ISSN 1561-8323 (print)
УДК 519.2

Поступило в редакцию 29.06.2017
Received 29.06.2017

**А. Ю. Харин**

*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ

*(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)*

**Аннотация.** В работе исследуются последовательные статистические тесты проверки простых гипотез о значениях параметров распределений вероятностей независимых наблюдений, а также наблюдений, образующих цепь Маркова. Предложены методы анализа характеристик эффективности (вероятностей ошибок первого и второго рода, а также среднего числа наблюдений) последовательных статистических тестов, основанные на приближении тестовой статистики и использующие теорию поглощающих цепей Маркова. Предложенные методы позволяют вычислять характеристики эффективности последовательных статистических тестов не только для гипотетической модели данных, но и при отклонениях от этой модели, что может быть использовано при анализе робастности последовательных тестов.

**Ключевые слова:** последовательный тест, вероятность ошибки, среднее число наблюдений, цепь Маркова

**Для цитирования:** Харин, А. Ю. Методы анализа эффективности последовательных статистических тестов / А. Ю. Харин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 5. – С. 22–27.

**Alexey Yu. Kharin**

*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

## METHODS FOR PERFORMANCE ANALYSIS OF SEQUENTIAL STATISTICAL TESTS

*(Communicated by Corresponding Member Leonid A. Yanovich)*

**Abstract.** Sequential statistical tests for simple hypotheses on parameters of probability distributions of independent observations, as well as of Markov chains are considered in the article. Methods for analysis of performance characteristics (I and II type error probabilities, conditional expected sample sizes) of sequential statistical tests are constructed both on the basis of the approximations of test statistics and on the basis of absorbing Markov chain theory. The proposed methods allow assessing the performance characteristics of sequential statistical tests not only for the hypothetical model of data, but also under deviations from this model, which can be used for robustness analysis of sequential tests.

**Keywords:** sequential test, error probability, expected number of observations, Markov chain

**For citation:** Kharin A. Yu. Methods for performance analysis of sequential statistical tests. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 22–27 (in Russian).

**Введение.** Предложенные А. Вальдом [1] статистические тесты (решающие правила) активно используются при решении задач математической статистики, связанных со статистической проверкой гипотез о значениях параметров вероятностных моделей наблюдаемых данных [2]. Такой способ анализа данных, когда число наблюдений, обеспечивающих заданную точность принятия решений, заранее не фиксировано, зависит от самих наблюдений и является случайной величиной, позволяет в среднем экономить число проводимых наблюдений [3]. Аналитическое вычисление характеристик эффективности последовательных тестов (вероятностей ошибок первого и второго рода, средней длительности наблюдений) является сложной проблемой даже для простейших моделей наблюдений [4]. Кроме того, на практике анализируемые данные часто отклоняются от сделанных модельных предположений [5]: появляются выбросы, ошибки спецификации гипотетических значений параметров, неоднородности, стохастические зависимости и другие искажения [6]. В таких ситуациях необходимо строить так называемые робастные [3] статистические решающие правила, слабо чувствительные к малым искажениям модели, и актуальна задача вычисления характеристик эффективности последовательных статистических тестов в таком виде, который позволял бы проводить анализ их робастности при появлении искажений. В данном сообщении предложены методы анализа характеристик эффективности и робастности последовательных статистических тестов для независимых наблюдений и наблюдений с марковской зависимостью.

**Модель независимых дискретных наблюдений.** Обозначим через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ множества натуральных, целых, неотрицательных целых, рациональных и действительных чисел соответственно. Пусть на измеримом пространстве ($\Omega$, $F$) наблюдаются случайные величины $x_t \in U = \{u_1, \ldots, u_M\}$, $t \in \mathbb{N}$, независимые в совокупности и одинаково распределенные. Распределение вероятностей каждой случайной величины дискретно, зависит от параметра $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_0 \neq \theta_1$, и имеет вид

$$P(u; \theta) = P_\theta\{x_t = u\} = a^{-J(u;\theta)}, \ t \in \mathbb{N}, \ u \in U, \quad (1)$$

где $a \in \mathbb{Q}$; $a > 1$; $J(u;\theta): U \times \Theta \to \mathbb{Z}_+$ – функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\sum_{u \in U} a^{-J(u;\theta)} = 1. \quad (2)$$

Относительно значения параметра $\theta$ распределения вероятностей (1) имеются две простые гипотезы:

$$H_0 : \theta = \theta_0, \ H_1 : \theta = \theta_1. \quad (3)$$

В приложениях такая модель используется в задачах, когда требуется идентификация одной из двух альтернативных ситуаций.

