ISSN 1561-8323 (print)
УДК 512.554.32

Поступило в редакцию 24.07.2017
Received 24.07.2017

И. Д. Супруненко

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

БОЛЬШИЕ БЛОКИ ЖОРДАНА В ОБРАЗАХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕПРОСТОГО ПОРЯДКА В НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУПП

(Представлено академиком В. И. Янчевским)

Аннотация. Для специальных линейных и симплектических групп не слишком малых рангов относительно p над полем нечетной характеристики p и p-ограниченных неприводимых представлений общего вида получены нижние оценки числа блоков Жордана размерности $>p^s$ в образах унипотентных элементов порядка $p^{s+1} > p$ в таких представлениях; эти оценки зависят от ранга группы, характеристики и значения старшего веса представления на максимальном корне группы. Эти результаты нацелены на поиск «редких» классов унипотентных элементов, которые могут быть полезны для решения задач распознавания представлений и линейных групп.

Ключевые слова: унипотентные элементы, неприводимые представления, блоки Жордана

Для цитирования: Супруненко, И. Д. Большие блоки Жордана в образах унипотентных элементов непростого порядка в неприводимых представлениях специальной линейной и симплектической групп / И. Д. Супруненко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 14–19.

Irina D. Suprunenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

BIG JORDAN BLOCKS IN THE IMAGES OF UNIPOTENT ELEMENTS OF NONPRIME ORDER IN IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF SPECIAL LINEAR AND SYMPLECTIC GROUPS

(Communicated by Academician Vyacheslav I. Yanchevskii)

Abstract. For special linear and symplectic groups of not too small ranks with respect to p over a field of an odd characteristic p and p-restricted irreducible representations of a general form, lower estimates for the number of Jordan blocks of size $>p^s$ in the images of unipotent elements of order $p^{s+1} > p$ in such representations are obtained. These estimates depend upon the group rank, the characteristic and the value of the highest weight of the representation on the maximal root of the group. These results are aimed at searching "rare" classes of unipotent elements that can be useful for solving recognition problems for representations and linear groups.

Keywords: unipotent elements, irreducible representations, Jordan blocks

For citation: Suprunenko I. D. Big Jordan blocks in the images of unipotent elements of nonprime order in irreducible representations of special linear and symplectic groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 14–19 (in Russian).

Введение. Продолжается изучение поведения унипотентных элементов непростого порядка в неприводимых представлениях классических алгебраических групп над полем положительной характеристики. Для специальных линейных и симплектических групп не слишком малых рангов относительно p над полем нечетной характеристики p и p-ограниченных неприводимых представлений общего вида получены нижние оценки числа блоков Жордана размерности $>p^s$ в образах унипотентных элементов порядка $p^{s+1} > p$ в таких представлениях; эти оценки зависят от ранга группы, характеристики и значения старшего веса представления на максимальном корне группы. Эта работа является частью общей программы поиска «редких» классов унипотентных элементов, которые могут быть использованы для распознавания представлений и линейных групп. Оказывается, что унипотентные элементы непростого порядка с малым числом блоков Жордана, порядок которых равен порядку самого элемента, редко встречаются в образах неприводимых представлений указанных выше групп (здесь имеется в виду порядок блока Жордана как элемента полной линейной группы соответствующей степени).

Далее K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, ω_i, $1 \le i \le r$, – фундаментальные веса группы G, $\omega(\varphi)$ – старший вес неприводимого представления φ,

