ISSN 1561-8323 (print)
УДК 517.958

Поступило в редакцию 25.09.2017
Received 25.09.2017

Академик В. И. Корзюк[1], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Для одномерного уравнения Клейна–Гордона–Фока рассматривается смешанная задача с двумя нелокальными условиями в полуполосе. Решение данной задачи сводится к решению систем интегральных уравнений Вольтерры второго рода, для которых справедливы условия существования единственного решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости начальных данных. При заданных условиях гладкости на начальные данные доказана необходимость и достаточность выполнения условий согласования для существования единственного гладкого решения поставленной задачи. При анализе задачи используется метод характеристик, который сводится к разбиению всей области решения на подобласти, в которых строятся решения подзадач с помощью начальных и нелокальных условий. Полученные решения потом склеиваются в общих точках и данные условия склейки и дают условия согласования.

Названный подход позволяет построить как аналитическое решение, в случае если удается в явном виде найти решения систем интегральных уравнений, так и приближенное решение. Причем приближенное решение может быть найдено как в численном виде, так и в аналитическом. При этом для поиска численного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при построении численных методов решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Гордона–Фока, метод характеристик, интегральное условие, классическое решение, смешанная задача, нелокальное условие, условия согласования

Для цитирования: Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.

Academician Viktor I. Korzyuk[1], Ivan I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE KLEIN–GORDON–FOCK EQUATION WITH NONLOCAL CONDITIONS

Abstract. The mixed problem for the one-dimensional Klein–Gordon–Fock equation with nonlocal conditions in a half-strip is considered. Solving this problem reduces to solving the systems of the second-type Volterra equations. The theorems of existence and uniqueness of a solution in the class of twice continuously differentiable functions were proved for these equations, when initial functions are smooth enough. It is proved that fulfillment of the matching conditions for given functions is necessary and sufficient for the existence of a unique smooth solution when initial functions are smooth enough. The method of characteristics is used for the problem analysis. This method reduces to splitting the original area of the definition into subdomains. The solution of the subproblem can be constructed with in each subdomain, the help of the initial and nonlocal conditions. The obtained solutions are then glued at common points, and these gluing conditions are the matching conditions.

This approach can be used in constructing both an analytical solution, when the solution of the systems of integral equations can be found explicitly, and an approximate solution. Moreover, approximate solutions can be constructed numerically and analytically. When the numerical solution is constructed, matching conditions are essential and need to be considered while developing numerical methods.

Keywords: Klein–Gordon–Fock equation, characteristics method, integral conditions, classical solution, mixed problem, nonlocal conditions, matching conditions

For citation: Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with nonlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).

Введение. В данном сообщении расматривается смешанная задача для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями. В [1] рассмотрена задача с аналогичными интегральными условиями для уравнения колебания струны. Однако при ее исследовании отсутствуют условия согласования, что приводит к нарушению гладкости решения на характеристиках.

Также стоит отметить, что в отличие от работы [2], в которой авторы рассматривают обобщенное решение смешанной задачи с нелокальными условиями, в данной работе рассматривается именно классическое решение поставленной задачи.

Для исследования поставленной задачи применяется метод характеристик, который позволил получить результаты, в том числе и для первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока [3]. Нелокальные условия в данной работе представляют собой интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Стоит отметить, что в отличие от случая одного нелокального условия [4] при решении поставленной задачи возникают системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода, которые, однако, являются разрешимыми.

В результате исследования поставленной задачи получены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения при заданных условиях гладкости на исходные функции.

