ISSN 1561-8323 (print)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 514.765.1

Поступило в редакцию 10.05.2017
Received 10.05.2017

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

СВЯЗНОСТИ НА НЕРЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

Аннотация. В каком случае однородное пространство допускает инвариантную аффинную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно. Если однородное пространство является редуктивным, то пространство всегда допускает инвариантную связность. Целью данной работы является описание инвариантных аффинных связностей на трехмерных нередуктивных однородных пространствах, их тензоров кривизны и кручения, алгебр голономии. В работе рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований с разрешимым стабилизатором. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии. Приведено в явном виде локальное описание всех трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором, допускающих инвариантные аффинные связности. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методики, представленной в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: аффинная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра Ли, редуктивное пространство

Для цитирования: Можей, Н. П. Связности на нередуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований / Н. П. Можей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 5. – С. 7–15.

Natalya P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

CONNECTIONS ON NON-REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES WITH AN UNSOLVABLE GROUP OF TRANSFORMATIONS

(Communicated by Academician Viktor I. Korzyuk)

Abstract. When does a homogeneous space allow an invariant affine connection? If at least one invariant connection exists, then the space is isotropy-faithful, but the isotropy-faithfulness is insufficient for the space in order to have invariant connections. If a homogeneous space is reductive, then the space allows an invariant connection. The purpose of the work is to describe invariant affine connections on three-dimensional non-reductive homogeneous spaces together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras. We concerned the case, when the Lie group of transformations is unsolvable and a stabilizer is solvable. The basic notions, such as an isotropy-faithful pair, a reductive space, an affine connection, curvature and torsion tensors, holonomy algebra are defined. A local description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces with an unsolvable Lie group of transformations and a solvable stabilizer, allowing affine connections, is given. A local classification of homogeneous spaces is equivalent to that of the effective pairs of the Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors, holonomy algebras are found. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces. They are mainly local in character.

Keywords: affine connection, homogeneous space, transformation group, Lie algebra, reductive space

For citation: Mozhey N. P. Connections on non-reductive homogeneous spaces with an unsolvable group of transformations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–15 (in Russian).

Введение. Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А. П. Нордена, П. К. Рашевского, М. Куриты, А. П. Широкова, Э. Б. Винберга, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. В каком случае однородное пространство допускает инвариантную аффинную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно. Если однородное пространство является редуктивным, то пространство всегда допускает инвариантную связность. Связности на трехмерных редуктивных пространствах с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором изучались в [2], целью же данной работы является классификация инвариантных аффинных связностей на трехмерных нередуктивных однородных пространствах. Настоящее сообщение связано и с работой автора о трехмерных нередуктивных однородных пространствах неразрешимых групп Ли, в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нередуктивные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$ (см., напр., [3]). Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [1]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Однородное пространство *редуктивно*, если существует разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, в противном случае пространство не является редуктивным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным (см., напр., [4]).

Классификация связностей на нередуктивных пространствах. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1, ..., e_n\}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$, причем подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [5], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Т е о р е м а. *Трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима, локально имеют следующий вид:*

1.5.19	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	u_1
u_1	$-e_1$	0	0	u_3
u_2	0	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	0	0

,

2.7.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	$u_1 + e_2$
e_2	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_1	0	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	$-u_1 - e_2$	$-u_3$	0	0	0

,

2.8.7	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	λe_1	e_1	0	u_1
e_2	$-\lambda e_1$	0	0	u_2	λu_3
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-\lambda u_3$	$-u_3$	0	0

,

2.17.27	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_1$	e_2	u_1
e_2	0	0	e_2	0	u_2
u_1	$-2e_1$	$-e_2$	0	u_2	$2u_3$
u_2	$-e_2$	0	$-u_2$	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$-2u_3$	0	0

,

2.18.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	$e_2 + u_1$
e_2	$-e_1$	0	0	u_1	u_3
u_1	0	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	u_1	0	0
u_3	$-e_2 - u_1$	$-u_3$	0	0	0

,

3.6.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	e_1	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2	0
e_3	$-e_1$	0	0	0	0	u_3
u_1	$-e_1$	0	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_3$	0	0

