ISSN 1561-8323 (print)
УДК 530.145

Поступило в редакцию 19.05.2017
Received 19.05.2017

М. Н. Сергеенко

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОНОВ С КООРДИНАТНО-ЗАВИСИМОЙ МАССОЙ КВАРКОВ

(Представлено членом корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Аннотация. Мезоны моделируются как связанные состояния кварков с координатно-зависимой массой. Взаимодействие кварков описывается КХД-модифицированным корнельским потенциалом с введенной зависимостью от расстояния величиной сильной связи $\alpha_S(r)$. Предложено уравнение движения для двух взаимодействующих бесспиновых частиц в системе центра инерции, получены два асимптотических решения этого уравнения для больших и малых расстояний. На этой основе предложена комплексная интерполяционная массовая формула для кварк-антикварковых состояний. Вычисленные в рамках модели спектры масс ρ и $D^{\pm *}$ мезонов оказываются в хорошем согласии с экспериментальными значениями.

Ключевые слова: мезон, связанное состояние, потенциал, кварковая модель

Для цитирования: Сергеенко, М. Н. Релятивистская модель мезонов с координатно-зависимой массой кварков / М. Н. Сергеенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 39–45.

Mikhail N. Sergeenko

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus

RELATIVISTIC MODEL OF MESONS WITH THE COORDINATE- DEPENDENT QUARK MASS

(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)

Abstract. Mesons as bound states of quarks with coordinate-dependent mass are modeled. The interaction of quarks is described by the QCD modified Cornell potential with a strong position-dependent coupling $\alpha_S(r)$. The equation of motion for the system of two interacting spinless particles in the center-of-mass frame is suggested. Two asymptotic solutions of this equation for large and small distances are obtained. The mass formula is derived for quark-antiquark bound states on this basis. The mass spectra of the ρ and $D^{\pm *}$ calculated in the framework of the model are in a good agreement with experimental data.

Keywords: meson, bound state, potential, quark model

For citation: Sergeenko M. N. Relativistic model of mesons with the coordinate-dependent quark mass. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 39–45 (in Russian).

Описание мезонов и их возбуждённых состояний в принципе должно выполняться в рамках квантово-полевой теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике (КХД). Однако строгое описание в рамках её практических приложений сопряжено с рядом трудностей. Динамику цветовых сил приходится описывать в рамках феноменологических подходов. Одним из них является метод траекторий Редже [1], которые могут быть использованы также для классификации адронов по семействам.

Последовательное описание мезонов как связанных кварк-антикварковых состояний сводится к релятивистской задаче двух тел, которая не имеет точного решения. Трудности строго теоретического описания [2–4] свойств адронов привели к появлению ряда феноменологических кварковых моделей [5–7]. Физические характеристики простейших систем типа кваркониев, глюониев и их резонансов изучались в рамках потенциального подхода [8–11] и в схеме комплексных масс [12].

Существует ряд попыток приведения уравнения Бете–Солпитера [2; 3] к решаемому виду [4]. В одном из подходов предлагается бесспиновое уравнение для собственных значений энергии $E^* = W$ системы двух частиц в с.ц.и. ($\hbar = c = 1$) [2–4]:

$$\widehat{H}\psi(\mathbf{r}) = W\psi(\mathbf{r}),\ \widehat{H} = \sqrt{(-i\vec{\nabla})^2 + m_1^2} + \sqrt{(-i\vec{\nabla})^2 + m_2^2} + V(r). \tag{1}$$

Уравнение (1) получено с использованием ряда приближений: исключается зависимость от времени, не учитывается наличие спинов у частиц и решения с отрицательной энергией [2–4]. Уравнение (1) иногда называют полурелятивистским, поскольку оно не имеет явно ковариантной формы. Основную проблему решения уравнения с гамильтонианом (1) представляет наличие операторов под квадратным корнем, поэтому обычно оно решается численно. Однако часто важно иметь аналитическое решение, хотя бы приближённое.

Потенциал взаимодействия $V(r)$ может быть нулевой компонентой лоренц-вектора, как в (1), либо лоренц-скаляром или смешанным, так что способ введения взаимодействия является модельным [5; 6; 8–11; 13; 14]. Конституентные кварки в адронах описываются уравнением Дирака, которое модифицируется так, чтобы обеспечить конфайнмент. Появление лоренц-инвариантного потенциала естественно интерпретируется в рамках конформно-плоской геометрии [15; 16], дано объяснение «запирающих» свойств метрики этой геометрии, рассмотрен вопрос о координатной зависимости массы покоя, обладающей трансформационными свойствами лоренц-скаляра.

