ISSN 1561-8323 (print)
УДК 514.765.1

Поступило в редакцию 10.05.2017
Received 10.05.2017

Н. П. Можей

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Республика Беларусь*

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕРЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

Аннотация. Целью данной работы является классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные аффинные связности, самих связностей, их тензоров кривизны, кручения и алгебр голономии. В работе рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований с неразрешимым стабилизатором.

Объектом исследования являются нередуктивные пространства и связности на них. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии. Приведено в явном виде локальное описание всех трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, допускающих инвариантные аффинные связности. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер.

Особенностью методики, представленной в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: аффинная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра Ли, редуктивное пространство

Для цитирования: Можей, Н. П. Трехмерные нередуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 20–25.

Natalya P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

THREE-DIMENSIONAL NON-REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS

(Communicated by Academician Victor I. Korzyuk)

Abstract. The purpose of the work is a description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces that allow invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras. We are concerned with the case, when Lie group of transformations is unsolvable and a stabilizer is unsolvable too.

An object of investigation is concerned with non-reductive spaces and connections on them. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, an affine connection, curvature and torsion tensors, and holonomy algebra are defined. The local description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces with unsolvable Lie group of transformations and an unsolvable stabilizer, which allow affine connections, is given. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors, holonomy algebras are found. Studies are based on the use of properties of Lie algebras and groups, as well as homogeneous spaces and they are mainly local in character.

The features of the methods presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of homogeneous spaces and connections on them, as well as the combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces. The results can be used in the study of manifolds and can find application in various areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces.

Keywords: affine connection, homogeneous space, transformation group, Lie algebra, reductive space

For citation: Mozhey N. P. Three-dimensional non-reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 20–25 (in Russian).

Введение. В теории однородных пространств рассматриваются как задача описания инвариантных связностей на данном однородном пространстве, так и задача перевода на алгебраический язык понятий дифференциальной геометрии для данной инвариантной связности. Первая задача многими математиками решалась в основном в части выяснения вопроса о возможности введения хотя бы одной связности. В каком случае однородное пространство допускает инвариантную аффинную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно [1]. Возможностью построения на однородном пространстве инвариантной аффинной связности задавался П. К. Рашевский, к его построениям несколько позже пришел К. Номидзу [2], установивший взаимно-однозначное соответствие между инвариантными аффинными связностями на многообразии и билинейными функциями. Большой вклад в развитие теории связностей внесли также работы Э. Картана, А. П. Нордена, М. Куриты, А. П. Широкова, Э. Б. Винберга, Ш. Кобаяси и др. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность [2]. Трехмерные редуктивные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором и связности на них изучались в [3], вопрос же явного нахождения всех нередуктивных однородных пространств и существования связностей на этих пространствах остается открытым.

Целью данной работы является классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, допускающих инвариантные аффинные связности, самих связностей, их тензоров кривизны, кручения и алгебр голономии. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: получить классификацию трехмерных изотропно-точных однородных пространств; выделить однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, не являющиеся редуктивными; найти пространства, допускающие инвариантную аффинную связность; описать все инвариантные аффинные связности на каждом найденном однородном пространстве; найти тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ [4]. Опишем локально однородные пространства и связности на них. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. Изотропное действие группы G на касательном пространстве T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$: $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ для $\bar{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна), в противном случае пространство не является редуктивным. В любом из следующих случаев пространство является редуктивным [2]: G компактна; G связна, и $\mathfrak{g}$ редуктивна в $\bar{\mathfrak{g}}$; G – дискретная подгруппа $\bar{G}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии [5] с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если $\bar{G} / G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность, а линейное представление изотропии для G всегда точное. Тензоры кривизны и кручения однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем они инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2{}^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3{}^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Будем говорить, что связность нормальна, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

Классификация нередуктивных однородных пространств. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [6], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Т е о р е м а. *Трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность, такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *и* $\mathfrak{g}$ *неразрешимы, локально имеют вид 6.3.2 или 5.3.2, где*

6.3.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-e_5$	e_6	0	u_2	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	$-e_6$	0	0	0	u_2
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	$-e_5$	0	u_3	0
e_4	0	0	0	0	$-e_5$	$-e_6$	0	u_2	u_3
e_5	e_5	e_6	0	e_5	0	0	0	$u_1 + 3e_4 + e_1$	$2e_3$
e_6	$-e_6$	0	e_5	e_6	0	0	0	$2e_2$	$u_1 + 3e_4 - e_1$
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1 - 3e_4 - e_1$	$-2e_2$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-u_3$	$-2e_3$	$-u_1 - 3e_4 + e_1$	0	0	0