,

3.12.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	$-e_3$	0	0	u_3
e_2	e_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	e_3	0	0	0	e_3	u_1
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

,

3.13.6	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-\mu e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	0	μu_3
e_2	μe_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

,

3.25.30	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	e_2	u_1
e_3	e_2	0	0	e_2	$2e_3$	u_2
u_1	0	0	$-e_2$	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1$	$-e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-2u_3$	0

,

3.28.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$e_3 - e_2$	$-e_3$	0	u_1	u_3
e_2	$e_2 - e_3$	0	0	e_3	$2e_3$	$2e_1 + u_2$
e_3	e_3	0	0	0	$-e_3$	u_1
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1$	$-2e_3$	e_3	u_1	0	0
u_3	$-u_3$	$-2e_1 - u_2$	$-u_1$	0	0	0

,

4.19.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-e_3$	$-e_4$	0	0	u_3
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	0
e_3	e_3	$-e_4$	0	0	$-e_4$	$-2e_3$	u_2
e_4	e_4	0	0	0	0	$-e_4$	u_1
u_1	0	0	e_4	0	0	u_1	0
u_2	0	$-u_1$	$2e_3$	e_4	$-u_1$	0	$-2u_3$
u_3	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$2u_3$	0

,

4.21.11	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-\mu e_3$	$(1-\mu)e_4$	u_1	0	μu_3
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0
e_3	μe_3	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2
e_4	$(\mu-1)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0

,

5.9.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	0	e_5	u_1	0	0
e_2	0	0	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	u_3
e_3	$-e_3$	0	0	e_5	0	0	u_1	0
e_4	0	e_4	$-e_5$	0	0	e_5	$2e_4$	u_2
e_5	$-e_5$	e_5	0	0	0	0	e_5	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	$-e_5$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	0	$-u_1$	$-2e_4$	$-e_5$	u_1	0	$2u_3$
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

.

З а м е ч а н и е. Предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются после таблицы умножения, в противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Найденные алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ являются подалгебрами алгебры 5.9.2 в базисах:

$$4.21.11 - \{e_1+\mu e_2, -e_3, e_4, -e_5, u_1+e_3, -u_2, -u_3\},\ 4.19.2 - \{e_2, -e_3, -e_4, e_5, u_1, -u_2, u_3\},$$

$$3.28.2 - \{e_2+e_3, e_4, e_5, u_1, u_2-2e_2-2e_3, u_3\},\ 3.25.30 - \{e_3, e_5, e_4, u_1, u_2, u_3\},$$

$$3.13.6 - \{e_1+\mu e_2, -e_4, -e_5, u_1, u_2, -u_3\},\ 3.12.2 - \{e_2, e_4, e_5, u_1, u_2, u_3\},$$

$$3.6.2 - \{e_4, e_1, e_2, u_2/2, u_1+e_3, u_3/2\},\ 2.17.27 - \{e_4, e_5, u_2, u_1, u_3\},$$

$$2.18.3 - \{e_4, u_2/2-e_3-u_1, u_1+e_3, e_1, u_3/2\},\ 2.8.7 - \{-e_4, e_1+\lambda e_2, u_2/2, u_1+e_3, -u_3/2\},$$

$$2.7.2 - \{e_4, e_2, u_2/2-e_2, u_1+e_3, u_3/2\},\ 1.5.19 - \{e_4, u_2/2, u_1+e_3, u_3/2\}.$$

Далее используется собственный базис пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Для получения указанного результата сначала найдены трехмерные изотропно-точные пары (с подробным описанием можно ознакомиться в [5]). Далее выбраны нередуктивные пары с неразрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой подалгеброй $\mathfrak{g}$ и найдены аффинные связности, соответственно, определены пары, допускающие инвариантную связность.

Далее пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется тривиальной, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$, такая пара является редуктивной.

Действительно, рассмотрим, например, случай, когда $\mathfrak{g}$ имеет вид 3.6. Пусть $\mathfrak{h}$ – нильпотентная подалгебра, порожденная e_2 и e_3, тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}e_3\oplus\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1$,

$\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)} \supset \mathbb{R}u_3$ и, с учетом тождества Якоби, получим $[e_1, u_1] = pe_1$, $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = pu_3$, $[u_2, u_3] = 0$. При $p = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, являющейся редуктивной, при $p \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.6.2 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = pu_1$, $\pi(u_2) = u_2$, $\pi(u_3) = pu_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 = 1$, а $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2 = 3$, эти пары не эквивалентны.