φ^* – представление, дуальное φ. Рассматриваются только конечномерные и рациональные представления и модули. Напомним, что рациональное неприводимое представление группы G со старшим весом $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$ называется p-ограниченным, если все $a_i < p$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $G = A_r(K)$, φ – *p-ограниченное неприводимое представление группы* G, $\omega = \omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, $x \in G$ – *элемент порядка* $p^{s+1} > p$, d – *максимальная размерность блока Жордана элемента* x^{p^s} *в стандартном представлении группы* G. *Положим* $a = \sum_{i=1}^{r} a_i$, $N = (r - d)^3 / 8p^{s+1}$,

$$\Omega = \{0, a\omega_1, a \le 4; \omega_i, 2 \le i \le 4; \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1 + \omega_r, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_3, \omega_1 + \omega_{r-1}, 2\omega_2\}.$$

i) При $\omega \notin \{0, \omega_1, \omega_r\}$ *элемент* $\varphi(x)$ *имеет* $\ge (r - d + 1) / p^{s+1}$ *блоков размерности* $>p^s$;

ii) Пусть $r - d \ge 7$. *Предположим, что веса* ω *и* $\omega(\varphi^*) \notin \Omega$. *Тогда элемент* $\varphi(x)$ *имеет* $>(a + 1)N$ *блоков размерности* $>p^s$. *Если* ω *или* $\omega(\varphi^*) \in \{4\omega_1, \omega_4, 2\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_3\}$, *то* $\varphi(x)$ *имеет* $>N$ *блоков размерности* $>p^s$.

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы 1 предположим, что* ω *и* $\omega(\varphi^*) \notin \Omega$ *и что* $\omega \ne \omega_5$, *если* $r = 9$ *или* 10 *и* $d = 2$. *Тогда* $\varphi(x)$ *имеет* $>(r - d)^2 / 8p$ *блоков размерности* $>p^s$.

З а м е ч а н и е 1. *В условиях теоремы 1 разность* $r - d$ *всегда* ≥ 7 *при* $r \ge 10$. *Эта теорема справедлива и при* $r = 9$, $p^s \in \{5, 7, 9\}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $G = C_r(K)$, φ – *p-ограниченное неприводимое представление группы* G, $\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, $x \in G$ – *элемент порядка* $p^{s+1} > p$, $y = x^{p^s}$. *Предположим, что* y *не является трансвекцией. Пусть* $l > 1$ *и* y *имеет не менее двух блоков Жордана размерности* l *в стандартном представлении группы* G. *Положим*

$$a = \sum_{i=1}^{r} a_i, \; N = (r - l)^3 / p^{s+1},$$

$\Omega = \{0; a\omega_1, a \le 4; \omega_i, 2 \le i \le 4; c\omega_1 + d\omega_2, 2 \le c + d \le 3; \omega_1 + \omega_3, 2\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_2, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + \omega_4, 2\omega_1 + \omega_4\}$.

i) При $\omega \notin \{0, \omega_1\}$ *элемент* $\varphi(x)$ *имеет* $\ge 2(r - l) / p^{s+1}$ *блоков размерности* $>p^s$;

ii) Пусть $r - l \ge 7$. *Предположим, что* $\omega(\varphi) \notin \Omega$. *Тогда элемент* $\varphi(x)$ *имеет* $>(a + 1)N$ *блоков размерности* $>p^s$. *Если* $\omega(\varphi) \in \{4\omega_1, \omega_4, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + \omega_4, 2\omega_1 + \omega_4\}$, *то* $\varphi(x)$ *имеет* $>N$ *блоков размерности* $>p^s$.

Поскольку y не является трансвекцией, нетрудно заметить, что в условиях теоремы 2 всегда существует число l с соответствующими свойствами.

С л е д с т в и е 2. *В условиях теоремы 2 предположим, что* $r \ge p^s + 4$ *и* $\omega \notin \Omega$. *Тогда* $\varphi(x)$ *имеет* $>(a + 1)(r - l)^2 / p$ *блоков размерности* $>p^s$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $G = C_r(K)$, φ – *p-ограниченное неприводимое представление группы* G, $\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, $x \in G$ – *элемент порядка* $p^{s+1} > p$, $y = x^{p^s}$. *Предположим, что* y – *трансвекция.*