Исходное бесспиновое уравнение (1) может быть введено и другим способом. Целью настоящей работы является изучение мезонов как задачи двух тел для связанных состояний кварков с координатно-зависимой массой и КХД-модифицированным потенциалом цветового взаимодействия с зависимостью от расстояния величиной сильной связи $\alpha_S(r)$ [8–11].

Рассмотрим движение двух свободных релятивистских бесспиновых частиц с четыре-импульсами p_1 и p_2. Их сумма $E_1(\mathbf{p}) + E_2(\mathbf{p}) \equiv [\boldsymbol{p}^2 + m_1]^{1/2} + [\boldsymbol{p}^2 + m_2]^{1/2} = W_0 = \sqrt{s} \equiv$ M в с.ц.и. есть полная энергия частиц (где $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$), которая является также инвариантной массой системы M. Из этого выражения следует равенство

$$4s\mathbf{p}^2 \equiv (s - m_-^2)(s - m_+^2) = \lambda(s, m_1^2, m_2^2) \equiv 4s\kappa^2, \tag{2}$$

где $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ – главная инвариантная функция (функция треугольника) [1] $m_+ = m_1 + m_2$, $m_- = m_1 - m_2$. Правая часть в (2) содержит только инвариантные массы покоя частиц и системы, поэтому квадрат импульса $\mathbf{p}^2 = \kappa^2$ частиц (и модуль $|\mathbf{p}|$ относительного импульса частицы в с.ц.и.) является релятивистским инвариантом. Что изменится при наличии взаимодействия между частицами?

Полная энергия двух взаимодействующих релятивистских частиц в с.ц.и. может быть записана в виде

$$W = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} + V(q), \tag{3}$$

где потенциальная энергия $V(q)$ зависит от координат $q = (t, \mathbf{r})$, $t = t_1 - t_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, и соответствует гамильтониану (1). Здесь $V(q)$ аддитивен к энергиям частиц и является нулевой компонентой лоренц-вектора. Полная энергия (3) не имеет явно ковариантный вид, но является интегралом (постоянной) движения согласно закону сохранения энергии для замкнутых систем: $dW / dt = 0$. Для таких систем гамильтониан не зависит явно от времени. Поскольку координатная зависимость входит только в потенциал $V(t, r)$, то он не может зависеть от относительного времени частиц, т. е. $t = t_1 - t_2 = 0$, что означает равенство времён $t_1 = t_2$, и потенциал зависит только от расстояния r между частицами. Равенство $t = 0$ есть одно из условий получения (1). Таким образом, полная энергия W двух взаимодействующих частиц в с.ц.и. есть инвариантная масса M этой системы, т. е. $W =$ M. Но возникает проблема потенциала $V(r)$ как нерелятивистского объекта в релятивистской теории; он может быть как лоренц-векторным, так и лоренц-скалярным или смешанным.

Релятивистское волновое уравнение движения частицы в скалярном потенциальном поле сформулировано в [13; 14]; в этом подходе потенциал является лоренц-скаляром, аддитивным к массе покоя m_0 частицы: это приводит к понятию частицы с переменной массой $m(r) = m_0 + S(r)$ такой, что выполняются релятивистские соотношения [13]

$$E^2 - p^2 = m^2(r), \ \ E = \gamma m(r), \ \ p = \gamma m(r)v. \tag{4}$$

В такой формулировке собственное время τ частицы является параметром эволюции [13; 14], а функция $m(r)$ обладает свойствами (4) инвариантной массы. Этот подход аналогичен развитому ранее в [15; 16] для спиновых кварков в рамках конформно-плоской геометрии.