Обозначим статистику

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t, \quad (4)$$

где $\lambda_t = \lambda(x_t) = \log_a(P(x_t;\theta_1) / P(x_t;\theta_0)) = J(x_t;\theta_0) - J(x_t;\theta_1) \in \mathbb{Z}$ – логарифмическое отношение правдоподобия, вычисленное по наблюдению $x_t$. В силу независимости $x_t$ из (4) следует, что $\Lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, является однородной цепью Маркова с дискретным временем [7].

В последовательном тесте Вальда [1] при проверке гипотез (3) после $n$ наблюдений ($n = 1, 2, \ldots$) принимается решение

$$d_\lambda = d_\lambda(n) = \mathbf{1}_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot \mathbf{1}_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \quad (5)$$

где $\mathbf{1}_D(\cdot)$ означает индикаторную функцию множества $D$. Значения $d_\lambda = 0$ и $d_\lambda = 1$ соответствуют прекращению процесса наблюдения и принятию гипотезы $H_0$ (при $d_\lambda = 0$) или $H_1$ (при $d_\lambda = 1$) после $n$ наблюдений; при $d_\lambda = 2$ следует сделать ($n$ + 1)-е наблюдение. В (5) $C_-, C_+ \in \mathbb{Z}$, $C_- < C_+$ – параметры теста, называемые порогами, которые в [1] рекомендуется выбирать следующим образом:

$$C_- = [\log_a(\beta_0 / (1 - \alpha_0))], \ C_+ = [\log_a((1 - \beta_0) / \alpha_0)], \quad (6)$$

где $\alpha_0, \beta_0$ – «требуемые» вероятности ошибок первого и второго рода соответственно; $[\cdot]$ – целая часть числа.

Как известно [8], при использовании порогов (6) фактические значения вероятностей ошибок первого и второго рода могут существенно отличаться от задаваемых величин $\alpha_0, \beta_0$. Поэтому задача вычисления вероятностных характеристик последовательного теста (5), (6) является актуальной.

Примем обозначения: $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера; $\mathbf{I}_k$ – единичная матрица порядка $k$; $\mathbf{0}_{m \times n}$ – $(m \times n)$-матрица, все элементы которой равны 0; $\mathbf{1}(\cdot)$ – функция единичного скачка; $\mathbf{1}_k$ – $k$-вектор-столбец, все компоненты которого равны 1. Пусть $t^{(k)}$ – математическое ожидание длительности теста (объема выборки) при условии, что справедлива гипотеза $H_k$, $k \in \{0, 1\}$; $\alpha, \beta$ – фактические вероятности ошибок первого и второго рода для теста (5); $N = C_+ - C_-$; $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \vdots & \mathbf{0}_{2 \times N} \\ --- & \vdots & --- \\ R^{(k)} & \vdots & Q^{(k)} \end{pmatrix}$ – $(N+2) \times (N+2)$-матрица, в которой блоки $R^{(k)}, Q^{(k)}$ определены соотношениями

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{u\in U} \delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),j-i} P(u;\theta_k), \ \ i,j\in(C_-,C_+), \\ \sum_{u\in U} \mathbf{1}(C_- - i + J(u;\theta_1) - J(u;\theta_0)) P(u;\theta_k), \ \ i\in(C_-,C_+), \ j = C_-, \\ \sum_{u\in U} \mathbf{1}(J(u;\theta_0) - J(u;\theta_1) + i - C_+) P(u;\theta_k), \ \ i\in(C_-,C_+), \ j = C_+; \end{cases}$$

