ISSN 1561-8323 (print)
УДК 519.173

Поступило в редакцию 18.09.2017
Received 18.09.2017

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Аннотация. В данной работе доказывается гипотеза о спектральном радиусе неотрицательной матрицы, имеющей равномерное разбиение.

Ключевые слова: матрица смежности, спектральный радиус, равномерная матрица частных

Для цитирования: Бенедиктович, В. И. Спектральный радиус неотрицательной матрицы / В. И. Бенедиктович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 5. – С. 33–36.

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

SPECTRAL RADIUS OF A NONNEGATIVE MATRIX

(Communicated by Academician Ivan V. Gaishun)

Abstract. In this article we prove a conjecture about a spectral radius of a nonnegative matrix.

Keywords: adjacency matrix, spectral radius, equitable quotient matrix

For citation: Benediktovich V. I. Spectral radius of a nonnegative matrix. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 33–36 (in Russian).

Пусть M – вещественная квадратичная матрица порядка n и пусть $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ – множество ее собственных значений или спектр матрицы M. Очевидно, что если матрица M не является симметрической, то ее собственные значения, вообще говоря, могут быть комплексными числами. Мы будем предполагать, что имеет место следующее упорядочение модулей собственных значений: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. *Спектральный радиус* $\rho(M)$ матрицы M определяется как наибольший модуль ее собственных значений, т. е. при нашем упорядочении $\rho(M) = |\lambda_1|$. Матрица (или вектор) M называется *неотрицательной* (*неотрицательным*), если неотрицательны все ее (его) компоненты. При этом используется обозначение: $M \geq 0$.

Если матрица M является неотрицательной, то из теории Перрона–Фробениуса [1] следует, что спектральный радиус $\rho(M)$ является собственным значением матрицы M и, кроме того, существует неотрицательный собственный вектор $b \geq 0$, *соответствующий* собственному значению $\rho(M)$, т. е. справедливо равенство $Mb = \rho(M)b$. Пусть далее $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$ является *характеристическим многочленом* матрицы M.

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть M – вещественная квадратичная матрица порядка n, имеющая следующую блочную структуру:*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{t1} & \cdots & M_{tt} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где диагональные блоки M_{ii} являются квадратичными матрицами порядков n_i для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ и $n = n_1 + \ldots + n_t$. Для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ пусть b_{ij} обозначает среднюю сумму строк матрицы M_{ij}, т. е. b_{ij} равно сумме всех компонент в блочной матрице M_{ij}, деленной на число ее строк. Тогда квадратичная матрица $B(M) = (b_{ij})_{t \times t}$ порядка t называется матрицей частных матрицы M.

Если дополнительно для каждой пары i, j блочная матрица M_{ij} имеет постоянную сумму компонент строк, тогда матрица $B(M)$ называется *равномерной матрицей частных* матрицы *M*.

Недавно в [2] была доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1 [2]. *Пусть* $M = (m_{ij})_{n\times n}$ *является симметрической матрицей, которая имеет блочную структуру (1),* $B = B(M)$ *является ее матрицей частных и* $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_m$ *все собственные значения матрицы B. Тогда* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ *являются собственными значениями матрицы M тогда и только тогда, когда матрица B является равномерной матрицей частных матрицы M.*

Кроме того, анализируя значения спектральных радиусов матрицы смежности, матрицы Лапласа, беззнаковой матрицы Лапласа, матрицы расстояний, матрицы Лапласа расстояний и беззнаковой матрицы Лапласа расстояний полного многодольного графа, в той же статье [2] была выдвинута следующая гипотеза.

Г и п о т е з а. *Пусть M является неотрицательной матрицей, и* $B(M)$ *является равномерной матрицей частных M. Тогда наибольшее собственное значение матрицы* $B(M)$ *совпадает с наибольшим собственным значением матрицы M.*

Далее мы устанавливаем справедливость вышеуказанной гипотезы, что обобщает хорошо известное утверждение для матриц смежности неориентированных графов [3].

Т е о р е м а 2. *Пусть M является неотрицательной матрицей, а* $B(M)$ *– равномерной матрицей частных матрицы M. Тогда спектральный радиус матрицы* $B(M)$ *равен спектральному радиусу матрицы M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее для краткости обозначим через $B = B(M)$. По определению равномерной матрицы частных B для любых i, j, таких что $1 \le i, j \le t$ сумма всех компонент i-й строки матрицы M_{ij} равна b_{ij}. Это означает, что для любого k, такого что $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k \le n_1 + \ldots + n_i$ справедливо следующее равенство:

$$m_{k, n_1+\cdots+n_{j-1}+1} + \cdots + m_{k, n_1+\cdots+n_j} = b_{ij}.$$

Пусть $P_{n\times t}$ является характеристической матрицей размера $n \times t$ разбиения строк (и столбцов) матрицы M со столбцами, образованными характеристическими векторами блоков матрицы M. Другими словами, на ij-м месте матрицы P находится 1 или 0 в зависимости от того, содержится ли i-я строка матрицы M в блоках $M_{j1}, \ldots, M_{jt}$ или нет. Поэтому в силу структуры (1) матрицы M матрица P имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} n_1\left\{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right. & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & n_2\left\{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right. & \begin{matrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{matrix} & n_t\left\{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right. \end{pmatrix}.$$

Заметим, что столбцы матрицы P являются попарно ортогональными и, следовательно, они линейно независимы.

Кроме того, покажем, что справедливо следующее равенство:

$$MP = PB.$$

В самом деле, найдем элемент на kl-м месте произведения матриц MP для любых k, l, таких что $1 \le k \le n, 1 \le l \le t$. Пусть $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k \le n_1 + \ldots + n_i$, тогда по определению равномерной матрицы частных B

$$(MP)_{kl} = m_{k,n_1+\cdots+n_{l-1}+1} + \cdots + m_{k,n_1+\cdots+n_l} = b_{il}.$$

С правой стороны, по определению характеристической матрицы P на kl-м месте произведения матриц PB находится элемент $(PB)_{kl} = b_{il}$.