Конфайнмент в физике адронов можно описать, если потенциал является скалярным [4; 13]. В (3) это можно показать, представив энергии E частиц в виде суммы кинетической энергии T и массы покоя, т. е. $E(\mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + m_0$. Тогда для системы двух взаимодействующих частиц полную энергию W системы (3) можно записать так: $W = T_1(\mathbf{p}) + T_2(\mathbf{p}) + m_1 + m_2 + V(r)$. В этом случае потенциал аддитивен к массам частиц [5; 6; 13–16] и является лоренц-скаляром. Решения двухчастичных уравнений Дирака рассматривались в [17]. Приведём некоторые качественные соображения в духе работ [13–17]. Сумму лоренц-скаляров можно записать по-разному, например, с весовыми коэффициентами [2–4]. В настоящем сообщении она представляется как $m_1 + m_2 + V(r) \equiv [m_1 + 1/2V(r)] + [m_2 + 1/2V(r)]$. Тогда, вводя частицы с переменной массой [13–16], полную энергию W системы с учётом (4) можно записать так:

$$W = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2(r)} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2(r)}. \tag{5}$$

Это выражение для полной энергии системы является релятивистским по форме с зависящими от расстояния r массами частиц $m_i(r) = m_i + 1/2V(r)$. Зависимость $m_i(r)$ может описывать поле виртуальных частиц, испускаемых и поглощаемых взаимодействующими частицами. Выбор весовых коэффициентов 1/2 для потенциала можно обосновать тем, что полный импульс системы в с.ц.и. есть $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$. Производная этого равенства по собственному времени системы τ как параметра эволюции [13] даёт для пространственной части силы Минковского: $d\mathbf{p}_1 / d\tau + d\mathbf{p}_2 / d\tau \equiv \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, где $\mathbf{F} = -\vec{\nabla} V$, так что $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$.

Квадрат относительного импульса $\mathbf{p}^2$ частицы в с.ц.и. выражается из (5) через функцию треугольника $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ для масс $m_1(r)$, $m_2(r)$ и инварианта $s = W^2 \equiv \mathrm{M}^2$ аналогично (2)

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4s}\lambda(s = \mathrm{M}^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{s - m_-^2}{4s}\left[s - (m_+ + V_{q\bar{q}})^2\right] \equiv \kappa^2 - U^2(s, r), \tag{6}$$

где постоянная движения κ^2 (квадрат относительного импульса частицы) даётся выражением (2) и введена потенциальная функция

$$U^2(s, r) = \frac{s - m_-^2}{4s}\left[2m_+ V_{q\bar{q}}(r) + V_{q\bar{q}}^2(r)\right].$$

Волновое уравнение для системы двух частиц следует из (6) согласно фундаментальному принципу соответствия путём замены физических величин операторами, действующими на волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$,

$$\left[(-i\vec{\nabla})^2 + U^2(s, r)\right]\psi(\mathbf{r}) = \kappa^2\psi(\mathbf{r}), \tag{7}$$

или для собственных значений квадрата массы

$$\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + (m_+ + V_{q\bar{q}})^2\right]\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{M}^2\psi(\mathbf{r}), \ \ \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 = \frac{4s}{s - m_-^2}(-i\vec{\nabla})^2. \tag{8}$$

Постоянные κ^2 и М (интегралы движения) связаны соотношением для энергии двух свободных частиц

$$\mathrm{M} = \sqrt{\kappa^2 + m_1^2} + \sqrt{\kappa^2 + m_2^2}.$$

Уравнения (7) и (8) эквивалентны друг другу. Они не решаются известными методами, поэтому в развиваемой модели используется квазиклассический подход, в котором решается соответствующее квазиклассическое уравнение; в сферических координатах для (7) оно имеет вид

$$\left[-\Delta^c + U^2(s, r)\right]\Psi(\mathbf{r}) = \kappa^2\Psi(\mathbf{r}), \ \ \Delta^c = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{9}$$

Процедура вывода такого уравнения приведена в [18; 19] и сводится к замене оператора Лапласа $\Delta = \vec{\nabla}^2$ в (7) и (8) каноническим оператором Δ^c без первых производных, действующим на функцию состояния $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\det g_{\mu\nu}}\,\psi(\mathbf{r})$, где $\det g_{\mu\nu} = r^2\sin\theta$; $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор.

