ISSN 1561-8323 (print)
УДК 517.977

Поступило в редакцию 11.10.2017
Received 11.10.2017

Н. М. Дмитрук

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления линейным динамическим объектом с неизвестными ограниченными возмущениями, который требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимальный полный импульс многомерного дискретного управляющего воздействия. Определяется оптимальная стратегия управления, учитывающая информацию об одном будущем состоянии объекта, предлагается эффективный метод ее построения. Приводятся оценки улучшения значения критерия качества при использовании оптимальной стратегии в сравнении с оптимальной гарантирующей программой.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейная нестационарная система, многомерный вход, возмущения, стратегия управления, алгоритм

Для цитирования: Дмитрук, Н. М. Оптимальная стратегия управления в задаче гарантированной оптимизации линейной системы с возмущениями / Н. М. Дмитрук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 28–34.

Natalia M. Dmitruk

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

OPTIMAL CONTROL STRATEGY IN THE PROBLEM OF GUARANTEED OPTIMIZATION OF A LINEAR SYSTEM WITH DISTURBANCES

(Communicated by Academician Ivan V. Gaishun)

Abstract. This article deals with the problem of optimal control of a linear dynamical object subject to unknown bounded disturbances with the control requiring to robustly steer an object to a given target set while minimizing a total impulse of a multidimensional sampled-data input. We define an optimal control strategy, which takes into account one future state of an object, and propose an efficient numerical method to construct it. The optimal strategy performance is compared to an optimal open-loop worst-case input, and some estimates for cost improvement are provided.

Keywords: optimal control, linear time-varying system, multidimensional input, disturbances, control strategy, algorithm

For citation: Dmitruk N. M. Optimal control strategy in the problem of guaranteed optimization of a linear system with disturbances. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 28–34 (in Russian).

Введение. Несмотря на то что задачи оптимального управления в условиях неопределенности рассматриваются в литературе с 1960-х годов [1–3], они сохраняют актуальность и в настоящее время в связи с необходимостью учитывать неизвестные параметры управляемого объекта, такие как возмущения, неточности математического моделирования, измерений или реализации управляющих воздействий.

В последние годы обширной областью применения задач оптимального управления является теория управления с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control – MPC). Робастная версия MPC, начиная с [4], формирует обратные связи не на основе программных оптимальных гарантирующих управлений, а на основе оптимальных стратегий (политик), которые учитывают возможность корректировки управления по информации о текущих и будущих состояниях процесса управления [5]. Наилучшую стратегию дает динамическое программирование, однако на практике этот подход может быть использован только в задачах небольшой размерности. Поэтому основное внимание в робастном MPC уделяется упрощению формулировок задач оптимального управления. Например, используются различные параметризации управления [6], либо онлайн вычисления переносятся оффлайн посредством решения многопараметрических задач линейного программирования как в [7].

В настоящем сообщении стратегия управления определяется в предположении о возможности измерения состояний объекта и коррекции управляющих воздействий в один будущий момент времени. Такая идея ранее была реализована в [8–10] для линейных задач оптимального управления с терминальным критерием качества, и в [5; 11; 12], посвященных терминальным линейно-квадратичным задачам с возмущениями.

В отличие от перечисленных выше работ, здесь рассматривается управляемый объект с многомерным входом, а качество процесса оценивается интегральным функционалом, подходящим для применения полученных результатов в теории линейного MPC [7].

На промежутке времени $T=[t_0, t_f]$ рассмотрим линейный управляемый объект

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + M(t)w(t), \;\; x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние; $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$ – управляющее воздействие; $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^q$, $t \in T$, – неизвестное кусочно-непрерывное возмущение; $A(t)$, $B(t)$, $M(t)$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные матричные функции соответствующей размерности; множества U, W имеют вид $U = \{u \in \mathbb{R}^r : \| u \|_\infty \le 1\}$, $W = \{w \in \mathbb{R}^q : \| w \|_\infty \le w^*\}$, где норма $\| z \|_\infty = \max_i | z_i |$.

Для управления объектом (1) доступны дискретные управляющие воздействия [10]: $u(t) \equiv u(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in \Delta = \{t_0, t_0 + h, \ldots, t_f - h\}$, где $h = (t_f - t_0)/N$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$.

Целями управления объектом (1) являются: 1) перевод с гарантией (независимо от реализовавшегося возмущения) на заданное ограниченное терминальное множество $X_f = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \le g\}$, где $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$, и 2) минимизация полного импульса дискретного управляющего воздействия $\int_T \| u(t) \|_1 \, dt$, где норма $\| z \|_1 = \sum_i | z_i |$.