$$\pi^{(k)} = (\pi_i^{(k)}), \ \pi_i^{(k)} = \sum_{u\in U} \delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),i} P(u;\theta_k), \ i\in\{C_- + 1,\ldots,C_+ - 1\};$$

$$\pi_{C_+}^{(k)} = \sum_{i\ge C_+}\sum_{u\in U} \delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),i} P(u;\theta_k), \ \pi_{C_-}^{(k)} = \sum_{i\le C_-}\sum_{u\in U} \delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),i} P(u;\theta_k);$$

$$S^{(k)} = \mathbf{I}_N - Q^{(k)}, \ B^{(k)} = (S^{(k)})^{-1} R^{(k)}; \ W_{(i)} - i\text{-й столбец матрицы } W.$$

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия (1)–(3), справедлива гипотеза* $H_k$, *и* $|S^{(k)}| \ne 0$, $k\in\{0,1\}$, *то для характеристик эффективности теста (4), (5) справедливы следующие выражения:*

$$t^{(k)} = (\pi^{(k)})'(S^{(k)})^{-1}\mathbf{1}_N + 1, \ \alpha = (\pi^{(0)})' B_{(2)}^{(0)} + \pi_{C_+}^{(0)}, \ \beta = (\pi^{(1)})' B_{(1)}^{(1)} + \pi_{C_-}^{(1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на теории конечных цепей Маркова с поглощающими состояниями [7]. Достаточно заметить, что последовательность

$$\zeta_n = C_- \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,\,C_-]}(\Lambda_n) + C_+ \cdot \mathbf{1}_{[C_+,\,+\infty)}(\Lambda_n) + \Lambda_n \cdot \mathbf{1}_{(C_-,\,C_+)}(\Lambda_n)$$

является однородной цепью Маркова с $N + 2$ состояниями, из которых два состояния ($C_-$ и $C_+$) являются поглощающими. ■

**Модель с произвольным распределением вероятностей независимых наблюдений.** Пусть $\overline{P}_\theta$, $\theta\in\Theta$, – фактическое распределение вероятностей каждого из независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots \in U \subseteq \mathbb{R}$, которое может не совпадать с модельным распределением $P_\theta$ из-за искажений, о которых указано во введении.

Последовательный статистический тест вида (4), (5), основанный на функции

$$\lambda(u) = \log\frac{p_{\theta_1}(u)}{p_{\theta_0}(u)}, \ u\in U, \tag{7}$$

обозначим $\delta_\lambda = (\tau_\lambda, d_\lambda)$, где $\tau_\lambda = \inf\{n : d_\lambda(n)\in\{0,1\}\}$ – случайный момент остановки теста. Пусть для этого теста

$$\alpha = \alpha(\delta_\lambda) = E_0\{\overline{P}_0\{d_\lambda = 1 \mid \tau_\lambda\}\}, \ \beta = \beta(\delta_\lambda) = E_1\{\overline{P}_1\{d_\lambda = 0 \mid \tau_\lambda\}\} \tag{8}$$

– фактические значения вероятностей ошибок I и II рода соответственно, где $p_{\theta_0}(u)$, $p_{\theta_1}(u)$ – плотности распределения вероятностей наблюдений по некоторой мере на $U$ при соответствующем значении параметра; $E_\theta\{\cdot\}$ – математическое ожидание по распределению $\overline{P}_\theta$;

$$t^{(k)} = t^{(k)}(\delta_\lambda) = E_k\{\tau_\lambda\}, \ k\in\{0,1\}, \tag{9}$$

– условное математическое ожидание случайного объема выборки $\tau_\lambda$ при верной гипотезе $H_k$.