Пусть теперь θ является максимальным собственным значением матрицы B, которая также является неотрицательной, поскольку ее компонентами являются суммы неотрицательных компонент матрицы $M \ge 0$. Тогда по теории Перрона–Фробениуса существует неотрицательный собственный вектор $x \ge 0$, такой что

$$Bx = \theta x.$$

Следовательно, имеем цепочку равенств

$$M(Px) = P(Bx) = P(\theta x) = \theta(Px),$$

где $Px \ne 0$, так как столбцы матрицы P линейно независимы. Следовательно, θ является собственным значением матрицы M и, в частности, $\theta = \rho(B) \le \rho(M)$.

Пусть теперь $\theta = \rho(M) \ge 0$ является спектральным радиусом матрицы M. Поскольку $\chi_M(\lambda) = \chi_{M^T}(\lambda)$, где M^T – транспонированная с M матрица, то $\theta \ge 0$ является спектральным радиусом транспонированной матрицы $M^T \ge 0$. Это означает, что существует неотрицательный собственный вектор $y \ge 0$, такой что

$$M^T y = \theta y.$$

Тогда имеем

$$y^T M = \theta y^T,$$

откуда следует, что

$$(y^T P)B = (y^T M)P = \theta(y^T P),$$

где вектор $y^T P \ne 0$ в силу строения матрицы P и того, что $y \ge 0$. Положим $z^T = y^T P$, тогда последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$\theta z^T = z^T B = z^T (B^T)^T = (B^T z)^T.$$

Из которого получаем равенство

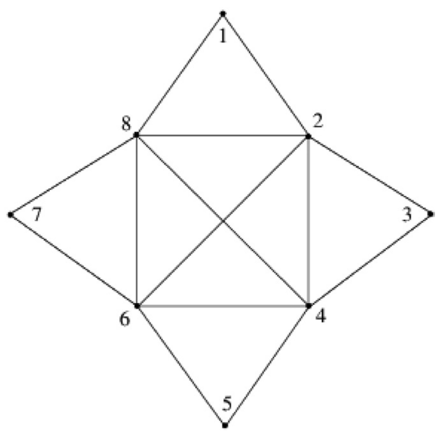
$$B^T z = \theta z,$$

что означает, что θ является собственным значением матрицы B^T. Но в силу равенства $\chi_B(\lambda) = \chi_{B^T}(\lambda)$, имеем, что θ является собственным значением матрицы B и, в частности, $\theta = \rho(M) \le \rho(B)$. Следовательно, окончательно мы имеем равенство $\rho(B) = \rho(M)$.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что для матрицы с отрицательными компонентами утверждение теоремы 2, вообще говоря, неверно. Рассмотрим пример из [4]. Матрица Лапласа $L = L(G)$, соответствующая графу на рисунке, имеет вид

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$



Граф G, чья матрица Лапласа имеет равномерное разбиение вершин $V(G) = V_1 \cup V_2$, где $V_1 = \{1; 3; 5; 7\}$ и $V_2 = \{2; 4; 6; 8\}$

The graph G, whose Laplace matrix has an equal partition of vertices $V(G) = V_1 \cup V_2$, where $V_1 = \{1; 3; 5; 7\}$ and $V_2 = \{2; 4; 6; 8\}$

Можно непосредственно проверить, что спектр этой матрицы равен

$$\sigma(L) = \{0;\ 4-\sqrt{6};\ 4-\sqrt{6};\ 2;\ 4;\ 6;\ 4+\sqrt{6};\ 4+\sqrt{6}\}$$

и, значит, $\rho(L(G)) = 4+\sqrt{6}$.

С другой стороны, равномерная матрица частных, соответствующая равномерному разбиению π множества вершин $V(G)$ на доли $V_1 = \{1; 3; 5; 7\}$, $V_2 = \{2; 4; 6; 8\}$, имеет вид

$$L_\pi = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что спектр этой равномерной матрицы частных равен $\sigma(L_\pi) = \{0; 4\}$ и, значит, спектральный радиус $\rho(L_\pi) = 4$, который меньше $\rho(L(G))$.

Благодарности. Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф16РА-003).

Acknowledgements. The work is sponsored by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the State Program of Fundamental Research "Convergence" and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant no. Ф16РА-003).

Список использованных источников

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

2. Spectrum of a class of matrices and its applications [Electronic resource] / L. You [et al.] – Mode of access: https://arxiv.org/abs/1612.00648.

3. Godsil, C. D. Algebraic graph theory / C. D. Godsil, G. F. Royle. – NY: Springer-Verlag, 2001. doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9

4. Barrett, W. Equitable Decompositions of Graphs with Symmetries / W. Barrett, A. Francis, B. Webb // Linear Algebra and its Applications. – 2017. – Vol. 513. – P. 409–434. doi.org/10.1016/j.laa.2016.10.017

References

1. Gantmakher F. R. *Matrix Theory*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 560 p.

2. You L., Yang M., Li J., Ren L. *Spectrum of a class of matrices and its applications*. Available at: https://arxiv.org/abs/1612.00648.

3. Godsil C. D., Royle G. F. *Algebraic graph theory*. NY, Springer-Verlag, 2001. doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9

4. Barrett W., Francis A., Webb B. Equitable Decompositions of Graphs with Symmetries. *Linear Algebra and its Applications,* 2017, vol. 513, pp. 409–434. doi.org/10.1016/j.laa.2016.10.017

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by.

Information about the author

Benediktovich Vladimir Ivanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by.