,

5.3.2.	e^1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	e_1	$-3e_1$	$-(1/2)e_5 + (1/2)u_1$	$-e_4$
e_2	0	0	0	e_1	$-e_2$	$-3e_2$	$-e_3$	$(1/2)e_5 + (1/2)u_1$
e_3	$-e_2$	0	0	e_5	$-2e_3$	0	0	u_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_5$	0	$2e_4$	0	u_3	0
e_5	$-e_1$	e_2	$2e_3$	$-2e_4$	0	0	u_2	$-u_3$
u_1	$3e_1$	$3e_2$	0	0	0	0	$-3u_2$	$-3u_3$
u_2	$(1/2)e_5 - (1/2)u_1$	e_3	0	$-u_3$	$-u_2$	$3u_2$	0	0
u_3	e_4	$-(1/2)e_5 - (1/2)u_1$	$-u_2$	0	u_3	$3u_3$	0	0

.

З а м е ч а н и е. Алгебра 5.3.2 является подалгеброй алгебры Ли 6.3.2 в базисе $\{e_5, e_6, e_2, e_3, e_1, -u_1 - 3e_4, -u_2/2, -u_3/2\}$. Далее будем использовать собственный базис пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Заметим также, что $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$:

$$5.3.\ \boxed{\begin{matrix} & u & v \\ & x & y \\ & z & -x \end{matrix}},\quad 6.3.\ \boxed{\begin{matrix} & v & w \\ & x & z \\ & y & u \end{matrix}}.$$

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. В дальнейшем если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Для получения указанного результата сначала найдены трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицированы (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны (с подробным описанием можно ознакомиться в [6]). Далее выбраны нередуктивные пары, т. е. те, для которых не существует разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$, так как не выполняется условие $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Из полученных пар выбраны пары с неразрешимыми алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$ и подалгеброй $\mathfrak{g}$ и найдены аффинные связности, соответственно, определены пары, допускающие инвариантную связность.

Действительно, рассмотрим, например, случай, когда $\mathfrak{g}$ имеет вид 6.3. Пусть $\mathfrak{h}$ – нильпотентная подалгебра, порожденная векторами e_1 и e_4. Имеем $\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_4$, $\mathfrak{g}^{(2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, $\mathfrak{g}^{(-2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $U^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$, $\mathfrak{g}^{(-1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5$, $U^{(1,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$, $\mathfrak{g}^{(1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_6$, $U^{(-1,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$. Отсюда следует, что $[u_1, u_2] = \alpha_2 u_2$, $[u_1, u_3] = \beta_3 u_3$, $[u_2, u_3] = 0$. Из тождества Якоби получим, что $[e_5, u_2] = pe_1 + A$, $[e_5, u_3] = 2pe_3$, $[e_6, u_2] = 2pe_2$, $[e_6, u_3] = -pe_1 + A$, $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = 0$, $[u_2, u_3] = 0$, где $A = 3pe_4 + u_1$. При $p = 0$ пара является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс, при $p \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 6.3.2 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,6}$, $\pi(u_j) = (1/p)u_j$, $j = \overline{1,3}$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_1$ редуктивна, а $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не редуктивна, пары не эквивалентны. В случае 6.3.2 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{u_1\}, \{-4e_1, 2e_6, -2u_2, -4e_2, 2e_5, -2u_3, -4e_3, -e_1 - 3e_4 - u_1\}\}$, а разложение Леви $\mathfrak{g}$ – $\{\{e_4, 2e_5, 2e_6\}, \{-4e_1 + 2e_5, -4e_2 + 2e_6, -4e_3\}\}$. Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = \overline{1,3}$). Однозначно определены $\Lambda(e_i)$, $i = \overline{1,6}$, так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, тогда $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, имеем $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{1,2} = 0$, $p_{3,3} = p_{2,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$, получаем, что $p_{1,3} = p_{2,1} = p_{2,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_5, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_5), \Lambda(u_1)] = 0$, $p_{2,2} = p_{1,1}$. Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{1,2} = 0$, $q_{3,3} = q_{2,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = q_{2,2} = q_{2,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = r_{3,2} = r_{3,3} = 0$, $r_{3,1} = q_{2,1}$, $r_{1,2} = -q_{1,3}$. Если $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, то $r_{1,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1) + \Lambda(e_1) + 3\Lambda(e_4)$, имеем $p_{1,1} = r_{3,1} = -2$. Получим, что аффинная связность следующая:

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензоры кривизны и кручения получаются нулевыми, алгебра голономии также нулевая.