Исследуем множество характеристик эффективности $\{\alpha(\delta_\lambda), \beta(\delta_\lambda), t_0(\delta_\lambda), t_1(\delta_\lambda)\}$ последовательного теста $\delta_\lambda$. В теореме 1 получены точные выражения для характеристик эффективности (8), (9) теста (4), (5) в частном случае, когда функция $\lambda(\cdot)$ имеет решетчатое множество значений и отсутствуют искажения ($\overline{P}_\theta \equiv P_\theta$). В общем случае для теста $\delta_\lambda$ примем обозначения ($k = 0,1$):

$$Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)}), \ q_{ij}^{(k)} = \overline{P}_k\{\lambda(x_1) = j - i\}, \ i,j\in\{C_- + 1,\ldots,C_+ - 1\};$$

$$R^{(k)} = (r_{ij}^{(k)}), \ i\in\{C_- + 1,\ldots,C_+ - 1\}, \ j = C_-, C_+,$$

$$r_{iC_-}^{(k)} = \overline{P}_k\{\lambda(x_1) \le C_- - i\}, \ r_{iC_+}^{(k)} = \overline{P}_k\{\lambda(x_1) \ge C_+ - i\};$$

$$\pi^{(k)} = (\pi_i^{(k)}), \ \pi_i^{(k)} = \overline{P}_k\{\lambda(x_1) = i\}, \ i\in\{C_- + 1,\ldots,C_+ - 1\},$$

$$\pi_{C_-}^{(k)} = \overline{P}_k\{\lambda(x_1) \le C_-\}, \ \pi_{C_+}^{(k)} = \overline{P}_k\{\lambda(x_1) \ge C_+\}.$$

Как следует из теории конечных цепей Маркова [7], условие невырожденности $|S^{(k)}| \neq 0$ эквивалентно конечности теста: $\overline{P}_\theta\{\tau_\lambda < \infty\} = 1,\ \theta \in \Theta$. Известно [3], что это условие выполнено в случае независимых одинаково распределенных наблюдений, за исключением вырожденного случая, когда $\overline{P}_\theta\{\lambda(x_1) = 0\} = 1$, означающего, что значения параметров $\theta_0, \theta_1$ $\overline{P}_\theta$-неразличимы.

Пусть $\underline{\lambda}(x), \overline{\lambda}(x) : U \to \mathbb{R}$ – некоторые функции, $\delta_{\underline{\lambda}}, \delta_{\overline{\lambda}}$ – последовательные тесты вида (4), (5), основанные на этих функциях, $\underline{\Lambda}_n = \sum_{t=1}^n \underline{\lambda}(x_t),\ \overline{\Lambda}_n = \sum_{t=1}^n \overline{\lambda}(x_t)$. Определим марковские моменты:

$$s_0 = \inf\{n : \Lambda_n \le C_-\},\ s_1 = \inf\{n : \Lambda_n \ge C_+\};$$
$$\underline{s}_0 = \inf\{n : \underline{\Lambda}_n \le C_-\},\ \underline{s}_1 = \inf\{n : \underline{\Lambda}_n \ge C_+\};$$
$$\overline{s}_0 = \inf\{n : \overline{\Lambda}_n \le C_-\},\ \overline{s}_1 = \inf\{n : \overline{\Lambda}_n \ge C_+\}.$$

Обозначим: $\overline{\alpha} = \alpha(\delta_{\overline{\lambda}}), \overline{\beta} = \beta(\delta_{\overline{\lambda}}), \underline{\alpha} = \alpha(\delta_{\underline{\lambda}}), \underline{\beta} = \beta(\delta_{\underline{\lambda}}); Y = \{x \in U : \lambda(x) \in (C_- - C_+, C_+ - C_-)\}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть для последовательного статистического теста (4), (7), (5) функции* $\underline{\lambda}(\cdot), \overline{\lambda}(\cdot)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\underline{\lambda}(x) \le \lambda(x) \le \overline{\lambda}(x),\ \ \forall x \in Y,$$

*и*

$$t^{(k)} < \infty,\ t^{(k)}(\delta_{\overline{\lambda}}) < \infty,\ t^{(k)}(\delta_{\underline{\lambda}}) < \infty,\ \ k = 0, 1.$$

*Тогда*

$$\underline{\alpha} \le \alpha \le \overline{\alpha},\ \ \overline{\beta} \le \beta \le \underline{\beta}; \tag{10}$$

*и если* $\overline{\alpha} - \underline{\alpha} \to 0, \underline{\beta} - \overline{\beta} \to 0,$ *то имеют место следующие асимптотические разложения:*

$$t_-^{(k)} \le t^{(k)} \le t_+^{(k)},\ \ k = 0, 1;\ \ t_\pm^{(k)} = T_\pm^{(k)} + o(1),$$