Постановка задачи. В области $Q = \mathbb{R}^+ \times (0; l)$ задается одномерное уравнение Клейна–Гордона–Фока

$$Lu = L^{(0)}u - \lambda(t, x)u = \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t, x)u = f(t, x), \tag{1}$$

где λ и f – функции, заданные на множестве $\overline{Q} = [0; \infty) \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

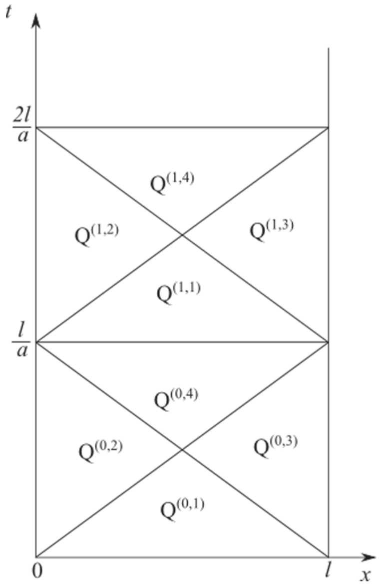
К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0, x) = \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \tag{2}$$

и нелокальные условия

$$\begin{aligned} u(x_0, 0) &= \int_0^l K_0(x_0, s) u(x_0, s) ds + \tilde{q}_0(x_0), \\ u(x_0, l) &= \int_0^l K_l(x_0, s) u(x_0, s) ds + \tilde{q}_l(x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Область Q изображена на рисунке



Область Q

Domain Q

Частное решение неоднородного уравнения. Общее решение уравнения (1) представимо в виде $u(t,x)=w(t,x)+u_0(t,x)$, где $u(t,x)$ – решение неоднородного уравнения, $w(t,x)$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения, а $u_0(t,x)$ – общее решение однородного уравнения.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\partial_t^2 w - a^2\partial_x^2 w - \lambda(t,x)w = f(t,x) \tag{4}$$

с однородными начальными условиями

$$w(0,x)=0,\ \partial_t w(0,x)=0, \quad x\in[0;l]. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (4) в области $Q^{(k)}$ можно записать в виде

$$w^{(k)}(t,x) = -\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{x\text{-}at}\int_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda w^{(k)}+f)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy + h^{(1,k)}(x-at)+h^{(2,k)}(x+at), \tag{6}$$

где $Q^{(k)}=\bigcup_{j=0}^{4}Q^{(k,j)}$, $h^{(1,k)},h^{(2,k)}$ – произвольные функции из класса $C^2(Q^{(k)})$ и $L^{(0)}h^{(j,k)}(x+(-1)^j at)=0,\ j=1,2$. Решение $w(t,x)$ уравнения (4) в области Q определяем следующим образом: $w(t,x)=w^{(k)}(t,x),(t,x)\in Q^{(k)}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda(t,x), f(t,x)\in C^1(\overline{Q^{(k)}})$, *а функции* $h^{(1,k)}\in C^2([-(k+1)l;-(k-1)l])$, $h^{(2,k)}\in C^2([kl;(k+2)l])$, *тогда решение уравнения (6) существует и единственно в классе* $C^2(Q^{(k)})$ *и оно может быть найдено с помощью метода последовательных приближений.*

За счет выбора функций $h^{(1,0)},h^{(2,0)}$, частное решение уравнения (6) будет из класса $C^2(Q^{(0)})$ и будет удовлетворять начальным условиям (5). Далее, из построенного решения в области $Q^{(0)}$ можно найти значение решения и его производной на прямой $t=\dfrac{l}{a}$. Полученные функции дадут начальные условия для нахождения решения в области $Q^{(1)}$. В силу выбора начальных условий и уравнения (4), решение $w^{(0,1)}(t,x)=w^{(i)}(t,x),(t,x)\in Q^{(i)},\ i=0,1,$ будет дважды непрерывно дифференцируемым на объединении $\overline{Q^{(0)}}\bigcup\overline{Q^{(1)}}$.

Аналогично строится решение в каждой из подобластей $Q^{(k)}$. В силу выбора начальных условий в каждой из подобластей и уравнения (4), построенное частное решение $w(t,x)=w^{(k)}(t,x),(t,x)\in Q^{(k)}$ неоднородного уравнения (1) будет принадлежать классу $C^2(Q)$.

