ISSN 1561-8323 (print)
УДК 517.925
Поступило в редакцию 13.09.2017
Received 13.09.2017

М. С. Белокурский

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь

ЧАСТИЧНО НЕРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых линейная почти периодическая дифференциальная система имеет частично нерегулярные почти периодические решения в критическом резонансном случае.

Ключевые слова: частично нерегулярные решения, линейные дифференциальные системы, почти периодические системы, критический резонансный случай

Для цитирования: Белокурский, М. С. Частично нерегулярные решения линейных почти периодических дифференциальных систем в критическом резонансном случае / М. С. Белокурский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 5. – С. 16–21.

Maksim S. Belokursky

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus

PARTIALLY IRREGULAR SOLUTIONS OF LINEAR ALMOST PERIODIC DIFFERENTIAL SYSTEMS IN THE CRITICAL RESONANCE CASE

(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)

Abstract. The necessary and sufficient conditions, under which a linear almost periodic differential system has partially irregular almost periodic solutions in the critical resonance case, were obtained.

Keywords: partially irregular solutions, linear differential systems, almost periodic systems, critical resonant case

For citation: Belokursky M. S. Partially irregular solutions of linear almost periodic differential systems in the critical resonance case. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 16–21 (in Russian).

Пусть D – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, а $AP(\mathbb{R}\times D,\mathbb{R}^n)$ – пространство функций $f:\mathbb{R}\times D\to\mathbb{R}^n$ таких, что каждая $f(t,x)\in AP(\mathbb{R}\times D,\mathbb{R}^n)$ является непрерывной по совокупности переменных и почти периодической по t равномерно относительно $x\in D$. Следуя [1, с. 60], через $\mathrm{Mod}(f)$ обозначим частотный модуль функции f, т. е. наименьшую аддитивную группу вещественных чисел, содержащую множество показателей Фурье (частот) функции f. Под частотным модулем разрешенной относительно производной системы почти периодических уравнений будем понимать модуль частот её правой части. Я. Курцвейль, О. Вейвода в [2] показали, что системы обыкновенных почти периодических дифференциальных уравнений могут иметь сильно нерегулярные почти периодические решения, т. е. такие решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. А. К. Деменчук изучал почти периодические решения, частотный модуль которых содержит только некоторые частоты системы, в работах [3–5] и др. Такие решения названы частично нерегулярными [4, гл. 2].

В данном сообщении исследуется вопрос существования частично нерегулярных почти периодических решений линейной почти периодической системы в критическом резонансном случае, когда среди собственных чисел усреднения матрицы коэффициентов имеются чисто мнимые с непростыми элементарными делителями. Случай, когда среди собственных чисел имеются чисто мнимые с простыми элементарными делителями был исследован в [4, с. 149] и [6].

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\varphi(t),\quad \mathrm{Mod}(A)\cap\mathrm{Mod}(\varphi)=\{0\},\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

предполагая почти периодичность матрицы коэффициентов $A(t)$ и вынуждающей силы $\varphi(t)$ с тривиальным пересечением их частотных модулей. Для системы (1) почти периодические решения с модулем вынуждающей силы называются нерегулярными вынужденными [4, с. 137]. Выясним вопрос о существовании нерегулярных по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$ почти периодических решений $x(t)$ системы (1), т. е. таких что $(\mathrm{Mod}(x)+\mathrm{Mod}(\varphi))\cap\mathrm{Mod}(A)=\{0\}$, в критическом резонансном случае.

Для решения поставленной задачи, следуя [3], предварительно выполним редукцию системы (1) к системе меньшей размерности. Пусть $x(t)$ – почти периодическое решение системы (1), нерегулярное по отношению к частотному модулю матрицы коэффициентов. Тогда согласно [4, с. 37] вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dx}{dt}=\widehat{A}x+\varphi(t),\quad [A(t)-\widehat{A}]x=A_*(t)x=0,\ \ \widehat{A}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt. \tag{2}$$

Поскольку частотный модуль матрицы $A_*(t)$ содержится в $\mathrm{Mod}(A)$ и $\mathrm{Mod}(x)\cap\mathrm{Mod}(A)=\{0\}$, то из второй системы в силу [4, с. 41, 43] вытекает, что матрица $A_*(t)$ имеет неполный стобцовый ранг, т. е. выполняется условие

$$\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}}A_*=d<n. \tag{3}$$

В таком случае найдется постоянная неособенная $n\times n$-матрица Q_{A_*} такая, что у матрицы $A_*(t)Q_{A_*}$ первые $n-d=s$ столбцов нулевые, а остальные столбцы линейно независимы. Тогда замена переменных $x=Q_{A_*}y$ приводит систему (2) к системе $\dfrac{dy}{dt}=By+\psi(t),\quad B_*(t)y=0,$ где $B=Q_{A_*}^{-1}\widehat{A}Q_{A_*};\quad \psi(t)=Q_{A_*}^{-1}\varphi(t);\quad B_*(t)=A_*(t)Q_{A_*}$.