В физике адронов популярным является корнельский потенциал цветового взаимодействия кварков $V(r) = -4/3(\alpha_S/r) + \sigma r$ [6], в котором α_S и σ являются параметрами. Этот потенциал не описывает асимптотически свободные состояния цветных кварков, поскольку величина сильной связи α_S является параметром. Однако в КХД α_S является функцией $\alpha_S(Q)$ с асимптотикой $\alpha_S(Q) \to 0$ при $Q \to \infty$ (или функцией $\alpha_S(r) \to 0$ при $r \to 0$). Модификация корнельского потенциала выполнена в [10; 11], где показано, что величина сильной связи является координатно-зависимой:

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{a(r)}{r} + \sigma r, \quad a(r) = \frac{4}{3}\alpha_S(r), \quad \alpha_S(r) = \frac{1}{b_0 \ln[(1 + 4m_g^2 r^2)/\Lambda^2 r^2]}, \tag{10}$$

где $b_0 = (33 - 2n_f)/12\pi$; n_f – число ароматов кварков; m_g – масса глюона при $r \to \infty$; Λ – масштабный параметр в КХД. Потенциал (10) используется в настоящей работе как лоренц-скаляр.

Уравнение (9) не решается аналитически известными методами для потенциала (10), поэтому можно попытаться найти физически мотивированную аппроксимацию решения и спектра развитым в [18; 19] методом. Переменные в (9) разделяются, что даёт радиальное

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{s - m_-^2}{4s}\left[s - \left(m_+ - \frac{a(r)}{r} + \sigma r\right)^2\right] - \frac{M_l^2}{r^2}\right\} R(r) = 0 \tag{11}$$

и угловое уравнения. В используемом здесь асимптотическом подходе все полученные после разделения переменных уравнения решаются одним и тем же квазиклассическим методом [18; 19]. Решение углового уравнения этим методом даёт для собственных значений квадрата углового момента $M_l^2 = (l + 1/2)^2\hbar^2$ [18; 19], что отличается от известного выражения $L^2 = l(l+1)\hbar^2$ в квантовой механике; это отличие является ключевым в проблеме точности квазиклассического метода.

Для решения уравнения (11) используется асимптотический метод. Сначала находятся аналитические решения для двух предельных случаев – асимптотик потенциала (10), т. е. кулоновской (при $r \to 0$) и линейной (при $r \to \infty$) частей в отдельности. Наиболее общие выражения для асимптотического решения и условия квантования могут быть записаны в комплексной плоскости. Для кулоновской асимптотики задачи (11) условие квантования имеет вид

$$I(s) = \oint \sqrt{\frac{s - m_-^2}{4s}\left[s - \left(m_+ - \frac{a(r)}{r}\right)^2\right] - \frac{M_l^2}{r^2}}\, dr = 2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right), \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Интеграл (12) имеет две особые точки – в нуле и на бесконечности. Он «берётся» с помощью теории вычетов, метода стереографической проекции и свойства асимптотической свободы величины сильной связи $\alpha_S(r) \to 0$ при $r \to 0$ [8–11; 18; 19]; это даёт для фазового интеграла (12)

$$I(s) = 2\pi\{-M_l - i\alpha_\infty m_+[(s - m_-^2)/4s(s - m_+^2)]^{1/2}\}. \tag{13}$$

Равенства (12) и (13) приводят к квадратному уравнению для $s = \mathrm{M}^2$, решение которого даёт

$$\mathrm{M}_\mathrm{N}^2 = \left(\sqrt{\varepsilon_\mathrm{N}^2} \pm \sqrt{\varepsilon_\mathrm{N}^{2*}}\right)^2 \equiv 4[\mathrm{Re}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\} \pm i\,\mathrm{Im}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\}] \equiv (w_\mathrm{N} \pm w_\mathrm{N}^*)^2, \tag{14}$$

$$w_\mathrm{N} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left|\varepsilon_\mathrm{N}^2\right| + \mathrm{Re}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\}\right)} + i\xi\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left|\varepsilon_\mathrm{N}^2\right| - \mathrm{Re}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\}\right)}, \tag{15}$$