С учетом вышеприведенных рассуждений, задача (1)–(3) сводится к решению задачи для однородного уравнения $Lu_0=0$, т. е. задачи

$$\partial_t^2 u_0 - a^2\partial_x^2 u_0 - \lambda(t,x)u_0 = 0, \tag{7}$$

$$u_0(0,x)=\varphi(x),\ \partial_t u_0(0,x)=\psi(x), \quad x\in[0;l], \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u_0(x_0,0) &= \int_0^l K_0(x_0,s)u_0(x_0,s)ds+q_0(x_0),\\ u_0(x_0,l) &= \int_0^l K_l(x_0,s)u_0(x_0,s)ds+q_l(x_0), \end{aligned} \tag{9}$$

где $q_i(x_0)=\tilde q_i(x_0)-w(x_0)-\int_0^l K_0(x_0,s)w(x_0,s)ds,\ i=0,l.$

Общее решение однородного уравнения. Согласно [3], общее решение уравнения (7) в области $Q^{(k)}$ представимо в виде

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{x-at}\int_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy+p^{(k)}(x-at)+g^{(k)}(x+at), \tag{10}$$

где $p^{(k)}, g^{(k)}$ – произвольные достаточно гладкие функции.

Л е м м а 1. *Пусть функция* $\lambda:(t,x)\in\overline{Q^{(k)}}\subset\mathbb{R}^2\to\lambda(t,x)\in\mathbb{R}$ *уравнения (7) принадлежит классу* $C^1(\overline{Q^{(k)}})$. *Единственное решение уравнения (10) из класса* $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ *существует тогда и только тогда, когда функции* $p^{(k)}, g^{(k)}$ *принадлежат классу* C^2 *на области своего задания.*

Задача Коши. Рассмотрим условия Коши

$$\begin{aligned}&u(t,x)|_{t=kl/a}=\varphi_k(x),\quad x\in[0;l],\\&\partial_t u(t,x)|_{t=kl/a}=\psi_k(x),\quad x\in[0;l],\end{aligned} \tag{11}$$

где $\varphi_k(x)=u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$, $\psi_k(x)=\partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$, $x\in[0;l]$.

Из условий (11) можно определить функции $p^{(k)}(z)$ на отрезке $[-kl;-(k-1)l]$ и $g^{(k)}(y)$ на отрезке $[kl;(k+1)l]$

$$p^{(k)}(z)=\frac{1}{2}(\varphi_k(z+kl)-\Psi_k(z+kl)-C)-\frac{1}{4a^2}\int_{(k+1)l}^{z+2kl}\int_{z}^{\eta-2kl}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta, \tag{12}$$

$$g^{(k)}(y)=\frac{1}{2}(\varphi_k(y-kl)+\Psi_k(y-kl)+C)-\frac{1}{4a^2}\int_{(k+1)l}^{y}\int_{\eta-2kl}^{-kl}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta. \tag{13}$$

Исходя из формул (12), (13) выпишем представление решения задачи в области $Q^{(k,1)}$

$$\begin{aligned}u^{(k)}(t,x)=&-\frac{1}{4a^2}\int_{x+at-2kl}^{x-at}\int_{\xi+2kl}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi+\frac{1}{2}\varphi_k(x-at+kl)+\\&\frac{1}{2}\varphi_k(x+at-kl)+\frac{1}{2}(\Psi_k(x+at-kl)-\Psi_k(x-at+kl)),\ (t,x)\in Q^{(k,1)},\end{aligned} \tag{14}$$

где $\Psi_k(x)=\frac{1}{a}\int_l^x\psi_k(s)ds.$

Л е м м а 2. *Пусть функции* $\varphi_k\in C^2([0;l]), \psi_k\in C^1([0,l]), \lambda\in C^1(\overline{Q^{(k)}})$, *тогда решение* $u^{(k)}$ *уравнения (14) существует и единственно в классе* $C^2(Q^{(k,1)})$.

Доказательство проводится методом последовательных приближений.