Согласно исходному предположению полученная система также имеет почти периодическое решение $y(t)=Q_{A_*}^{-1}x(t),\quad \mathrm{Mod}(y)=\mathrm{Mod}(x)$. Столбцы матрицы $B_*(t)$ с номерами $n-d+1,\dots,n$ линейно независимы. Поэтому из равенства $B_*(t)y=0$ согласно [4, с. 41] вытекает, что соответствующие компоненты почти периодического решения с заданным свойством частот должны быть нулевыми, т. е. $y(t)=\mathrm{col}(y_1(t),\dots,y_{n-d}(t),0,\dots,0)$. Это означает, что последняя система примет вид

$$\frac{dy^{[s]}}{dt}=B^{[s,s]}y^{[s]}+\psi^{[s]}(t),\quad B_{[n-s,s]}y^{[s]}+\psi_{[n-s]}(t)=0,\quad y_{[n-s]}=0, \tag{4}$$

где $y=\mathrm{col}(y^{[s]},y_{[n-s]}),\quad y^{[s]}=\mathrm{col}(y_1,\dots,y_s),\ y_{[n-s]}=\mathrm{col}(y_{s+1},\dots,y_n),\ B^{[s,s]},\quad B_{[n-s,s]}$ – соответственно верхний и нижний блоки $n\times s$-матрицы, полученной из матрицы B вычеркиванием последних d столбцов (нижние индексы указывают размерности блоков); $\psi(t)=\mathrm{col}(\psi^{[s]}(t),\psi_{[n-s]}(t))$.

Первая система из (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t)=(Q_{A_*}^{-1})^{[s,n]}x(t)$, где $(Q_{A_*}^{-1})_{[s,n]}$ – первые s строк матрицы $Q_{A_*}^{-1}$. Так как $y(t)=Q_{A_*}^{-1}x(t),\quad y(t)=\mathrm{col}(y^{[s]}(t),0,\dots,0)$, то $\mathrm{Mod}(y^{[s]})=\mathrm{Mod}(x)$. Как следует из (4), вектор $y^{[s]}(t)$ удовлетворяет тождеству

$$B_{[n-s,s]}y^{[s]}(t)+\psi_{[n-s]}(t)\equiv 0. \tag{5}$$

Таким образом, если система (1) имеет почти периодическое решение $x(t)$, нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$, то выполняются условия (3), (5), где $y^{[s]}(t)$ – почти периодическое решение первой системы из (4) с аналогичным свойством частот.

Справедливо и обратное утверждение. Покажем, что при выполнении условия (3) нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$ почти периодическое решение системы (4) является также решением системы (1). Поскольку $y^{[s]}(t)$ – решение первой системы из (4), удовлетворяющее тождеству (5), то $y(t) = \mathrm{col}\,(y^{[s]}(t), ..., 0)$ является решением всей системы (4). В силу условия (3) существует невырожденное преобразование $x = Q_{A*}y$ такое, что вектор $x(t) = Q_{A*}\,\mathrm{col}(y^{[s]}(t), 0, \ldots, 0)$ является почти периодическим решением системы (2), а значит, и системы (1), при этом $\mathrm{Mod}(x) = \mathrm{Mod}(y^{[s]})$.