где $\varepsilon_\mathrm{N}^2 = m_\bullet^2(1 - v_\mathrm{N}^2) \pm i m_\bullet m_- v_\mathrm{N}$; $m_\bullet = 1/2m_+$; $v_N = 1/2a_\infty/N$; $N = (k + 1/2) + |l + 1/2|$ – главное квантовое число; $\xi = \mathrm{sign}(\mathrm{Im}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\})$ – знак мнимой части ε_N^2; $a_\infty = (4/3)\alpha_S(r \to \infty) = 2/[3b_0\ln(2m_g/\Lambda)]$. Выражения (14) и (15) определяют вещественную и мнимую части для собственных значений массы связанного состояния:

$$\mathrm{Re}\{\mathrm{M_N}\} = w_\mathrm{N} + w_\mathrm{N}^* \equiv \sqrt{2\left(\left|\varepsilon_\mathrm{N}^2\right| + \mathrm{Re}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\}\right)}, \;\; \mathrm{Im}\{\mathrm{M_N}\} = w_\mathrm{N} - w_\mathrm{N}^* \equiv \xi\sqrt{2\left(\left|\varepsilon_\mathrm{N}^2\right| - \mathrm{Re}\{\varepsilon_\mathrm{N}^2\}\right)}.$$

Вещественная часть комплексного выражения (14) есть и первая асимптотика квадрата массы связанного состояния, отвечающая вкладу члена кулоновского типа в потенциале (10).

Уравнение (11) на собственные значения для дальнодействующей части потенциала (10) при $r \to \infty$ с учётом слабой связи (кулоновского вклада) имеет четыре точки поворота, поэтому условие квантования есть [10; 11; 18; 19]

$$\oint \sqrt{\frac{s-m_-^2}{4s}\left[s-\left(m_+ - \frac{a(r)}{r}+\sigma r\right)^2\right]-\frac{M_l^2}{r^2}}dr = 4\pi\left(k+\frac{1}{2}\right),\ k=0,1,2,\ldots \tag{16}$$

Интеграл (16) «берётся» аналогично предыдущему, что приводит к кубическому уравнению для инварианта s = M^2: $s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$; $a_1=16a_\infty\sigma-m_-^2$; $a_2=64\sigma^2(a_\infty^2-\tilde{N}^2)-16a_\infty\sigma m_-^2$; $a_3=-(8a_\infty\sigma m_-)^2$; $\tilde{N}=N+(k+1/2)$. Физическое решение этого уравнения (в общем случае комлексное) даётся первым корнем, т. е. $\mathrm{M}_\mathrm{N}^2=\mathrm{Re}\{s_{\mathrm{N},1}\}$.

Таким образом, имеем два асимптотических выражения для квадрата массы резонансов – (14) и $\mathrm{M}_\mathrm{N}^2=\mathrm{Re}\{s_{\mathrm{N},1}\}$ из решения кубического уравнения. Массовая формула для мезонов выводится с помощью процедуры интерполяции Паде для этих двух асимптотик [18; 19], которая в итоге сводится к их простой сумме:

$$\mathrm{M}_\mathrm{N}^2=(m_1+m_2)^2(1-v_\mathrm{N}^2)\pm 2i(m_1^2-m_2^2)v_\mathrm{N}+\mathrm{Re}\{s_{\mathrm{N},1}\},\ v_\mathrm{N}=\frac{1}{2}\frac{\alpha_\infty}{\mathrm{N}}. \tag{17}$$

Асимптотическая интерполяционная массовая формула (17) является комплексным выражением. Как и потенциал (10) это есть анзац; она представлена суммой вкладов двух предельных асимптотических выражений: кулоновского вклада при малых r и линейного на больших расстояниях. Эта формула пригодна для расчёта масс $Q\bar{q}$-мезонов, лёгких и тяжёлых кваркониев, глюболов и соответствующих траекторий Редже. В данной работе она используется для расчёта масс мезонов и резонансов семейств ρ и $D^{\pm *}$ траекторий Редже.

Результаты расчётов по нашей модели, сравнение с результатами вычислений по модели [17] из решения двухчастичных уравнений Дирака и данными экспериментов [20] приведены в табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1. **Массы резонансов траектории Редже семейства ρ-мезона**

T a b l e 1. **Masses of the resonances of the Regge trajectories of the ρ-meson family**