Зададим a, *как в теореме 2. Положим* $N' = (r - 2)^3 / 8p^{s+1}$,

$$\Sigma = \{0; a\omega_1, a \le 4; \omega_2, \omega_3, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_3\}.$$

i) При $\omega \notin \{0, \omega_1\}$ *элемент* $\varphi(x)$ *имеет* $\ge (r - 1) / p^{s+1}$ *блоков размерности* $>p^s$;

ii) Пусть $r \ge 9$. *При* $\omega(\varphi) \notin \Sigma$ *элемент* $\varphi(x)$ *имеет* $>(a + 1)N'$ *блоков размерности* $>p^s$. *Если* $\omega(\varphi) \in \{4\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_3\}$, *то* $\varphi(x)$ *имеет* $>N'$ *блоков размерности* $>p^s$.

С л е д с т в и е 3. *В условиях теоремы 3 предположим, что* $r \ge p^s + 2$ *и* $\omega \notin \Sigma$. *Тогда* $\varphi(x)$ *имеет* $>(a + 1)(r - 2)^2 / 8p$ *блоков размерности* $>p^s$.

Следствия 1–3 позволяют получить оценки, более слабые, чем в теоремах 1–3 соответственно, но не зависящие от s. Заметим, что параметр a в теоремах 1–3 равен значению старшего веса рассматриваемого представления на максимальном корне группы.

Очевидно, что в стандартном и дуальном к нему представлениях многие элементы порядка p^{s+1} имеют лишь один блок размерности $>p^s$ и что наличие хотя бы одного такого блока в образе элемента этого порядка обязательно для любого нетривиального представления. В [1, теорема 1] для классических алгебраических групп всех типов установлено, что, как правило, таких блоков не менее двух; все исключения явно указаны. Так, при $G = A_r(K)$, $r = p^s$ и $\omega(\varphi) = \omega_2$ или $2\omega_1$ и при $G = C_r(K)$, $2r = p^s + 1$ и $\omega(\varphi) = \omega_2$ или $2\omega_1$ образ регулярного унипотентного элемента в представлении φ имеет единственный блок Жордана размерности $>p^s$. Поэтому при получении оценок теорем 1–3 неизбежен список исключений, содержащий некоторые нетривиальные представления, отличные от стандартного и дуального к нему. Поскольку в положительной характеристике далека от решения даже проблема размерностей неприводимых представлений простых алгебраических групп, нет оснований надеяться получить здесь асимптотически точные оценки, но получены нижние оценки, которые растут с ростом ранга группы и числа a при фиксированном порядке элемента.

Основная часть. Далее будем называть нетривиальными блоки Жордана размерности, большей 1. Ниже α_i, $1 \le i \le r$, – простые корни группы G, $\chi_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$ – корневые подгруппы и операторы из гипералгебры группы G, ассоциированные с корнями $\pm\alpha_i$, и целыми неотрицательными числами k, $G(i_1, \ldots, i_t) \subset G$ – подгруппа, порожденная подгруппами $\chi_{\pm i_1}, \ldots, \chi_{\pm i_t}$, $\langle\mu, \alpha\rangle$ – значение веса μ на корне α, $\omega(m)$ – вес весового вектора m из некоторого G-модуля. Предполагается, что веса и корни группы G определены относительно фиксированного максимального тора T.

В доказательствах теорем 1–3 существенно используются следующие факты.

Л е м м а 1. *Пусть $z \in GL_t(K)$ – элемент порядка $p^{s+1} > p$, имеющий ровно l блоков Жордана размерности $>p^s$. Тогда элемент z^{p^s} имеет не более lp^s нетривиальных блоков. Если размерность наибольшего блока элемента z равна $kp^s + b$, где $0 < b \le p^s$, то размерность наибольшего блока элемента z^{p^s} равна $k + 1$.*

Л е м м а 2 [1, лемма 2.5]. *Пусть u – унипотентное преобразование конечномерного векторного пространства V над K. Предположим, что u сохраняет подпространство $S \subset V$. Для $K\langle u\rangle$-модуля F и целого положительного l обозначим символом $n_l(F)$ число блоков Жордана размерности $\ge l$ при действии элемента u на F. Тогда $n_l(S)$ и $n_l(V / S) \le n_l(V)$.*