Нелокальные условия. Из первого нелокального условия (9) и представления (10) получим уравнение

$$\begin{aligned}p^{(k)}(z)=&-g^{(k)}(-z)+\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{z}\int_{(k+1)l}^{-z}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy+\\&\int_0^l K_0(t,s)u^{(k)}(t,s)ds+q_0(t),\quad z\in[-(k+1)l;-kl].\end{aligned} \tag{15}$$

Введем обозначение

$$I_0^{(k)}(z)=\int_0^l(K_0u^{(k)})\left(\left(-\frac{z}{a}\right),s\right)ds. \tag{16}$$

Интегральное представление решения в области $Q^{(k,2)}$ запишется как

$$
\begin{gathered}
u^{(k)}(t,x) = g^{(k)}(x+at) - g^{(k)}(-x+at) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{-x+at}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi + \\
I_0^{(k)}(x-at) + q_0\left(t-\frac{x}{a}\right),\ (t,x)\in Q^{(k,2)}.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Задача со вторым интегральным условием из (9) рассматривается аналогично:

$$
\begin{gathered}
g^{(k)}(y) = -p^{(k)}(2l-y) + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{2l-y}\int\limits_{(k+1)l}^{y}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi + \\
\int\limits_0^l (K_l u^{(k)})\left(\frac{y-l}{a},s\right)ds + q_l\left(\frac{y-l}{a}\right),\ y\in[(k+1)l;(k+2)l].
\end{gathered} \tag{18}
$$

Для сокращения записи введем обозначение, аналогичное (16)

$$
I^{(\ )}(z) = \int (K\ u^{(\ )})\left(\frac{y\quad l}{\ }, s\right)ds.
$$

Тогда интегральное представление решения в области $Q^{(k,3)}$ запишется в виде

$$
\begin{gathered}
u^{(k)}(t,x) = p^{(k)}(x-at) - p^{(k)}(2l-x-at) + I_l^{(k)}(x+at) + q_l\left(\frac{x+at-l}{a}\right) - \\
\frac{1}{4a^2}\int\limits_{2l-x-at}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi,\ (t,x)\in Q^{(k,3)}.
\end{gathered} \tag{19}
$$

С помощью выражений (15) и (18) можно построить представление решения задачи в области $Q^{(k,4)}$

$$
\begin{gathered}
u^{(k)}(t,x) = -g^{(k)}(-x+at) - p^{(k)}(2l-x-at) - \\
\frac{1}{4a^2}\int\limits_{2l-x-at}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi + I_l^{(k)}(x+at) + q_l\left(\frac{x+at-l}{a}\right) - \\
\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{-x+at}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi + I_0^{(k)}(x-at) + q_0\left(t-\frac{x}{a}\right) - \\
\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi,\ (t,x)\in Q^{(k,4)}.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Т е о р е м а 2. *Если функции* $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q^{(k)}})$, $K_i(t,x)\in C^2(\overline{Q^{(k)}})$, $i=0,l$, $p^{(k)}\in C^2([-kl;-(k-1)l])$, $g^{(k)}\in C^2([kl;(k+1)l])$, $q_i(t)\in C^2\left(\left[\frac{kl}{a};\frac{(k+1)l}{a}\right]\right)$, *то решение системы (17), (19), (20) существует и единственно в классе* C^2.

Доказательство теоремы 2 проводится методом последовательных приближений.

Выведем условия, при которых функция $p^{(k)}$ будет непрерывна. Приравнивая выражения из (12) и (15) в точке $z=-kl$, получим следующее условие:

$$
q_0\left(\frac{kl}{a}\right) - \varphi_k(0) + \int\limits_0^l K_0\left(\frac{kl}{a},s\right)\varphi_k(s)ds = 0. \tag{21}
$$

Условие согласования на производные функций (12) и (15) в точке $z = -kl$:

$$-\frac{1}{a}dq_0\left(\frac{kl}{a}\right)+\frac{1}{a}\psi_k(0)-\int_0^l\frac{1}{a}\partial_t K_0\left(\frac{kl}{a},s\right)\varphi_k(s)+\frac{1}{a}\psi_k(s)K_0\left(\frac{kl}{a},s\right)ds=0. \quad (22)$$