Состояние $(n_r+1)^{2S+1}L_{Jz}$ State $(n_r+1)^{2S+1}L_{Jz}$	$m_{теор}$, МэВ/с^2 формула (17) m_{theor}, MeV/s^2 formula (17)	$m_{теор}$, МэВ/с^2 работа [17] m_{theor}, MeV/s^2 reference [17]	$m_{эксп}$, МэВ/с^2 эксперимент m_{exp}, MeV/s^2 experiment	Параметр Parameter
1^3S_1 ρ(770)	775,5	792,1	775,3 ± 0,3	$\alpha_\infty/2$ = 1,560 σ/2 = 139,2 ± 0,1 МэВ^2 m_u = 198,9 ± 0,7 МэВ m_d = 300,1 ± 0,6 МэВ Λ = 503,2 МэВ m_g = 416 МэВ $<\varepsilon>\approx$ 0,58%
1^3P_2 a_2(1320)	1313,1	1310,0	1318,3 ± 0,6	
1^3D_3 ρ_3(1690)	1689,1	1710,2	1688,8 ± 2,1	
1^3F_4 a_4(2040)	1992,8	2033,1	1996,3 ± 10	
1^3G_5 a_5(2040)	2255,0	2307,3	–	
2^3S_1 ρ(1700)	1680,3	1775,4	1720,0 ± 20	
3^3S_1 ρ(1450)	2249,8	2333,7	–	

Т а б л и ц а 2. **Массы резонансов траектории Редже семейства D$^{\pm *}$-мезонов**

T a b l e 2. **Masses of the resonances of the Regge trajectories of the D$^{\pm *}$-meson family**

Состояние $(n_r+1)^{2S+1}L_{Jz}$ State $(n_r+1)^{2S+1}L_{Jz}$	$m_{теор}$, МэВ/с^2 формула (17) m_{theor}, MeV/s^2 formula (17)	$m_{теор}$, МэВ/с^2 работа [17] m_{theor}, MeV/s^2 reference [17]	$m_{эксп}$, МэВ/с^2 эксперимент m_{exp}, MeV/s^2 experiment	Параметр Parameter
1^3S_1 D*(2010)	2010,3	2005,3	2010,3 ± 0,1	$\alpha_\infty/2$ = 1,3891 σ/2 = 248,9 ± 0,8 МэВ^2 m_d = 300,1 ± 0,6 МэВ m_c = 1244,2 ± 0,7 МэВ Λ = 473,1 МэВ m_g = 416 МэВ $<\varepsilon>\approx$ 0,001%
1^3P_2 D^*_2(2460)	2464,4	2382,3	2464,3 ± 1,6	
1^3D_3 D*(1D)	2848,1	–	–	
1^3F_4 D*(1F)	3182,3	–	–	
1^3G_4 D*(1G)	3482,7	–	–	
2^3S_1 D*(2S)	2814,6	–	–	
3^3S_1 D*(3S)	3460,2	–	–	

Наилучшее согласие с данными [20] достигается для приведенных значений параметров. Здесь даются половинные значения $\alpha_\infty/2$ и $\sigma/2$ параметров потенциала, которые обычно приводятся в модельных расчётах адронных процессов рассеяния. Согласие расчётов с данными достаточно хорошее, средняя относительная ошибка менее одного процента, хотя спиновые поправки здесь не учитывались. Точность описания различна для разных состояний и отличается с расчётами по модели [17]. Отметим, что масса глюона m_g = 416 МэВ фиксирована из расчётов для глюболов [8–11], масса d-кварка $m_d \approx 300$ МэВ, входящего в состав рассматриваемых $Q\bar{q}$-состояний, в пределах ошибок оказалась приблизительно одинаковой при фитировании данных. Хорошее согласие рассчитанных физических характеристик с экспериментальными данными является главным аргументом в пользу предложенного в работе уравнения и метода его исследования.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность члену-корреспонденту Л. М. Томильчику за многочисленные обсуждения и критические замечания, докторам физ.-мат. наук Е. А. Толкачёву за полезные советы и Ю. А. Курочкину за поддержку и внимание к работе.

Acknowledgements. The author is very grateful to Corresponding Member L. M. Tomilchik for numerous discussions and valuable comments, D. Sc. E. A. Tolkachev for helpful advice and D. Sc. Yu. A. Kurochkin for support and attention to the work.

Список использованных источников

1. Коллинз, П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий / П. Коллинз. – М.: Атомиздат, 1980. – 432 с.