Л е м м а 3. *Пусть Γ_1 – простая, а Γ_2 – полупростая алгебраические группы над K, $x_i \in \Gamma_i$ – унипотентные элементы, $x_1 \ne 1$, φ_i – рациональные представления групп Γ_i, $i = 1, 2$, φ_1 нетривиально, $\varphi_2(x_2)$ имеет b блоков Жордана. Положим $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $x = x_1x_2$. Тогда образ элемента x в представлении $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ группы Γ имеет не менее b нетривиальных блоков Жордана.*

Т е о р е м а 4 [2; 3]. *Пусть $H = G(i_1, \ldots, i_j) \subset G$, M – неприводимый G-модуль, $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Тогда KHv – неприводимый H-модуль и прямое слагаемое H-модуля M.*

Л е м м а 4 [4, лемма 2.46]. *Пусть M – неразложимый G-модуль со старшим весом $\sum_{t=1}^{r} a_t\omega_t$, $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Предположим, что $a_j < p$, где $1 \le i, j \le r$. Положим $b_k = -\langle\alpha_{k+1}, \alpha_k\rangle$, $c_k = -\langle\alpha_{k-1}, \alpha_k\rangle$. Фиксируем целое число d с $0 \le d \le a_j$ и положим $d_j = d$. Определим вектор $v(i, j, d)$ следующим образом. При $i = j$ пусть $v(i, j, d) = X_{-i, d}\, v$. Если $i < j$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}b_k$ при $i \le k < j$. Если $i > j$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}c_k$ при $i \ge k > j$. В обоих случаях запишем $v(i, j, d) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-h,d_h} \ldots X_{-j,d}v$. Тогда вектор $v(i, j, d) \ne 0$ и является собственным для всех групп $\mathcal{X}_t$ с $t \ne i$.*

Из леммы 4 следует, что вектор $v(i, j, d)$ порождает неразложимый модуль для группы $G(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r)$ и является в нем вектором старшего веса.

Л е м м а 5. *Пусть M и v такие, как в лемме 4. Предположим, что $1 \le i < j < k \le r$, $a_i < p$ и $a_k < p$. Фиксируем целые числа b и c с $0 \le b \le a_i$ и $0 \le c \le a_k$ и положим $b_i = b$, $b_m = a_m + b_{m-1}$ при $i < m < j$, $b_j = b_{j-1} + \langle\omega(v(j+1, k, c)), \alpha_j\rangle$, $v(i, j, k, b, c) = X_{-j,b_j} \ldots X_{-(i+1),\, b_{i+1}} X_{-i,\, b_i} v(j+1, k, c)$ (здесь* *предполагается, что* $b_j = b_{j-1} + a_j + c$, *если* $k = j + 1$). *Тогда вектор* $v(i, j, k, b, c) \neq 0$ *и является собственным для всех групп* $\mathcal{X}_t$ *с* $t \neq j$.

Обозначения $v(i, j, d)$ и $v(i, j, k, b, c)$ используются ниже при обсуждении доказательств теорем 1–3.

Т е о р е м а 5.

1. Пусть $t \geq 7$, ρ – *неприводимое представление группы* $A_t(K)$ *и* $\omega(\rho) \notin \{0, p^j\omega_1, (p^i + p^j)\omega_1, p^j\omega_2, p^j\omega_{t-1}, p^j\omega_t, (p^i + p^j)\omega_t, p^i\omega_1 + p^j\omega_t\}$.

Тогда $\dim \rho > t^3 / 8$.

2. Пусть $t \geq 7$, ρ – *неприводимое представление группы* $C_t(K)$ *и* $\omega(\rho) \notin \{0, p^j\omega_1, (p^i + p^j)\omega_1, p^j\omega_2\}$.

Тогда $\dim \rho > t^3$.