В случае 3.12 $\mathfrak{h}$ порождена вектором e_1. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$, в силу тождества Якоби имеем $[u_1, u_2] = -p_2u_1 + p_1u_2$, $[u_1, u_3] = 2p_1u_3$, $[u_2, u_3] = 2p_2u_3$, $[e_2, u_1] = p_1e_2 + p_2e_3$, $[e_2, u_2] = 2p_2e_2$, $[e_3, u_1] = 2p_1e_3$, $[e_3, u_2] = p_1e_2 + p_2e_3$. Если $p_1 = p_2 = 0$, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, а иначе она эквивалентна 3.12.2 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \mathfrak{g}$, где при $p_1 \neq 0$, $p_2 = 0$: $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_3$, $\pi(e_3) = e_2$, $\pi(u_1) = p_1u_2$, $\pi(u_2) = p_1u_1$, $\pi(u_3) = p_1u_3$; при $p_1 = 0, p_2 \neq 0$: $\pi(e_i) = e_i$, $\pi(u_j) = p_2u_j$, $i, j = \overline{1,3}$; при $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$: $\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(e_3) = p_1e_2 + e_3$, $\pi(u_1) = p_2u_1 + p_1p_2u_2, \pi(u_2) = p_2u_2$, $\pi(u_3) = p_2u_3$. Поскольку $Z(\bar{\mathfrak{g}}_1) = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2$, а $Z(\bar{\mathfrak{g}}_2) = 0$, пары не эквивалентны.

В случае 3.28 в силу тождества Якоби $[e_2, u_1] = pe_3$, $[e_2, u_2] = 2pe_3$, $[e_2, u_3] = 2pe_1 + u_2$, $[e_3, u_2] = -pe_3$, $[u_1, u_2] = -pu_1$, $[u_1, u_3] = [u_1, u_3] = 0$. При $p = 0$ пара тривиальна, при $p \neq 0$ – эквивалентна 3.28.2 посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}_2$, $\pi(e_i) = e_i$, $\pi(u_i) = (1/p)u_i$, $i = \overline{1,3}$. Так как $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, пары не эквивалентны.

В случае 4.19 $\mathfrak{h}$ порождена вектором e_1, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$, а $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}), [u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}), [u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$, $[u_1, u_2] = a_1e_1 + a_2e_2 + \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2$, $[u_1, u_3] = \beta_3u_3$, $[u_2, u_3] = \gamma_3u_3$, $[e_2, u_2] = u_1 + pe_2$, $[e_3, u_3] = u_2 - 2pe_1$, $[e_4, u_2] = pe_4, [e_4, u_3] = u_1 + pe_2$. Использовав тождество Якоби, получим $a_1 = a_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = q = \gamma_3 = 0$. При $p = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна, при $p \neq 0$ – эквивалентна паре 4.19.2 посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_1) = (1/p)u_1 + e_2$, $\pi(u_2) = (1/p)u_2 - 2e_1$, $\pi(u_3) = (1/p)u_3$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_1$ – разрешимая алгебра Ли, а $\bar{\mathfrak{g}}_2$ неразрешима, пары не эквивалентны.