2. Lucha, W. Instantaneous Bethe-Salpeter Kernel for the Lightest Pseuoscalar Mesons / W. Lucha, F. F. Schoberl // Physical Review D. – 2016. – Vol. 93, iss. 9. – P. 096005–096014. doi.org/10.1103/physrevd.93.096005

3. Salpeter, E. E. A Relativistic Equation for Bound-State Problems / E. E. Salpeter, H. A. Bethe // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84, iss. 6. – P. 1232–1241. doi.org/10.1103/physrev.84.1232

4. Semay, C. An upper bound for asymmetrical spinless Salpeter equations / C. Semay // Phys. Lett. A. – 2012. – Vol. 376, N 33. – P. 2217–2221. doi.org/10.1016/j.physleta.2012.05.046

5. Ebert, D. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and Bc mesons / D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin // Euro. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71, N 12. – P. 1825–1837. doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1825-9

6. Quarkonia and their transitions / E. Eichten [et al.] // Rev. Mod. Phys. – 2008. – Vol. 80, N 3. – P. 1161–1193. doi.org/10.1103/revmodphys.80.1161

7. Morpurgo, G. Field theory and the nonrelativistic quark model: a parametrization of meson masses / G. Morpurgo // Phys. Rev. D. – 1990. – Vol. 41, N 9. – P. 2865–2870.

8. Sergeenko, M. N. Glueballs and the Pomeron / M. N. Sergeenko // Eur. Phys. Lett. – 2010. – Vol. 89, N 1. – P. 11001–11007. doi.org/10.1209/0295-5075/89/11001

9. Sergeenko, M. N. An Interpolating mass formula and Regge trajectories for light and heavy quarkonia / M. N. Sergeenko // Z. Phys. C. – 1994. – Vol. 64, N 2. – P. 315–322. doi.org/10.1007/bf01557404

10. Сергеенко, М. Н. Массы адронов и траектории Редже для потенциала типа воронки / М. Н. Сергеенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 40–43.

11. Sergeenko, M. N. Glueball masses and Regge trajectories for the QCD-inspired potential / M. N. Sergeenko // Euro. Phys. J. C. – 2012. – Vol. 72, N 8. – P. 2128–2139. doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2128-5

12. Sergeenko, M. N. Masses and widths of Resonances for the Cornell Potential / M. N. Sergeenko // Advances in High Energy Physics. – 2013. – Vol. 2013. Article ID 325431. – P. 1–7. doi.org/10.1155/2013/325431

13. Huang, Y.-S. Schredinger-Like Relativistic Wave Equation of Motion for the Lorentz-Scalar Potential / Y.-S. Huang // Foundations of Physics. – 2001. – Vol. 31, N 9. – P. 1287–1298. doi.org/10.1023/a:1012270110871

14. Bhaduri, R. K. Models of the Nucleon (From Quark to Soliton) / R. K. Bhaduri. – New York: Addison-Wesley, 1988. – 360 p.

15. Томильчик, Л. М. Эффекты конфайнмента кварков в конформно-плоской фоновой метрике / Л. М. Томильчик // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. – Минск, 2001. – Вып. 5. – С. 155–161.

16. Горбацевич, А. К. Уравнение движения частиц в конформно плоском пространстве и удержание кварков / А. К. Горбацевич, Л. М. Томильчик // Проблемы физики высоких энергий в теории поля, Протвино, 7–13 июля 1986 г. – М., 1987. – С. 378–383.

17. Crater, H.W. Two-body Dirac equations for meson spectroscopy / H. W. Crater, P. Van Alstine // Phys. Rev. D. – 1988. – Vol. 37, N 7. – P. 1982–2000. doi.org/10.1103/physrevd.37.1982

18. Sergeenko, M. N. Semiclassical wave equation and exactness of the WKB method / M. N. Sergeenko // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 53, N 6. – P. 3798–3804. doi.org/10.1103/physreva.53.3798

19. Sergeenko, M. N. Relativistic semiclassical wave equation and its solution / M. N. Sergeenko // Mod. Phys. Lett. A. – 1997. – Vol. 12, N 37. – P. 2859–2871. doi.org/10.1142/s0217732397002983

20. Review of Particle Physics / K. A. Olive [et al.] // Chinese Physics C. – 2014. – Vol. 38, N 9. – P. 090001. doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001

References

1. Collins P. D. B. *An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics.* Cambridge University Press, 1977. 460 p. doi.org/10.1017/cbo9780511897603

2. Lucha W., Schoberl F. F. Instantaneous Bethe-Salpeter Kernel for the Lightest Pseuoscalar Mesons. *Physical Review D*, 2016, vol. 93, iss. 9, pp. 096005–096014. doi.org/10.1103/physrevd.93.096005