Для p-ограниченных представлений теорема 5 доказана Любеком [5, теорема 5.1].

Л е м м а 6. *Пусть* $\Gamma = A_l(K)$ *или* $C_l(K)$, $l \geq 7$, ψ – *неприводимое представление группы* Γ *со старшим весом* ω, $D = l^3 / 8$ *при* $\Gamma = A_l(K)$ *и* l^3 *при* $\Gamma = C_l(K)$. *Тогда* $\dim \psi > 4D$ *при* $\omega = \omega_1 + \omega_3$; $\dim \psi > 5D$ *при* $\omega = a\omega_1$ *с* $3 < a < p$ *и при* $\omega = 2\omega_2$, $l > 7$ *или* $\Gamma = A_l(K)$; $\dim \psi > 4D$ *при* $\Gamma = C_7(K)$ *и* $\omega = 2\omega_2$ *и* $\dim \psi > 8D$ *при* $\omega = \omega_2 + \omega_3$.

Доказательство леммы 6 основано на оценках длин орбит весов соответствующих представлений относительно группы Вейля.

О схеме доказательств теорем 1–3. Объем сообщения не позволяет включить полные доказательства даже основных результатов, приведем их схему. Пусть элемент x и число a такие, как в утверждениях этих теорем. Положим $y = x^{p^s}$, $\omega = \omega(\varphi)$. При $G = A_r(K)$ пусть $\omega^* = \omega(\varphi^*)$. Заметим, что размерности блоков Жордана преобразований $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ совпадают. Доказательства основаны на получении соответствующих нижних оценок числа нетривиальных блоков Жордана элемента $\varphi(y)$ и использовании леммы 1. Используются общие подходы, но группы каждой серии приходится рассматривать отдельно из-за различий в строении систем корней. Заменив x сопряженным с ним элементом, можно считать, что y содержится в подсистемной подгруппе H с двумя простыми компонентами H_1 и H_2. При этом $y = y_1y_2$, где $y_j \in H_j$, y_1 – регулярный унипотентный элемент из H_1, $|y_2| \leq p$. Строение подгруппы H зависит от типа рассматриваемой группы, но во всех случаях $H = G(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r)$, где $1 < i < r$. Пусть M – модуль, где реализуется представление φ, $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Если $m \in M$ – весовой вектор, то ниже $\omega_H(m)$ – ограничение его веса на $T \cap H$; $n(U)$ – число нетривиальных блоков Жордана элемента y при действии на некотором H-модуле U. Естественно, можно предположить, что $\omega \neq 0$. Для фиксированного целого неотрицательного числа k обозначим символом U_k сумму всех весовых подпространств в M, веса которых имеют вид $\omega - k\alpha_i - \sum_{t \neq i} k_t\alpha_t$.

Легко видеть, что U_k – H-модуль и прямое слагаемое H-модуля M. В силу теоремы 4 U_0 – неприводимый H-модуль. Для оценки числа $n(M)$ выберем $a + 1$ подмодулей $M_t = U_{n_t}$, $0 \leq t \leq a$, с $n_t \neq n_q$ при $t \neq q$. Положим $n_0 = 0$. В каждом из модулей M_t выбирается определенный композиционный фактор N_t. Ясно, что $N_0 = M_0$ ввиду неприводимости модуля M_0. Так как $M = (\oplus_{t=0}^{a} M_t) \oplus M'$, то $n(M) \geq \sum_{t=0}^{a} n(M_t)$. Из леммы 2 следует, что $n(M) \geq \sum_{t=0}^{a} n(N_t)$. Опишем построение подгрупп H_i и модулей M_t и N_t во всех случаях. При $0 < t \leq a$ построим набор векторов $v_t \in M_t$.

1. Пусть $G = A_r(K)$, d такое, как в теореме 1. Положим $i = d$, $n_t = t$ при $0 \leq t \leq a$, $H_1 = G(1, \ldots, d-1)$, $H_2 = G(d+1, \ldots, r)$. Ясно, что $H_1 \cong A_{d-1}(K)$, $H_2 \cong A_{r-d}(K)$.