Итак, имеет место

Л е м м а [4]. *Для того чтобы система (1) имела почти периодическое нерегулярное по отношению к* $\mathrm{Mod}(A)$ *решение* $x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) столбцовый ранг матрицы $A(t) - \widehat{A}(t)$ *удовлетворял неравенству (3);*

2) первая система из (4) имела почти периодическое решение $y^{[s]}(t)$ *такое, что* $(\mathrm{Mod}(y^{[s]}) + \mathrm{Mod}(\varphi)) \cap \mathrm{Mod}(A) = \{0\}$;

3) выполнялось тождество (5), при этом $x(t) = Q_{A*}\,\mathrm{col}(y^{[s]}(t), 0, \ldots, 0)$, *где* Q_{A*} *– постоянная неособенная* $n \times n$*-матрица такая, что первые* $s = n - d$ *столбцов матрицы* $[A(t) - \widehat{A}(t)]Q_{A*}$ *нулевые.*

Перейдем теперь к выяснению условий существования требуемых частично нерегулярных почти периодических решений системы (1). Пусть $\alpha_k \pm i\beta_k$ $(k = 1, \ldots, k';\ k' \le n;\ i^2 = -1)$ – собственные числа матрицы коэффициентов $B^{[s,s]}$ редуцированной системы (4). Как отмечено выше, в работе [6] изучен случай чисто мнимых собственных значений матрицы $B^{[s,s]}$ с простыми элементарными делителями.

Предположим, что имеет место критический резонансный случай, когда среди собственных чисел матрицы $B^{[s,s]}$ имеется пара чисто мнимых кратности два с непростыми элементарными делителями, такая, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \beta_1 \in \mathrm{Mod}(\varphi), \quad \alpha_q \ne 0 \quad (q = 3, \ldots, k'). \tag{6}$$

Положим $G(t) = S_2^{-1}(t)(J_{B^{[s,s]}}S_2(t) - \dot{S}_2(t))$, $S(t) = S_2^{-1}(t)S_1^{-1}$, где $S_2(t) = \mathrm{diag}[e^{i\beta_1 t}, e^{i\beta_1 t}, e^{-i\beta_1 t}, e^{-i\beta_1 t}, 1, \ldots, 1]$, $\dot{S}_2(t)$ – производная матрицы $S_2(t)$, а матрица S_1 приводит матрицу $B^{[s,s]}$ к жордановой нормальной форме, т. е.

$$S_1^{-1}B^{[s,s]}S_1 = J_{B^{[s,s]}} = \mathrm{diag}[J_1, J_2, J_3, \ldots, J_{k'}] = \mathrm{diag}[J_1, J_2, J],$$
$$J_1 = \begin{pmatrix} i\beta_1 & 1 \\ 0 & i\beta_1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -i\beta_1 & 1 \\ 0 & -i\beta_1 \end{pmatrix},$$

где J – жорданова форма, отвечающая остальным собственным значениям матрицы $B^{[s,s]}$. Обозначим через $g_{(j)}(t)$ j-ю строку матрицы $g(t) = S(t)\psi^{[s]}(t)$, а через $S_{(j)}(t)$ j-ю строку матрицы $S(t)$.

Т е о р е м а. *Пусть в системе (1) матрица коэффициентов* $A(t)$ *и вынуждающая сила* $\varphi(t)$ *– почти периодические с тривиальным пересечением их частотных модулей и для редуцированной системы (4) имеет место критический резонансный случай (6). Тогда:*

1) Если система (1) имеет почти периодическое нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$ *решение* $x(t)$, *то это решение является нерегулярным вынужденным, т. е.* $\mathrm{Mod}(x) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$;

2) Для того, чтобы система (1) имела нерегулярное вынужденное почти периодическое решение необходимо и достаточно выполнения условия (3) и оценки

$$\sup_t \Big|\int_0^t S_{(2)}(\tau)\psi^{[s]}(\tau)d\tau\Big| < \infty, \quad \sup_t \Big|\int_0^t \Big(\int_0^\tau S_{(2)}(\sigma)\psi^{[s]}(\sigma)d\sigma + S_{(1)}\psi^{[s]}(\tau)\Big)d\tau\Big| < \infty, \tag{7}$$