*где*

$$T_-^{(0)} = \overline{\alpha} E_0\{\overline{s}_1 \mid \overline{s}_1 < \overline{s}_0\} + (1 - \underline{\alpha}) E_0\{\underline{s}_0 \mid \underline{s}_0 < \underline{s}_1\},\ \ T_+^{(0)} = \underline{\alpha} E_0\{\underline{s}_1 \mid \underline{s}_1 < \underline{s}_0\} + (1 - \overline{\alpha}) E_0\{\overline{s}_0 \mid \overline{s}_0 < \overline{s}_1\};$$
$$T_+^{(1)} = \underline{\beta} E_1\{\underline{s}_0 \mid \underline{s}_0 < \underline{s}_1\} + (1 - \overline{\beta}) E_0\{\overline{s}_1 \mid \overline{s}_1 < \overline{s}_0\},\ \ T_+^{(1)} = \overline{\beta} E_1\{\overline{s}_0 \mid \overline{s}_0 < \overline{s}_1\} + (1 - \underline{\beta}) E_1\{\underline{s}_1 \mid \underline{s}_1 < \underline{s}_0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в анализе соотношений между введенными марковскими моментами и событиями, связанными с этими моментами. Используются также свойства математического ожидания. ■

Вопросы сходимости верхней и нижней границ в (10) рассмотрены в [9].

Результат теоремы 2 можно использовать в сочетании с результатом теоремы 1 не только для анализа эффективности последовательных тестов проверки параметрических гипотез, но и при анализе робастности (устойчивости теста к малым уклонениям фактической модели наблюдений от гипотетической) в случае «выбросов» в наблюдениях и ошибок спецификации гипотетических значений параметра.

**Модель наблюдений, образующих цепь Маркова.** Пусть наблюдается однородная цепь Маркова $x_1, x_2, \ldots,$ принимающая значения из конечного множества $V = \{0, 1, \ldots, M - 1\}$, $2 \le M < \infty$, с вектором вероятностей начальных состояний $\pi = (\pi_i)$, $i \in V$, и матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{ij})$, $i, j \in V$, соответственно:

$$P\{x_1 = i\} = \pi_i,\ \ P\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\} = p_{ij},\ \ i, j \in V.$$

Относительно значений параметров цепи Маркова имеются гипотезы

$$H_0 : \pi = \pi^{(0)}, P = P^{(0)},\ \ H_1 : \pi = \pi^{(1)}, P = P^{(1)},$$

где $\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)})$, $\pi^{(1)} = (\pi_i^{(1)})$ – заданные значения вектора начальных вероятностей, $P^{(0)} = (p_{ij}^{(0)}) \neq P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)})$ – заданные матрицы вероятностей одношаговых переходов для соответствующих гипотез.

Обозначим:

$$\lambda_1 = \log\frac{\pi_{x_1}^{(1)}}{\pi_{x_1}^{(0)}},\ \lambda_k = \log\frac{p_{x_{k-1},x_k}^{(1)}}{p_{x_{k-1},x_k}^{(0)}},\ k>1;\ \Lambda_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k,\ n\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Аналогично (5) построим последовательный тест проверки гипотез $H_0, H_1$, согласно которому при заданных порогах $C_-, C_+ \in \mathbb{R}$, $C_- < 0$, $C_+ > 0$, гипотеза $H_0$ принимается после $n$ наблюдений, если $\Lambda_n \le C_-$, гипотеза $H_1$ принимается, если $\Lambda_n \ge C_+$, иначе процедура проверки продолжается, то есть выполняется ($n$ + 1)-е наблюдение. Последовательность случайных векторов $(\Lambda_n, x_n)'$, $n\in\mathbb{N}$, является цепью Маркова. В самом деле, в силу определения $\Lambda_n$, $n\in\mathbb{N}$, а также в силу марковости $x_n$, $n\in\mathbb{N}$, условное распределение зависит лишь от ближайшей предыстории $(\Lambda_{n-1}, x_{n-1})'$:

$$P\{\Lambda_n, x_n \mid \Lambda_{n-1}, \Lambda_{n-2}, \ldots, \Lambda_1, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1\} = P\{\Lambda_n, x_n \mid \Lambda_{n-1}, x_{n-1}\}.$$

