n-n_1}. \tag{7}$$

Далее будем рассматривать многочлены $P \in T_n(\overline{b})$. Пусть $P_1, P_2 \in T_n(\overline{b})$ и $P_1 \ne P_2$. Рассмотрим случай, когда для любого параллелепипеда $\sigma'_{P_2}(\alpha_2)$ выполняется неравенство

$$\mu(\sigma'_{P_1}(\alpha_1) \bigcap \sigma'_{P_2}(\alpha_2)) < \frac{1}{2}\mu\sigma'_{P_1}(\alpha_1).$$

Такие параллелепипеды $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$ называются существенными. Из неравенства (7) следует, что большая часть параллелепипеда $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$ свободна от точек, принадлежащих другим параллелепипедам. Поэтому справедлива оценка

$$\sum_{P\in T_n(\overline{b})} \mu\sigma'_P(\alpha) \le 2\mu\Pi. \tag{8}$$

Из неравенств (6)–(8) следует

$$\sum_{\overline{b}} \sum_{P\in T_n(\overline{b})} \mu\sigma_P(\alpha) \le \sum_{\overline{b}} c_1^{s+l} c_2^{-s-l} Q^{n_1-n} \sum_{P\in T_n(\overline{b})} \mu\sigma'_P(\alpha) \le \frac{1}{4n}\mu\Pi,\ c_2 = c_1(2n)^{s+l}. \tag{9}$$

Рассмотрим случай несущественных параллелепипедов. В случае если параллелепипед $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$ несущественный, то существует параллелепипед $\sigma'_{P_2}(\alpha_2)$ такой, что выполняется неравенство

$$\mu(\sigma'_{P_1}(\alpha_1) \cap \sigma'_{P_2}(\alpha_2)) > \frac{1}{2}\mu\sigma'_{P_1}(\alpha_1).$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора многочленов P_1 и P_2 на $\sigma'_{P_1,i}(\alpha_{1i}) \cap \sigma'_{P_2,i}(\alpha_{2i})$, $i \in \{1, ..., s+l\}$

$$P_j(x_i) = P_j(\alpha_{ji}) + P_j{}'(\alpha_{ji})(x_i - \alpha_i) + ... + \frac{1}{n!}P_j^{(n)}(\alpha_{ji})(x_{ji} - \alpha_i)^n,\ j = \{1, 2\}. \tag{10}$$

Из определения параллелепипеда (5) следует неравенство

$$|P_j{}'(\alpha_{ji})(x_i - \alpha_{ji})| \le c_2 Q^{-\eta_2}. \tag{11}$$

Оценим $|P'(\alpha_i)|$

$$|P'(\alpha_i)| = |a_n| \prod_{1<i\ne j\le n} |\alpha_i - \alpha_j| \ge c_3 Q^{-(n-1)} \ge c_3 Q^{-\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}} \ge c_3 Q^{-\frac{\eta_2}{2}+\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Используя неравенство (12), получим оценку остальных слагаемых системы (10)

$$\left|\frac{1}{k!}P_j^{(k)}(x_i-\alpha_i)^k\right| \le C_n^k Q^{1-k\eta_2} c_4^k Q^{k\left(\frac{\eta_2}{2}-\frac{1}{2}\right)} \le C_n^k c_4^k Q^{-\eta_2}. \tag{13}$$

Из неравенств (11) и (13) имеем

$$|P_j(x_i)| \le c_5 Q^{-\eta_2}. \tag{14}$$

По лемме 1 из неравенства (14) следует система неравенств

$$\max(|x_1-\alpha_{j1}|,\ldots,|x_{s+l}-\alpha_{js+l}|) < c_1 Q^{-\eta_1} < 2^{n-1} c_1 Q^{-\eta_2},\ j=\{1,2\}.$$

Произвольную точку $(x_1,\ldots,x_{s+l})\in\Pi$ можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1 = u_1+\theta_1 Q^{-\eta_2} \\ \ldots \\ x_{s+l} = u_{s+l}+\theta_{s+l} Q^{-\eta_2} \end{cases},\ |\theta_i|\le 1, i\in\{1,\ldots,s+l\}. \tag{15}$$

Используя систему равенств (15), получим

$$|P_j(u_i)| = |a_n(x_i-\theta_i Q^{-\eta_2})^n + a_{n-1}(x_i-\theta_i Q^{-\eta_2})^{n-1}+\cdots+a_0|.$$