а для почти периодического решения $y^{[s]}(t)$ *первой системы (4) в случае (6) имело место тождество (5).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем первое утверждение. Если система (1) имеет почти периодическое нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$ решение $x(t)$, то согласно лемме $x(t) = Q_{A*}\,\mathrm{col}(y^{[s]}(t), 0, \ldots, 0)$, где $y^{[s]}(t)$ удовлетворяет первой системе из (4), при этом $y^{[s]}(t) = y_0^{[s]}(t) + \tilde{y}^{[s]}(t)$, где $y_0^{[s]}(t)$ – почти периодическое решение соответствующей однородной системы; $\tilde{y}^{[s]}(t)$ – частное почти периодическое решение неоднородной системы. Так как соответствующая первой системе из (4) однородная система стационарна и ее матрица коэффициентов имеет собственные числа $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_2=\beta_1\in\mathrm{Mod}(\varphi)$, $\alpha_q\neq 0$ $(q=3,\dots,s)$, то $\mathrm{Mod}(y_0^{[s]})\subseteq\mathrm{Mod}(\varphi)$. Пусть $M_{B[s,s]}\{\beta_1\}$ – модуль, образованный числом β_1. Тогда $\mathrm{Mod}(\tilde{y}^{[s]})\subseteq(\mathrm{Mod}(\varphi)+M_{B[s,s]}\{\beta_1\})$, откуда в силу (6) следует, что $\mathrm{Mod}(\tilde{y}^{[s]})\subseteq\mathrm{Mod}(\varphi)$. Следовательно, $\mathrm{Mod}(x)\subseteq\mathrm{Mod}(\varphi)$, т. е. решение $x(t)$ является нерегулярным вынужденным.

Докажем необходимость второго утверждения. Пусть $x(t)$ – почти периодическое нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$ решение системы (1). Тогда на основании леммы столбцовый ранг матрицы $A_*(t)$ удовлетворяет неравенству (3) и система (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t)=[Q_{A*}^{-1}]_{s,n}x(t)$ с таким же свойством частот, что и $x(t)$, где $[Q_{A*}^{-1}]_{s,n}$ – $s\times n$-матрица, составленная из первых s строк невырожденной матрицы Q_{A*}^{-1}.

Выполним в первой системе из (4) замену переменных $y^{[s]}=S_1z^{[s]}$. Тогда получим систему

$$\frac{dz^{[s]}}{dt}=J_{B[s,s]}z^{[s]}+S_1^{-1}\psi^{[s]}(t), \tag{8}$$

которая имеет почти периодическое решение $z^{[s]}(t)=S_1^{-1}y^{[s]}(t)$. Далее замена $z^{[s]}=S_2(t)u^{[s]}$ приводит систему (8) к системе

$$\frac{du^{[s]}}{dt}=S_2^{-1}(t)(J_{B[s,s]}S_2(t)-\dot{S}_2(t))u^{[s]}+S_2^{-1}(t)S_1^{-1}\psi^{[s]}(t)=G(t)u^{[s]}+S(t)\psi^{[s]}(t)=G(t)u^{[s]}+g(t), \tag{9}$$

где $G(t)=\mathrm{diag}[G_0,G_0,J]$, $G_0=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, с почти периодическим решением $u^{[s]}(t)=S_2^{-1}(t)z^{[s]}(t)=S_2^{-1}(t)S_1^{-1}y^{[s]}(t)=S(t)[Q_{A*}^{-1}]_{s,n}x(t)$. Выпишем систему (9) более подробно:

$$\begin{gathered}\frac{du_1{}^{[s]}}{dt}=u_2{}^{[s]}+g_1(t)=u_2{}^{[s]}+S_{(1)}(t)\psi^{[s]}(t),\quad \frac{du_2{}^{[s]}}{dt}=g_2(t)=S_{(2)}(t)\psi^{[s]}(t),\\ \frac{du_3{}^{[s]}}{dt}=u_4{}^{[s]}+g_3(t)=u_4{}^{[s]}+S_{(3)}(t)\psi^{[s]}(t),\quad \frac{du_4{}^{[s]}}{dt}=g_4(t)=S_{(4)}(t)\psi^{[s]}(t),\\ \frac{d\tilde{u}^{[s]}}{dt}=J\tilde{u}^{[s]}+\tilde{g}(t),\end{gathered} \tag{10}$$

где $u^{[s]}=\mathrm{col}\,(u_1^{[s]},u_2^{[s]},u_3^{[s]},u_4^{[s]},\tilde{u}^{[s]})$, $g^{[s]}=\mathrm{col}\,(g_1,g_2,g_3,g_4,\tilde{g}^{[s]})$.