В случае 5.9 $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2, тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1-\lambda,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4, \bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$, а $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1+\lambda,0)}(\mathfrak{h})$, $[u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,1)}(\mathfrak{h})$, $[u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,1)}(\mathfrak{h})$. Если $\lambda = 0$, то $[e_4, u_1] = pe_5$, $[e_4, u_2] = 2pe_4, [e_5, u_2] = pe_5$, $[u_1, u_3] = 0, [u_1, u_2] = a_3e_3 + \alpha_1u_1, [u_2, u_3] = \gamma_3u_3$. В силу тождества Якоби $a_3 = 0$, $\alpha_1 = -p$, $\gamma_3 = 2p$. При $p = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна, при $p \neq 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 5.9.2 доказывается при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i, i = \overline{1,5}, \pi(u_j) = pu_j$, $j = \overline{1,3}$. Если же $\lambda \neq 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 = 3$, $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2 = 6$, пары не эквивалентны.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
5.9.2 3.12.2 $3.13.6, \mu \neq 0, 1, -1, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.19.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$4.21.11,\ \mu \neq 0, 1, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.21.11, $\mu=1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&p_{1,3}\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&1&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
3.6.2 2.8.7, $\lambda\neq 0,1,-1,1/2$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&-1&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&q_{2,3}\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3}&r_{2,3}\\0&-1&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=-1$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.25.30	$\begin{pmatrix}0&-1&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&-1&p_{1,3}\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&-q_{1,3}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}&0\\0&-1&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$
3.28.2	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
2.7.2	$\begin{pmatrix}-1/2&p_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&0\\0&q_{2,2}&0\\0&0&q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&p_{1,2}&0\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$

2.8.7, $\lambda = 0$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ -1/2 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = -1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.17.27	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ -1 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ -1 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.18.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2}+1 & 0 \end{pmatrix}$
1.5.19	$\begin{pmatrix} -1/2 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,1}+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ -1/2 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = \overline{1,3}$).

Тензор *кручения* $T \in \operatorname{Inv} T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и тензор *кривизны* $R \in \operatorname{Inv} T_3{}^1(\mathfrak{m})$ имеют вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. *Алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Будем говорить, что связность нормальна, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

В случаях 3.25.30, 2.7.2, 2.17.27, 1.5.19 $\bar{\mathfrak{g}}$ не является полупростой, ее радикал коммутативен, в случаях 4.21.11 ($\mu = 0$), 3.13.6 ($\mu = 0, -1$), 2.8.7 ($\lambda = 0, -1$), 2.18.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ также не является полупростой, ее радикал некоммутативен, в этих случаях тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии могут быть ненулевыми. В случаях 5.9.2, 4.19.2, 4.21.11 ($\mu \neq 0, 1, 1/2$), 3.12.2, 3.13.6 ($\mu \neq 0, 1, -1, 1/2$), 3.6.2, 3.28.2, 2.8.7 ($\lambda \neq 0, 1, -1, 1/2$) тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии всегда нулевые; в случаях 4.21.11 ($\mu = 1$), 3.13.6 ($\mu = 1$), 2.8.7 ($\lambda = 1$) тензор кривизны всегда нулевой, а тензор кручения может быть ненулевым; в случаях 4.21.11 ($\mu = 1/2$), 3.13.6 ($\mu = 1/2$), 2.8.7 ($\lambda = 1/2$) тензоры кривизны и алгебры голономии могут быть ненулевыми, а тензор кручения всегда нулевой.

Действительно, пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = \overline{1,3}$). Рассмотрим, например, локально однородное пространство 5.9.2, однозначно определены $\Lambda(e_i)$, $i = \overline{1,5}$, так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, имеем $p_{1,1} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = p_{3,2} = p_{3,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $p_{1,3} = 0$. Так как

$[\Lambda(e_4),\Lambda(u_1)]=\Lambda(e_5)$, имеем $p_{1,2}=-1$. Если $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=0$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=q_{1,3}=q_{2,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1)$, $q_{2,1}=0$, $q_{2,2}=q_{1,1}-1$. Так как $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_2)]=2\Lambda(e_4)$, $q_{1,2}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}+1$. Если $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_3)$, то $r_{1,1}=r_{1,2}=r_{1,3}=r_{2,1}=r_{2,2}=r_{2,3}=r_{3,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=0$, имеем $r_{3,1}=0$. Так как $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=0$, $r_{3,2}=-1$. Получим, что связность имеет вид, указанный в таблице (так как для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензоры кривизны и кручения получаются нулевыми. Таким образом, алгебра голономии также нулевая.