Раскрывая скобки и группируя члены, имеем оценку

$$|P_j(u_i)| < |P_j(x_i)| + |a_n\sum_{k=1}^{n} x_i^{n-k}(\theta_i Q^{-\eta_2})^k| + |a_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} w_i^{n-1-k}(\theta_i Q^{-\eta_2})^k| + \cdots + |a_1\theta_i Q^{-\eta_2}|.$$

Не ограничивая общности [3, с. 19], можно считать $\max\limits_{0\le i\le n}|a_i| = a_n > 0$. Тогда из неравенства (14) следует оценка

$$\max(|P_j(u_1)|,\ldots,|P_j(u_{s+l})|) < c_5(Q^{-\eta_2}+a_n Q^{-\eta_2}). \tag{16}$$

Если $a_n > Q^{\eta_2}$, то оценку (16) можно записать в виде

$$\max(|P_j(u_1)|,\ldots,|P_j(u_{s+l})|) < c_6 a_n Q^{-\eta_2}. \tag{17}$$

Рассмотрим многочлен $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$, $\deg R(x) \le n_1$. Из условия (17) следует, что для него выполняется следующая система неравенств:

$$\left|R(u_i)\right| < \left|(a_{2n_1}-a_{1n_1})u_i^{n_1}+\ldots+(a_{20}-a_{10})\right| < 2c_7 a_{n_1} Q^{-\eta_2},\ i\in\{1,\ldots,s+l\}. \tag{18}$$

Обозначим $s_j = (a_{2j}-a_{1j}),\ j\in\{0,\ldots,n_1\}$. Очевидно равенство $|R(\overline{z})| = |R(z)|,\ z\in\mathbb{C}$, в котором $\overline{z}$ комплексно сопряжено с z. В таком случае систему неравенств (18) можно записать в виде

$$\begin{cases} \left|R(u_1)\right| < \left|s_{n_1}u_1^{n_1}+\ldots+s_0\right| < 2c_7 a_{n_1} Q^{-\eta_2}, \\ \ldots \\ \left|R(u_{s+l})\right| < \left|s_{n_1}u_{s+l}^{n_1}+\ldots+s_0\right| < 2c_7 a_{n_1} Q^{-\eta_2}, \\ \left|R(\overline{u}_1)\right| < \left|s_{n_1}\overline{u}_1^{n_1}+\ldots+s_0\right| < 2c_7 a_{n_1} Q^{-\eta_2}, \\ \ldots \\ \left|R(\overline{u}_s)\right| < \left|s_{n_1}\overline{u}_s^{n_1}+\ldots+s_0\right| < 2c_7 a_{n_1} Q^{-\eta_2}. \end{cases} \tag{19}$$

Обозначим через $|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})|$ определитель матрицы системы (19). Он имеет следующий вид:

$$|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})| = \begin{vmatrix} u_1^{n_1} & u_1^{n-1} & \dots & u_1 & 1 \\ u_2^{n_1} & u_2^{n-1} & \dots & u_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s+l}^{n_1} & u_{s+l}^{n_1-1} & \dots & u_{s+l} & 1 \\ \bar{u}_1^{n_1} & \bar{u}_1^{n_1-1} & \dots & \bar{u}_1 & 1 \\ \bar{u}_2^{n_1} & \bar{u}_2^{n_1-1} & \dots & \bar{u}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{u}_s^{n_1} & \bar{u}_s^{n_1-1} & \dots & \bar{u}_s & 1 \end{vmatrix}.$$

Л е м м а 2. *Определитель* $|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})|$ *равен*

$$|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})| = \prod_{1 \le i < j \le s+l} (u_i - u_j) \prod_{i, j \in \{1, s\}} (\bar{u}_i - u_j) \prod_{1 \le i < j \le s} (\bar{u}_i - \bar{u}_j). \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определитель $|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})|$ является определителем Вандермонда матрицы размера $n_1 = 2s + l$. Следовательно, он равен произведению всевозможных различных пар $\bar{u}_i, u_j$. Записывая это произведение, мы получим искомое равенство.