Покажем, что первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты решения $u^{[s]}$ системы (10) попарно сопряжены, т. е. $u_4^{[s]}=\overline{u_2^{[s]}}$, $u_3^{[s]}=\overline{u_1^{[s]}}$. Для этого рассмотрим однородную систему

$$\frac{dz^{[s]}}{dt}=J_{B[s,s]}z^{[s]}.$$

Матрица коэффициентов $J_{B[s,s]}$ этой системы имеет жорданову форму. Из [7, с. 324] следует, что первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты решения $z^{[s]}$ последней системы попарно сопряжены, т. е. $z_4^{[s]}=\overline{z_2^{[s]}}$, $z_3^{[s]}=\overline{z_1^{[s]}}$. Замена $z^{[s]}=S_2(t)u^{[s]}$ переводит матрицу $J_{B[s,s]}$ в матрицу $G(t)$, которая отличается от $J_{B[s,s]}$ лишь нулевой главной диагональю. Следовательно, сопряжение будет иметь место и для соответствующих компонент решения $\tilde{u}^{[s]}$ системы

$$\frac{du^{[s]}}{dt}=G(t)u^{[s]},$$

т. е. $u_{04}^{[s]}=\overline{u_{02}^{[s]}}$, $u_{03}^{[s]}=\overline{u_{01}^{[s]}}$. Чтобы найти эти компоненты решения запишем последнюю систему более подробно:

$$\frac{du_{01}{}^{[s]}}{dt}=u_{02}{}^{[s]},\quad \frac{du_{02}{}^{[s]}}{dt}=0,\quad \frac{du_{03}{}^{[s]}}{dt}=u_{04}{}^{[s]},\quad \frac{du_{04}{}^{[s]}}{dt}=0,\quad \frac{d\tilde{u}_0{}^{[s]}}{dt}=J\tilde{u}_0{}^{[s]},$$

где $u_0^{[s]}=\mathrm{col}\,(u_{01}^{[s]},u_{02}^{[s]},u_{03}^{[s]},u_{04}^{[s]},\tilde{u}_0{}^{[s]})$. Первые четыре компоненты общего решения этой системы с учетом сопряженности имеют вид $\mathrm{col}\,(c_1t+c_2,c_1,\overline{c_1t+c_2},\overline{c_1})$. Находим методом вариации произвольных постоянных первые четыре компоненты частного решения системы (9), которые также являются попарно сопряженными:

$$\mathrm{col}(t\int g_2(t)dt+\int(g_1(t)-tg_2(t))dt, \int g_2(t)dt,\ t\int g_4(t)dt+\int(g_3(t)-tg_4(t))dt, \int g_4(t)dt).$$

Из их сопряженности вытекает, что $g_3(t)=\overline{g_1(t)},\quad g_4(t)=\overline{g_2(t)}$. Из сопряженности компонент общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы следует попарная сопряженность первых четырех компонент систем (9) и (10), т. е. $u_4^{[s]}=\overline{u_2^{[s]}},\quad u_3^{[s]}=\overline{u_1^{[s]}}$.

Итак, почти периодические решения первых четырех уравнений системы (10) являются попарно сопряженными и имеют вид

$$u_2{}^{[s]}(t)=\int\limits_0^t S_{(2)}(\tau)\psi^{[s]}(\tau)d\tau,\quad u_1{}^{[s]}(t)=\int\limits_0^t(\int\limits_0^\tau S_{(2)}(\sigma)\psi^{[s]}(\sigma)d\sigma+S_{(1)}(\tau)\psi^{[s]}(\tau))d\tau),$$
$$u_4{}^{[s]}(t)=\int\limits_0^t S_{(4)}(\tau)\psi^{[s]}(\tau)d\tau,\quad u_3{}^{[s]}(t)=\int\limits_0^t(\int\limits_0^\tau S_{(4)}(\sigma)\psi^{[s]}(\sigma)d\sigma+S_{(3)}(\tau)\psi^{[s]}(\tau))d\tau).$$

Поэтому согласно [1, с. 79] интегралы, стоящие в правых частях последних равенств, будут ограничены, т. е. выполняются условия (7).

Докажем достаточность второго утверждения. Пусть условия теоремы выполнены. В силу (3) существует линейное преобразование, приводящее (2) к системе (4), где $y_{s+1}=\ldots=y_n=0$. Отметим, что матрица $B^{[s,s]}$ имеет собственные числа (6) по предположению.