Рассмотрим теперь случай 3.13.6. При μ = 1 из $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0$ получаем $p_{3,1}=p_{3,2}=0$, $p_{3,3}=p_{1,1}$, $p_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda(e_3)$, $p_{1,2}=-1$, $p_{1,1}=p_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, $p_{1,1}=p_{2,3}=p_{1,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(e_3)$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}+1$, $q_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=2\Lambda(e_2)$, $q_{1,2}=0$, $q_{1,1}=q_{2,2}+1$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0$, $q_{2,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$, то $r_{3,1}=0$, $r_{3,2}=-1$, $r_{3,3}=r_{1,1}$, $r_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=0$, $r_{1,2}=-q_{1,3}$, $r_{1,1}=r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_3)$, $r_{1,1}=r_{1,3}=r_{2,3}=0$. Получим, что связность имеет вид, указанный в таблице. Тензор кривизны – нулевой, а тензор кручения $T(u_1,u_2)=T(u_1,u_3)=0$, $T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}}-[u_2,u_3]_{\mathfrak{m}}=(2q_{1,3},0,0)$, алгебра голономии нулевая.

При $\mu=1/2$ из $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0$ получаем $p_{3,1}=p_{3,2}=0$, $p_{3,3}=p_{1,1}$, $p_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda(e_3)$, $p_{1,2}=-1$, $p_{1,1}=p_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, $p_{1,1}=p_{2,3}=p_{1,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(e_3)$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}+1$, $q_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=2\Lambda(e_2)$, $q_{1,2}=0$, $q_{1,1}=q_{2,2}+1$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0$, имеем $q_{1,3}=q_{2,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$, то $r_{3,1}=0$, $r_{3,2}=-1$, $r_{3,3}=r_{1,1}$, $r_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=r_{1,2}=0$, $r_{1,1}=r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=(1/2)\Lambda(u_3)$, $r_{1,1}=0$, $r_{2,3}=0$. Получим, что связность имеет вид, указанный в таблице. Тензор кривизны $R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=0$,

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=\begin{pmatrix}0&0&-3r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения получился нулевым. Алгебра голономии при $r_{1,3}\neq0$ не совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V=\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$ (т. е. алгебра голономии не является совершенной), $\mathfrak{h}^*=\left\{\left.\begin{pmatrix}0&p_1&p_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right|\, p_1,p_2\in\mathbb{R}\right\}$. Связность не является нормальной, так как $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\supset\Lambda(\mathfrak{g})$, т. е. $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ по крайней мере трехмерна и $\mathfrak{h}^*\neq\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$. При $r_{1,3}=0$ алгебра голономии нулевая.

Аналогично, при μ ≠ 1, 1/2, 0, –1 тензоры кривизны и кручения нулевые, а при μ = 0, –1 тензоры кривизны и кручения имеют вид:

Пара	Тензор кривизны
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&0&-q_{2,3}+2p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2p_{1,3}+q_{2,3}&-r_{2,3}+p_{1,3}^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}-2r_{1,1}&0&0\\0&q_{2,3}-2r_{1,1}-2p_{1,3}&-4r_{2,3}+q_{2,3}^2\\0&0&q_{2,3}-2r_{1,1}-2p_{1,3}\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=-1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&3p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{2,3}&0&0\\0&-2p_{2,3}&0\\0&0&p_{2,3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\3p_{2,3}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.13.6, $\mu = 0$	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3}, 0)$
3.13.6, $\mu = -1$	$(0, 0, 0), (0, 2p_{2,3}, 0), (0, 0, 0)$

Здесь тензор кривизны R описан через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных пар с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, допускающих инвариантные аффинные связности, кроме представленных в теореме, не существует.

Заключение. Приведено в явном виде локальное описание всех трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором, допускающих инвариантные аффинные связности. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методики, представленной в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Борису Петровичу Комракову за постановку задачи и полезные замечания.

Acknowledgements. The author is grateful to his teacher Boris Petrovich Komrakov for posing the problem and for useful remarks.

Список использованных источников

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.

2. Можей, Н. П. Трехмерные редуктивные пространства неразрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 7–17.

3. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.

4. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65. doi.org/10.2307/2372398

5. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

References

1. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience Publishers, 1963. 340 p.

2. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 7–17. (in Russian).

3. Onishchik A. L. *Topology of transitive transformation groups*. Moscow, Fizmatlit Publishing Company, 1995. 384 p. (in Russian).

4. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. doi.org/10.2307/2372398

5. Mozhey N. P. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them*. Kazan, Publisher University of Kazan, 2015. 394 p. (in Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.