Из вторых производных функций (12) и (15) получим условие согласования

$$\frac{1}{a^2}d^2q_0\left(\frac{kl}{a}\right)-d^2\varphi_k(0)-\frac{1}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi_k(0)+$$
$$\int_0^l\frac{1}{a^2}\partial_t^2K_0\left(\frac{kl}{a},s\right)\varphi_k(s)+\frac{2}{a^2}\partial_tK_0\left(\frac{kl}{a},s\right)\psi_k(s)+K_0\left(\frac{kl}{a},s\right)\times \quad (23)$$
$$\left(d^2\varphi_k(s)+\frac{1}{a^2}\varphi_k(s)\lambda\left(\frac{kl}{a},s\right)\right)ds=0.$$

Приравняв выражения из (13) и (18) в точке $y=(k+1)l$, получим следующее условие:

$$q_l\left(\frac{kl}{a}\right)-\varphi_k(l)+\int_0^l K_l\left(\frac{kl}{a},s\right)\varphi_k(s)ds=0. \quad (24)$$

Аналогично, вычисляя производные первого порядка функций (13) и (18) и приравнивая их в точке $y=(k+1)l$, получим условие согласования

$$\frac{1}{a}dq_l\left(\frac{kl}{a}\right)-\frac{1}{a}\psi_k(l)-\int_0^l\frac{1}{a}\partial_tK_l\left(\frac{kl}{a},s\right)\varphi_k(s)+\frac{1}{a}\psi_k(s)K_l\left(\frac{kl}{a},s\right)ds=0. \quad (25)$$

Вычисляя производные второго порядка функций (13) и (18) и приравнивая их в точке $y=(k+1)l$, получим условие согласования

$$\frac{1}{a^2}d^2q_l\left(\frac{kl}{a}\right)-d^2\varphi_k(l)-\frac{1}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi_k(l)+$$
$$\int_0^l\frac{1}{a^2}\partial_t^2K_l\left(\frac{kl}{a},s\right)\varphi_k(s)+\frac{2}{a^2}\partial_tK_l\left(\frac{kl}{a},s\right)\psi_k(s)+K_l\left(\frac{kl}{a},s\right)\times \quad (26)$$
$$\left(d^2\varphi_k(s)+\frac{1}{a^2}\varphi_k(s)\lambda\left(\frac{kl}{a},s\right)\right)ds=0.$$

Таким образом, из представленных рассуждений следует следующее утверждение.

Л е м м а 3. *Пусть* $q_j(t)\in C^2\left(\left[\frac{kl}{a};\frac{(k+1)l}{a}\right]\right)$, $\varphi_k(x)\in C^2([0;l])$, $\psi_k(x)\in C^1([0;l])$, $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q^{(k)}})$, $K_j(t)\in C^2\left(\left[\frac{kl}{a};\frac{(k+1)l}{a}\right]\times[0;l]\right)$. *Решение задачи (7)–(9) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (21)–(26).*

Решение задачи в полуполосе. В предыдущем пункте мы решили задачу (7)–(9) в каждой из подобластей $Q^{(k)}$. Выведем теперь условия принадлежности решения $u(t,x)$ классу $C^2(\overline{Q^{(k)}}\bigcup\overline{Q^{(k-1)}})$.

Л е м м а 4. *Пусть* $u^{(k)}(t,x)$ *– решение задачи в области* $\overline{Q^{(k)}}$, *а* $u^{(k-1)}$ *– в области* $\overline{Q^{(k-1)}}$. *Функции* $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q^{(k)}\bigcup Q^{(k-1)}})$. *Тогда при выполнении в каждой из этих областей условий* *леммы 3 и определении начальных условий на слое* k *через решение на слое* $k-1$ *следующим образом:*

$$\varphi_k(x)=u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right),$$

$$\psi_k(x)=\partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right),\quad x\in[0;l],$$

функция

$$u^{(k,k-1)}(t,x)=\begin{cases}u^{(k)}(t,x), & (t,x)\in\overline{Q^{(k)}},\\ u^{(k-1)}(t,x), & (t,x)\in\overline{Q^{(k-1)}},\end{cases}$$

будет дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $\overline{Q^{(k)}\bigcup Q^{(k-1)}}$.