Пусть

$$A_1 = \sum_{j=d}^{r} a_j,\ \ A_2 = \sum_{j=1}^{d-1} a_j,\ \ S_1 = \{1, 2, ..., A_1\},\ \ S_2 = \{A_1 + 1, ..., a\}.$$

Ясно, что $S_1 = \varnothing$ при $A_1 = 0$ и $S_2 = \varnothing$ при $A_2 = 0$. Легко видеть, что M_t содержит единственный вектор вида $v(d, j, b)$ с $j \geq d$ при $t \in S_1$, M_t содержит единственный вектор вида $v(k, d, r, b, a_r)$ с $k < d$ при $A_2 \neq 0$ и $t \in S_2$ и M_t содержит единственный вектор вида $v(d, j, b)$ с $j < d$ при $A_1 = 0$ и $t \in S_2$.

В каждом из этих случаев обозначим однозначно определенный вектор соответствующего типа из M_t символом v_t. Из лемм 4 и 5 вытекает, что H-модуль M_t имеет композиционный фактор N_t со старшим весом $\omega_H(v_t)$.

2. Пусть $G = C_r(K)$, y не является трансвекцией и l такое, как в теореме 2. Положим $i = l$, $Q = \sum_{j=l}^{r-1} a_j$; $n_t = t$ при $1 \le t \le Q$; $n_t = t + b$ при $Q < t \le Q + a_r$, $t = Q + b$ и $n_t = t + a_r$ при $Q + a_r < t \le a$; $H_1 = G(1, \ldots, l-1)$ и $H_2 = G(l+1, \ldots, r)$. Тогда $H_1 \cong A_{l-1}(K)$, $H_2 \cong C_{r-l}(K)$. Зададим множества S_1 и S_2, векторы v_t и композиционные факторы N_t, как в пункте 1, заменив d на l и используя леммы 4 и 5.

3. Наконец, пусть $G = C_r(K)$ и y – трансвекция. Положим $i = r-1$, $H_1 = G(r)$, $H_2 = G(1, \ldots, r-2)$; $Q = \sum_{j=1}^{r-1} a_j$, $n_t = t$ при $1 \le t \le Q$ и $n_t = t + b$ при $Q < t \le Q + a_r$, $t = Q + b$. Тогда $H_1 \cong A_1(K) \cong C_1(K)$, $H_2 \cong A_{r-2}(K)$. Положим $S_1 = \{1, \ldots, Q\}$, $S_2 = \{Q+1, \ldots, a\}$. Легко видеть, что M_t содержит единственный вектор вида $v(r-1, j, b)$ с $j \le r-1$ при $t \in S_1$; M_t содержит единственный вектор вида $v(1, r-1, r, a_1, b)$ при $t \in S_2$, $Q \ne 0$ и M_t содержит единственный вектор вида $v(r-1, r, b)$ при $t \in S_2$, $Q = 0$. Обозначим этот вектор символом v_t. В силу лемм 4 и 5 модуль M_t имеет композиционный фактор N_t со старшим весом $\omega_H(v_t)$.

Итак, во всех ситуациях построены факторы N_t. Модуль $N_t \cong N_{t1} \otimes N_{t2}$, где N_{tj} – неприводимый H_j-модуль. Пусть $S \subset \{0, 1, \ldots, a\}$ – множество всех индексов t, для которых N_{t1} не тривиален. Ясно, что элемент y_2 имеет не менее $(\dim N_{t2}) / p$ блоков Жордана на модуле N_{t2}. Поэтому из леммы 3 следует, что

$$n(M) \ge \sum_{t\in S} \frac{\dim N_{t2}}{p}. \tag{1}$$

Далее используются различные оценки суммы из (1) и лемма 1. Для доказательства утверждений из пункта i) теорем 1, 2 и 3 показываем, что для соответствующих представлений модуль N_{t2} не тривиален хотя бы для одного $t \in S$, и используем известные оценки размерностей нетривиальных представлений классических групп.