3. Salpeter E. E., Bethe H. A. A Relativistic Equation for Bound-State Problems. *Physical Review*, 1951, vol. 84, iss. 6, pp. 1232–1242. doi.org/10.1103/physrev.84.1232

4. Semay C. An upper bound for asymmetrical spinless Salpeter equations. *Physics Letters A*, 2012, vol. 376, no. 33, pp. 2217–2221. doi.org/10.1016/j.physleta.2012.05.046

5. Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and B_c mesons. *The European Physical Journal C*, 2011, vol. 71, no. 12, pp. 1825–1837. doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1825-9

6. Eichten E., Godfrey S., Mahlke H., Rosner J. L. Quarkonia and their transitions. *Review of Modern Physics*, 2008, vol. 80, no. 3, pp. 1161–1193. doi.org/10.1103/revmodphys.80.1161

7. Morpurgo G. Field theory and the nonrelativistic quark model: a parametrization of the meson masses. *Physical Review D*, 1990, vol. 41, no. 9, pp. 2865–2870. doi.org/10.1103/physrevd.41.2865

8. Sergeenko M. N. Glueballs and the Pomeron. *EuroPhysics Letters*, 2010, vol. 89, no. 1, pp. 11001–11007. doi.org/10.1209/0295-5075/89/11001

9. Sergeenko M. N. An Interpolating mass formula and Regge trajectories for light and heavy quarkonia. *Zeitschrift fur Physik C*, 1994, vol. 64, no. 2, pp. 315–322. doi.org/10.1007/bf01557404

10. Sergeenko M. N. Hadron masses and Regge trajectories for the funnel-type potential. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 40–43 (in Russian).

11. Sergeenko M. N. Glueball masses and Regge trajectories for the QCD-inspired potential. *The European Physical Journal C*, 2012, vol. 72, no. 8, pp. 2128–2139. doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2128-5

12. Sergeenko M. N. Masses and widths of Resonances for the Cornell Potential. *Advances in High Energy Physics*, 2013, vol. Art. ID 325431, pp. 1–7. doi.org/10.1155/2013/325431

13. Huang Y.-S. Schredinger-Like Relativistic Wave Equation of Motion for the Lorentz-Scalar Potential. *Foundations of Physics*, 2001, vol. 31, no. 9, pp. 1287–1298. doi.org/10.1023/a:1012270110871

14. Bhaduri R. K. *Models of the Nucleon (From Quark to Soliton).* New York, Addison-Wesley, 1988. 360 p.

15. Tomilchik L. M. Effects of confinement in conformal-plane background gauge. *Kovariantnye metody v teoreticheskoi fizike. Fizika elementarnykh chastits i teoriya otnositel'nosti* [Covariant methods in theoretical physics. Elementary Particle Physics and theory of relativity]. Minsk, 2001, iss. 5, pp. 155–161 (in Russian).

16. Gorbatsevich A. K., Tomilchik L. M. Particle equation of motion in conformal plane space and quark confinement. *Problemy fiziki vysokikh energii v teorii polya, Protvino, 7–13 iyulya 1986 g.* [Problems on high energy physics and field theory, Protvino, July 7–13, 1986]. Moscow, 1987, pp. 378–383 (in Russian).

17. Crater H. W., Alstine P. Van. Two-body Dirac equations for meson spectroscopy. *Physical Review D*. 1988, vol. 37, no. 7, pp. 1982–2000. doi.org/10.1103/physrevd.37.1982

18. Sergeenko M. N. Semiclassical wave equation and exactness of the WKB method. *Physical Review A*, 1996, vol. 53, no. 6, pp. 3798–3804. doi.org/10.1103/physreva.53.3798

19. Sergeenko M. N. Relativistic semiclassical wave equation and its solution. *Modern Physics Letters A*, 1997, vol. 12, no. 37, pp. 2859–2871. doi.org/10.1142/s0217732397002983

20. Olive K. A. et al. Review of Particle Physics. *Chinese Physics C*, 2014, vol. 38, no. 9, p. 090001. doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001

Информация об авторе

Сергеенко Михаил Николаевич – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник. Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: mnsergey@tut.by.

Information about the author

Sergeenko Mikhail Nikolaevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Senior researcher. Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: mnsergey@tut.by.