В случае, когда $\mathfrak{g}$ имеет вид 5.3, $\mathfrak{h}$ порождена вектором e_5. Имеем $\mathfrak{g}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1$, $\mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, $\mathfrak{g}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\mathfrak{g}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4$, $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5$, $U^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$, $U^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$, $U^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$. Тогда $[u_1, u_2] = a_2e_2 + \alpha_2u_2$, $[u_1, u_3] = b_1e_1 + \beta_3u_3$, $[u_2, u_3] = c_5e_5 + \gamma_1u_1$. Пусть $[e_1, u_3] = pe_4$, в силу тождества Якоби $a_2 = -3p\gamma_1 / 2$, $\alpha_2 = 0$, $b_1 = 3p\gamma_1 / 2$, $\beta_3 = 3p$, $c_5 = 3p\gamma_1 / 2$. При $p = 0$ отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,5}$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2 - \gamma_1e_2$, $\pi(u_3) = u_3 + \gamma_1e_1$, покажет, что пара является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс, при $p \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 5.3.2 посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = (1/3)e_1$, $\pi(u_1) = -(p/2)u_1 - (3p/2)e_5$, $\pi(e_2) = (1/3)e_2$, $\pi(u_2) = 3pu_2 + (1/3)e_2$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = 3pu_3 - (p/6)e_1$, $\pi(e_4) = e_4$, $\pi(e_5) = e_5$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста, а $\bar{\mathfrak{g}}_1$ нет, найденные пары не эквивалентны. В случае 5.3.2 разложение Леви подалгебры $\mathfrak{g}$ – $\{\{e_1, e_2\}, \{-(1/2)e_1 + e_5, e_2 - 2e_3, 2e_4\}\}$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = -3\Lambda(e_1)$, имеем $p_{2,2} = p_{1,1} - 3$, $p_{2,3} = p_{2,1} = p_{3,1} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = -3\Lambda(e_2)$, $p_{3,3} = p_{1,1} - 3$, $p_{3,2} = 0$. Так как $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, то $p_{1,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_1)] = 0$, то $p_{1,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = -\Lambda(e_3)$, $q_{3,1} = q_{3,2} = 0$, $q_{3,3} = q_{1,1}$, $q_{2,1} = 2$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = (1/2)\Lambda(u_1) - (1/2)\Lambda(e_5)$, $q_{1,1} = 2$, $q_{2,2} = q_{1,1}$, $q_{2,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{1,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = 0$, $r_{1,2} = q_{1,3}$, $r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = 0$, $r_{3,1} = 2$, $r_{3,2} = r_{3,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, $p_{1,1} = 0$. Получим, что аффинная связность имеет вид

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{1,2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для любого $r_{12} \in \mathbb{R}$ (для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензор кривизны – $R(u_1, u_2) = [\Lambda(u_1), \Lambda(u_2)] - \Lambda([u_1, u_2]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6r_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(u_1, u_3) = [\Lambda(u_1), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_1, u_3]) = \begin{pmatrix} 0 & 6r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(u_2, u_3) = [\Lambda(u_2), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_2, u_3]) = \begin{pmatrix} -4r_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 2r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r_{1,2} \end{pmatrix}$. Тензор кручения – $T(u_1, u_2) = T(u_1, u_3) = 0$, $T(u_2, u_3) = \Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}} - [u_2, u_3]_{\mathfrak{m}} = (-2r_{1,2}, 0, 0)$. При $r_{1,2} \neq 0$ алгебра, порожденная множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, т. е. $R(u_i, u_j)$, имеет вид $\begin{pmatrix} 2p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$, $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, она не совпадает с алгеброй голономии (не является совершенной), так как алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. В данном случае $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} = \Lambda(\bar{\mathfrak{g}})$ и $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, т. е. связность нормальна. При $r_{1,2} = 0$ алгебра голономии нулевая.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных неразрешимых пар, допускающих инвариантные связности, кроме представленных в теореме, не существует.

Заключение. Приведено локальное описание всех трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, допускающих инвариантные аффинные связности. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах, найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Борису Петровичу Комракову за постановку задачи и полезные замечания.

Acknowledgements. The author is grateful to his teacher Boris Petrovich Komrakov for posing the problem and for useful remarks.

Список использованных источников

1. Можей, Н. П. Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей / Н. П. Можей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 413–421.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.
3. Можей, Н. П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований / Н. П. Можей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 28–36.
4. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.
5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65. doi.org/10.2307/2372398
6. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

References

1. Mozhey N. P. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *The Journal Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 413–421. doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421 (in Russian).
2. Kobayashi Sh., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York, Interscience Publishers, 1963. 340 p.
3. Mozhey N.P. Normal connections on reductive homogeneous spaces with an unsolvable transformation group. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2016, vol. 60, no. 6, pp. 28–36 (in Russian).
4. Onishchik A. L. *Topology of transitive transformation groups*. Moscow, Fizmatlit Publishing Company, 1995. 384 p. (in Russian).
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76. no. 1, pp. 33–65. doi.org/10.2307/2372398
6. Mozhey N. P. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them*. Kazan, Publisher University of Kazan, 2015. 394 p. (in Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.