Л е м м а 5. *Условия согласования на слое* k *выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования на слое* $k-1$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\lambda\in C^1(\overline{Q})$, $q_0\in C^2([0;+\infty))$, $q_l\in C^2([0;+\infty))$, $\varphi\in C^2([0;l])$, $\psi\in C^1([0;l])$, $K_j(t)\in C^2([0;+\infty)\times[0;l])$, $j\in\{0,l\}$. *Решение задачи (7)–(9), которое задается формулами (14), (17), (19), (20), существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (21)–(26) при* $k=0$, *т. е.*

$$q_0(0)-\varphi(0)+\int_0^l K_0(0,s)\varphi(s)ds=0,\ q_l(0)-\varphi(l)+\int_0^l K_l(0,s)\varphi(s)ds=0,$$

$$-\frac{1}{a}dq_0(0)+\frac{1}{a}\psi(0)-\int_0^l\frac{1}{a}\partial_t K_0(0,s)\varphi(s)+\frac{1}{a}\psi(s)K_0(0,s)ds=0,$$

$$\frac{1}{a}dq_l(0)-\frac{1}{a}\psi(l)-\int_0^l\frac{1}{a}\partial_t K_l(0,s)\varphi(s)+\frac{1}{a}\psi(s)K_l(0,s)ds=0,$$

$$\frac{1}{a^2}d^2q_0(0)-d^2\varphi(0)-\frac{1}{a^2}\lambda(0,0)\varphi(0)+\int_0^l\frac{1}{a^2}\partial_t^2K_0(0,s)\varphi(s)+\frac{2}{a^2}\partial_tK_0(0,s)\psi(s)ds+$$
$$\int_0^l K_0(0,s)\left(d^2\varphi(s)+\frac{1}{a^2}\varphi(s)\lambda(0,s)\right)ds=0,$$

$$\frac{1}{a^2}d^2q_l(0)-d^2\varphi(l)-\frac{1}{a^2}\lambda(0,l)\varphi(l)+\int_0^l\frac{1}{a^2}\partial_t^2K_l(0,s)\varphi(s)+\frac{2}{a^2}\partial_tK_l(0,s)\psi(s)ds+$$
$$\int_0^l K_l(0,s)\left(d^2\varphi(s)+\frac{1}{a^2}\varphi(s)\lambda(0,s)\right)ds=0.$$

Заключение. В данном сообщении рассмотрена смешанная задача для уравнения Клейна–Гордона–Фока. Получены необходимые и достаточные условия согласования, при которых существует единственное классическое решение поставленной задачи при заданных условиях гладкости на известные функции. Непрерывная зависимость решения от начальных данных следует из представления решения в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода.

Список использованных источников

1. Гордезиани, Д. Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Матем. моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.

2. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике / Л. С. Пулькина, О. М. Кечина // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2005. – № 2(36). – С. 1–9.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1108–1117.

4. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 22–27.

References

1. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solution of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2000, vol. 12, no. 11, pp. 94–103 (in Russian).

2. Pulkina L. S., Kechina O. M. Nonlocal problem for the hyperbolic equation with integral conditions in characteristics rectangle. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-Nauchnaya seriya = Vestnik of Samara University. Natural science series*, 2005, no. 2(36), pp. 1–9 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation in half-strip. *Differential equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. doi.org/10.1134/s0012266114080084

4. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the wave equation with the integral conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 22–27 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Столярчук Иван Игоревич – магистр физико-математических наук, аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Stolyarchuk Ivan Igorevich – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.