Если оба веса ω и $\omega^* \notin \Omega$ в условиях теоремы 1, $\omega \notin \Omega$ в условиях теоремы 2 и $\omega \notin \Sigma$ в условиях теоремы 3, в большинстве случаев удается установить, что $\sum_{t\in S} \dim N_{t2}$ удовлетворяет нужному неравенству. При этом используются теорема 5, лемма 6 и другие оценки размерностей представлений классических групп, полученные с помощью анализа размеров орбит некоторых весов. Выбор параметров N и N' обусловлен именно результатами Любека из теоремы 5. При ослаблении ограничений на r в теоремах 1–3, вероятно, было бы больше исключений. В некоторых ситуациях сумма размерностей из (1) оказывается недостаточно большой. Для групп типа A_r здесь иногда помогает переход к дуальному представлению. В ряде случаев H заменяется сопряженной подсистемной подгруппой, задаваемой другим подмножеством простых корней, и для построения композиционных факторов N_t используются другие векторы, также получаемые с помощью лемм 4 и 5. Иногда применяются другие способы построения примитивных векторов для подгруппы H, связанные с анализом орбиты старшего веса представления. При доказательстве последнего утверждения пункта ii) этих теорем показываем, что для соответствующих представлений $\dim N_{t2}$ достаточно велика хотя бы для одного $t \in S$.

Заключение. Автор планирует применить описанный в работе подход для получения аналогичных оценок для спинорных групп. При этом элемент y погружается в подсистемную подгруппу типа $A_{l-1} \times B_{r-l}$ или $A_{l-1} \times D_{r-l}$ при $G = B_r(K)$ или $D_r(K)$ соответственно, но конструкция модулей N_t значительно сложнее.

Благодарности. Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследования (проект Ф14Р-109).

Acknowledgements. Their research is supported by the Belarussian Republican Foundation for Fundamental Research (Project Ф14Р-109).

Список использованных источников

1. Suprunenko, I. D. Unipotent elements of nonprime order in representations of the classical algebraic groups: two big Jordan blocks / I. D. Suprunenko // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 2013. – Т. 414. – С. 193–241.

2. Jantzen, J. C. Darstellungen halbeinfacher algebraicher Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen / J. C. Jantzen // Bonner Mathematische Schriften. – 1973. – Vol. 67.

3. Smith, S. Irreducible modules and parabolic subgroups / S. Smith // J. Algebra. – 1982. – Vol. 75, N 1. – P. 286–289. doi.org/10.1016/0021-8693(82)90076-x

4. Suprunenko, I. D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic / I. D. Suprunenko // Memoirs Amer. Math. Soc. – 2009. – Vol. 200, N 939. doi.org/10.1090/memo/0939

5. Lubeck, F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic / F. Lubeck // LMS J. Comput. Math. – 2001. – Vol. 4. – P. 135–169. doi.org/10.1112/s1461157000000838

References

1. Suprunenko I. D. Unipotent elements of nonprime order in representations of the classical algebraic groups: two big Jordan blocks. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 199, no. 3, pp. 350–374. doi.org/10.1007/s10958-014-1863-6

2. Jantzen J. C. Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen. *Bonner Mathematische Schriften*, 1973, vol. 67 (in German).

3. Smith S. Irreducible modules and parabolic subgroups. *Journal of Algebra*, 1982, vol. 75, no. 1, pp. 286–289. doi.org/10.1016/0021-8693(82)90076-x

4. Suprunenko I. D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2009, vol. 200, no. 939. doi.org/10.1090/memo/0939

5. Lubeck F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 2001, vol. 4, pp. 135–169. doi.org/10.1112/s1461157000000838

Информация об авторе

Супруненко Ирина Дмитриевна – д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: suprunenko@im.bas-net.by.

Information about the author

Suprunenko Irina Dmitrievna – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: suprunenko@im.bas-net.by.