Учитывая равенство (20), а также условие (4), имеем

$$|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})| > \delta_1^{n_1(n_1-1)}.$$

Из системы (19) с помощью формулы Крамера получим оценки

$$|s_i| = \frac{|\Delta_i|}{|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})|} < c_8 a_{n_1} Q^{-\eta_2}. \tag{21}$$

Из оценки (21) следует, что количество векторов $\bar{s} = (s_{n_1}, s_{n_1-1}, ..., s_0)$ не превосходит $2c_9 a_{n_1} Q^{-n_1\eta_2}$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{\bar{s}} \mu \mathfrak{L}_{n_1}(Q) < c_{10} Q^{-1-n_1\eta_2}. \tag{22}$$

Из неравенства (22) можно посчитать сумму мер по Π

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in T_n(\bar{b})} \mu \sigma_P(\alpha) \le \sum_{\Pi} \sum_{\bar{s}} \mu \mathfrak{L}_{n_1}(Q) < c_{11} Q^{-1-(\eta_2 + ... + \eta_2)} < \frac{1}{4n} \mu \Pi. \tag{23}$$

Очевидно включение

$$\mathfrak{L}_n(Q) \subset \sigma_1 \cup \sigma_2,$$

где σ_1, σ_2 – объединения всех существенных и не существенных областей $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$. Следовательно, из неравенств (9) и (23) следует оценка

$$\mu \mathfrak{L}_n(Q) \le \frac{1}{4n} \mu \Pi + \frac{1}{4n} \mu \Pi = \frac{1}{2n} \mu \Pi,$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Рассмотрим множество $\mathfrak{L}'_n(Q) = \Pi,\ \mathfrak{L}_n(Q)$. Из теоремы 1 следует оценка

$$\mu \mathfrak{L}'_n(Q) > \frac{2n-1}{2n} \mu K. \tag{24}$$

На множестве $\mathfrak{L}'_n(Q)$ выполняется условие

$$\min(|P'(x_1)|, ..., |P'(x_{s+l})|) > \delta_0 Q, \quad \delta_0 > 0.$$

При помощи принципа Дирихле можно показать, что для любой точки $x \in \mathfrak{L}'_n(Q)$ существует многочлен $P \in P_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} \max(|P(x_1)|, ..., |P(x_{s+l})|) < c_{12} Q^{-\frac{\mu_1}{s+l}}, \\ \min(|P'(x_1)|, ..., |P'(x_{s+l})|) > \delta_0 Q, \delta_0 > 0. \end{cases} \tag{25}$$

Рассмотрим систему алгебраических точек $\alpha_1, ..., \alpha_t$. Каждой из этих точек при помощи леммы 1 и системы неравенств (25) поставим в соответствие параллелепипеды

$$\sigma(\alpha_j) = \{x \in \Pi : |x_i - \alpha_{ji}| < 2^{n-1} c_{12} \delta_0 Q^{-1-\frac{\mu_1}{s+l}}, i \in \{1, 2, ..., s+l\}\}. \tag{26}$$

Очевидно, выполняется условие

$$\mathfrak{L}'_n(Q) \subset \bigcup_{j=1}^{t} \sigma(\alpha_j). \tag{27}$$

Тогда из оценок (24), (26), (27) следуют неравенства

$$\frac{2n-1}{2n} \mu K < \mu \mathfrak{L}'_n(Q) \le \sum_{j=1}^{t} \sigma(\alpha_j) \le tc_{13} Q^{-(s+l)-\mu_1} \le tc_{13} Q^{-1-n},$$

из которых получаем оценку

$$t \ge c_{14} Q^{n+1} \mu \Pi.$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Берник, В. И. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 21–42. doi.org/10.4213/im8215

2. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 224 с.

3. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 181 с.

4. Ламчановская, М. В. О распределении комплексных алгебраических чисел в кругах малого радиуса на комплексной плоскости / М. В. Ламчановская, Н. И. Калоша // Тр. Ин-та матем. – 2015. – Т. 23, № 1. – С. 84–97.

References

1. Bernik V. I., Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, no. 1, pp. 18–39. doi.org/10.4213/im8215

2. Gel'fond A. O. Transcendental and algebraic numbers. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1952. 224 p. (in Russian).

3. Sprindzhuk V. G. Maler's problem in the metric theory of numbers. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1967. 181 p. (in Russian).

4. Lamchanovskaya M. V., Kalosha N. I. Distribution of complex algebraic numbers in small-radius circles on the complex plane. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 84–97 (in Russian).

Информация об авторах

Берник Василий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bernik@im.bas-net.by.

Жур Максим Анатольевич – аспирант. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: maksimzhur@gmail.com.

Information about the authors

Bernik Vasiliy Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bernik@im.bas-net.by.

Zhur Maksim Anatolievich – Postgraduate student. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: maksimzhur@gmail.com.