Пусть $\pi^{(0)}, P^{(0)}, \pi^{(1)}, P^{(1)}$ таковы, что существуют числа $a\in\mathbb{R}$, $m_i, m_{ij}\in\mathbb{Z}$, $i, j\in V$, такие что

$$\log\frac{\pi_i^{(1)}}{\pi_i^{(0)}} = m_i a,\ \log\frac{p_{ij}^{(1)}}{p_{ij}^{(0)}} = m_{ij} a.$$

Пусть для теста (4), (11), (5) пороги $C_-, C_+ \in \mathbb{Z}$, и введем следующие обозначения: $t^{(k)}$ – ожидаемая длина наблюдаемой последовательности до момента принятия одной из гипотез при условии, что справедлива гипотеза $H_k$, $k\in\{0,1\}$; $\alpha, \beta$ – вероятности ошибок первого и второго рода;

$$W^{(k)} = (w_{ij}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \vdots & \mathbf{0}_{2\times MN} \\ --- & \vdots & --- \\ R^{(k)} & \vdots & Q^{(k)} \end{pmatrix} -$$

$(MN+2)(MN+2)$-матрица, блоки $R^{(k)}, Q^{(k)}$ которой определены поэлементно следующими соотношениями $(s, t\in V)$:

$$w_{Mi+s\ Mj+t}^{(k)} = \delta_{m_{st}, j-i}\, p_{st}^{(k)}, i, j\in(C_-, C_+),$$

$$w_{Mi+s\ Mj+t}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{t\in V}\mathbf{1}(i+m_{st}-C_+),\ j = C_+, i\in(C_-, C_+), \\ \sum_{t\in V}\mathbf{1}(C_- - i - m_{st}),\ j = C_-, i\in(C_-, C_+); \end{cases} \tag{12}$$

$$S^{(k)} = \mathbf{I}_{MN} - Q^{(k)},\ B^{(k)} = (S^{(k)})^{-1}R^{(k)},\ k\in\{0,1\};$$

$$\omega^{(k)} = (\omega_i^{(k)}),\ i\in\{MC_- + 1, \ldots, MC_+ - 1\};$$

$$\omega_{Mi+s}^{(k)} = \delta_{m_s, i}\pi_s^{(k)}, i\in(C_-, C_+),\ s\in V, \tag{13}$$

$$\omega_{MC_-}^{(k)} = \sum_{s\in V}\mathbf{1}(C_- - m_s)\pi_s^{(k)},\ \omega_{MC_+}^{(k)} = \sum_{s\in V}\mathbf{1}(m_s - C_+)\pi_s^{(k)}. \tag{14}$$

Т е о р е м а 3. *Если имеет место сформулированная выше модель наблюдений, причем* $|S^{(k)}| \ne 0$, $k\in\{0,1\}$, *то для характеристик последовательного теста (4), (11), (5) справедливы следующие выражения:*

$$t^{(k)} = (\omega^{(k)})'(S^{(k)})^{-1}\mathbf{1}_{MN} + 1,\ \alpha = (\omega^{(0)})' B_{(2)}^{(0)} + \omega_{MC_+}^{(0)},\ \beta = (\omega^{(1)})' B_{(1)}^{(1)} + \omega_{MC_-}^{(1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в применении теории поглощающих цепей Маркова [7] к последовательности

$$\xi_n = MC_- \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, C_-]}\left(\frac{\Lambda_n}{a}\right) + MC_+ \cdot \mathbf{1}_{[C_+, +\infty)}\left(\frac{\Lambda_n}{a}\right) + \left(\frac{\Lambda_n}{a}M + x_n\right)\cdot \mathbf{1}_{(C_-, C_+)}\left(\frac{\Lambda_n}{a}\right),\ n\in\mathbb{N},$$

являющейся однородной цепью Маркова с $MN + 2$ состояниями, из них два состояния ($\xi_n = MC_-$ и $\xi_n = MC_+$) являются поглощающими. При этом матрица вероятностей одношаговых переходов задана (12), а вектор вероятностей начальных состояний – соотношениями (13), (14). ■

С помощью метода, аналогичного представленному в теореме 2 для случая независимых наблюдений, в случае наблюдений, образующих цепь Маркова, вычисляются характеристики эффективности последовательного теста, когда сделанные предположения о решетчатости распределения вероятностей приращений статистики $\Lambda_n$ не выполняются.