Невырожденная замена переменных $y^{[s]}=S(t)u^{[s]}$ приводит первую систему из (4) к системе (10). Согласно [1, с. 79] при выполнении условий (7) первые четыре уравнения из (10) имеют почти периодические решения $u_j{}^{[s]}(t),\quad j=\overline{1,4}$. Так как вещественные части собственных чисел матрицы J ненулевые, то в силу [1, с. 76] последняя система в (10) имеет единственное почти периодическое решение $\tilde{u}^{[s]}(t)$. Тогда вектор $y^{[s]}(t)=S(t)\mathrm{col}\,(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t),\tilde{u}^{[s]}(t))$ будет удовлетворять первой системе из (4). С учетом тождества (5) $y(t)=\mathrm{col}\,(y^{[s]}(t),0,\ldots,0)$ – почти периодическое решение системы (4). Поэтому согласно лемме $x(t)=Q_{A*}y(t)$ является решением системы (1), причем в силу первого утверждения $x(t)$ будет нерегулярным вынужденным.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Условие (7) теоремы содержит интеграл от интеграла. Если пара собственных чисел с непростым делителем будет иметь кратность 3 и более, то условия существования нерегулярного вынужденного почти периодического решения будут аналогичны условиям доказанной выше теоремы с той лишь разницей, что в условии (7) появится интеграл с подынтегральной функцией, которая является интегралом от интеграла и т. д. Таким образом, с возрастанием кратности будет усложняться условие (7).*

В качестве примера возьмем линейную квазипериодическую дифференциальную систему

$$\begin{gathered}\dot{x}_1=-x_1+x_4+x_5,\quad \dot{x}_2=s(t)x_1+(1+s(t))(x_2-x_4),\\ \dot{x}_3=c(t)(x_1+x_2-x_4)+x_5+\cos t,\quad \dot{x}_4=-2x_1+x_4+x_5,\\ \dot{x}_5=-c(t)(x_1+x_2+x_4)-x_3+\sin t,\ s(t)\equiv\sin\sqrt{5}t,\ c(t)\equiv\cos\sqrt{5}t,\end{gathered}\tag{11}$$

в которой пересечения модулей частот коэффициентов и вынуждающей силы тривиально. С помощью теоремы находим нерегулярное периодическое решение системы (11)

$$x=\mathrm{col}\,(a\sin t-b\cos t,\ a\cos t+b\sin t,\ \sin t,\ (a+b)\sin t+(a-b)\cos t,0),\ x\in\mathbb{R}^5,$$

где a, b – произвольные вещественные постоянные. Поскольку частота этого решения совпадает с частотой вынуждающей силы и несоизмерима с частотой коэффициентов системы (11), то оно является нерегулярным вынужденным.

З а м е ч а н и е 2. *Если взять более высокую размерность, то подобным образом можно привести пример системы с нерегулярным квазипериодическим (почти периодическим) решением.*

Список использованных источников

1. Fink, A. M. Almost Periodic Differential Equations / A. M. Fink. – Berlin: Springer, 1974. – 336 p. doi.org/10.1007/bfb0070324

2. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.

3. Demenchuk, A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems / A. K. Demenchuk // Math. Bohemica. – 2001. – Vol. 126, N 1. – P. 221–228.

4. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление / А. К. Деменчук. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012. – 186 p.

5. Деменчук, А. К. О частично нерегулярных почти периодических решениях линейных дифференциальных систем в некритическом случае / А. К. Деменчук // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 11–16.

6. Белокурский, М. С. Нерегулярные решения линейных почти периодических дифференциальных систем в резонансном случае / М. С. Белокурский // Тр. Ин-та математики. – 2013. – Т. 21, № 2. – С. 12–18.

7. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1982. – 331 с.

References

1. Fink A. M. *Almost Periodic Differential Equations*. Berlin, Springer, 1974. 336 p. doi.org/10.1007/bfb0070324

2. Kurtsveil' Ya., Veivoda O. On the periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370.

3. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Mathematica Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.

4. Demenchuk A. K. *Asynchronous fluctuations in differential systems. The conditions of existence and control.* Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012. 186 p. (in Russian).

5. Demenchuk A. K. On the existence of almost periodic solutions of linear differential systems in noncritical case. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2003, no. 3, pp. 11–16 (in Russian).

6. Belokurskii M. S. Irregular solutions of linear almost periodic differential systems in resonant case. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 12–18 (in Russian).

7. Pontryagin L. S. *Ordinary differential equations*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 331 p. (in Russian).

Информация об авторе

Белокурский Максим Сергеевич – старший преподаватель. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: drakonsm@ya.ru.

Information about the author

Belokursky Maksim Sergeevich – Senior Lecturer. Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: drakonsm@ya.ru.