Теорема 3 может быть также использована для анализа робастности [10] последовательного статистического теста при отклонениях фактических значений параметров $(\pi, P)$ от гипотетических.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020».

**Acknowledgements.** The research is supported by the State Research Program «Convergence-2020».

## Список использованных источников

1. Wald, A. Sequential analysis / A. Wald. – New York: John Wiley and Sons, 1947. – 212 p.
2. Mukhopadhyay, N. Applied Sequential Methodologies / N. Mukhopadhyay, S. Datta, S. Chattopadhyay. – New York: Marcel Dekker, 2004. – 452 p.
3. Handbook of Sequential Analysis / ed. by B. Ghosh, P. K. Sen. – New York: Marcel Dekker, 1991. – 637 p.
4. Lai, T. Sequential analysis: Some classical problems and new challenges / T. Lai // Statistica Sinica. – 2001. – Vol. 11. – P. 303–408.
5. Huber, P. Robust Statistics / P. Huber, E. Ronchetti. – New York: Wiley, 2009. doi.org/10.1002/9780470434697
6. Kharin, A. Robustness analysis for Bayesian sequential testing of composite hypotheses under simultaneous distortion of priors and likelihoods / A. Kharin // Austrian Journal of Statistics. – 2011. – Vol. 40. – P. 65–73.
7. Kemeny, J. G. Finite Markov Chains / J. G. Kemeny, J. L. Snell. – New York: Springer, 1960. – 210 p.
8. Харин, А. Ю. Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез / А. Ю. Харин // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – № 1. – С. 92–96.
9. Харин, А. Ю. Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил / А. Ю. Харин. – Минск: БГУ, 2013. – 207 с.
10. Kharin, A. Y. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing / A. Y. Kharin // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2016. – Vol. 45(6). – P. 1663–1709.

## References

1. Wald A. *Sequential analysis*. New York, John Wiley and Sons, 1947. 212 p.
2. Mukhopadhyay N., Datta S., Chattopadhyay S. *Applied Sequential Methodologies*. New York, Marcel Dekker, 2004. 452 p.
3. Ghosh B., Sen P. K. (eds.) *Handbook of Sequential Analysis*. New York, Marcel Dekker, 1991. 637 p.
4. Lai T. Sequential analysis: Some classical problems and new challenges. *Statistica Sinica*, 2001, vol. 11, pp. 303–408.
5. Huber P., Ronchetti E. *Robust Statistics*. New York, Wiley, 2009. doi.org/10.1002/9780470434697
6. Kharin A. Robustness analysis for Bayesian sequential testing of composite hypotheses under simultaneous distortion of priors and likelihoods. *Austrian Journal of Statistics*, 2011, vol. 40, pp. 65–73.
7. Kemeny J. G., Snell J. L. *Finite Markov Chains.* New York, Springer, 1960. 210 p.
8. Kharin A. Y. An approach to performance analysis of the sequential probability ratio test for the simple hypotheses testing. *Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk = Proceedings of the Belarusian State University. Physics and Mathematics Sciences*, 2002, vol. 1, pp. 92–96 (in Russian).
9. Kharin A. Yu. *Robustness of Bayesian and sequential statistical decision rules*. Minsk, Belarusian State University, 2013. 207 p. (in Russian).
10. Kharin A. Y. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2016, vol. 45, no. 6, pp. 1663–1709.

## Информация об авторе

*Харин Алексей Юрьевич* – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: KharinAY@bsu.by.

## Information about the author

*Kharin Alexey Yur'evich* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: KharinAY@bsu.by.