Известно [4; 5], что оптимальная гарантирующая программа $u^0(t)$, $t \in T$, – такое доступное управляющее воздействие с минимальным полным импульсом, которое гарантирует выполнение включения $x(t_f) \in X_f$ при всех возможных возмущениях, недооценивает потенциальные возможности системы управления, поскольку не учитывает возможность поступления информации о ее поведении в будущем. Такую возможность учтем, определив ниже *стратегию управления с одним моментом замыкания.*

Пусть $t_1 \in \Delta$. Момент времени t_1 разбивает промежуток управления T на два промежутка: $T_0 = [t_0, t_1[$ и $T_1 = [t_1, t_f]$; а также множество Δ на $\Delta_k = T_k \cap \Delta$, $k = 0, 1$. Пусть $N_1 = | \Delta_1 |$.

Следуя [10], t_1 назовем *моментом замыкания* системы (1).

Для $k = 0, 1$ определим $U_k = \{u_k(\cdot) = (u_k(t), t \in T_k) : u_k(t) \in U, t \in T_k\}$ – множество всех доступных дискретных управляющих воздействий, определенных на k-м промежутке; $W_k = \{w_k(\cdot) = (w_k(t), t \in T_k) : w_k(t) \in W, t \in T_k\}$ – множество всех возможных возмущений; $x(t \,|\, x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))$, $t \in T_k$, – траектория (1) с начальным состоянием $x(t_k) = x_k$, управлением $u_k(\cdot) \in U_k$ и возмущением $w_k(\cdot) \in W_k$; $X(t \,|\, x_k, u_k(\cdot)) = \{x = x(t \,|\, x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot)), w_k(\cdot) \in W_k\}$ – множество всех возможных состояний системы (1) в момент времени $t \in T_k$, порожденных управлением $u_k(\cdot) \in U_k$ и всеми возмущениями $w_k(\cdot) \in W_k$.

Следуя [5; 11], будем считать, что до начала процесса управления известно, что в момент t_1 можно будет: 1) измерить текущее состояние объекта управления $x(t_1) = x(t_1 \,|\, x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))$; 2) скорректировать управляющее воздействие на интервале T_1 с учетом полученного измерения состояния.

С учетом возможностей 1)–2), решение рассматриваемой задачи оптимального управления будем искать в виде *стратегии управления* [5; 11] вида

$$\pi_1 = \{u_0(\cdot \,|\, x_0); \;\; u_1(\cdot \,|\, x_1), x_1 \in X(t_1 \,|\, x_0, u_0(\cdot \,|\, x_0))\},$$

где $u_k(\cdot \,|\, x_k) = (u_k(t \,|\, x_k), t \in T_k)$ – управляющее воздействие на T_k, $k = 0, 1$.

Стратегию π_1 назовем *допустимой стратегией управления с моментом замыкания* t_1, если

$$X(t_f \mid x_1, u_1(\cdot \mid x_1)) \subseteq X_f, \ \ \forall x_1 \in X(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0)).$$

Качество допустимой стратегии управления π_1 оценим значением

$$V(\pi_1) = \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \left\{ \int_{T_0} \left\| u_0(t \mid x_0) \right\|_1 dt + \int_{T_1} \left\| u_1(t \mid x(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0), w_0(\cdot))) \right\|_1 dt \right\}.$$

Оптимальной назовем такую стратегию

$$\pi_1^0 = \{u_0^0(\cdot \mid x_0); \ u_1^0(\cdot \mid x_1), x_1 \in X(t_1 \mid x_0, u_0^0(\cdot \mid x_0))\}, \tag{2}$$

на которой выполняется $V(\pi_1^0) = \min\limits_{\pi_1} V(\pi_1)$.

Управляющее воздействие $u_0^0(\cdot \mid x_0)$ в составе оптимальной стратегии (2) будем называть *оптимальной начальной программой*.

Для формулировки задач, по решению которых строится оптимальная стратегия управления π_1^0 вида (2), рассмотрим сначала промежуток T_1, затем промежуток T_0.

Рассмотрим промежуток $T_1 = [t_1, t_f]$. Пусть $x_1 \in X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u_1(\cdot \mid x_1) \in U_1, X(t_f \mid x_1, u_1(\cdot \mid x_1)) \subseteq X_f\}$, т. е. для точки x_1 на T_1 существует *гарантирующая программа* – доступное управляющее воздействие, переводящее (1) на терминальное множество X_f при любых возмущениях. Далее предполагаем, что параметры задачи таковы, что $X_1 \neq \varnothing$.

Задача управления на промежутке T_1 для точки $x_1 \in X_1$ состоит в отыскании *оптимальной гарантирующей программы* $u_1^0(\cdot \mid x_1)$ – гарантирующей программы с минимальным полным импульсом. Таким образом, $u_1^0(\cdot \mid x_1)$ является решением следующей задачи

$$J_1(x_1) = \min_{u_1(\cdot)\in U_1} \int_{T_1} \left\| u_1(t) \right\|_1 dt, \tag{3}$$

при условии $X(t_f \mid x_1, u_1(\cdot)) \subseteq X_f$.

Рассмотрим промежуток $T_0 = [t_0, t_1[$. Цель управления на T_0 – гарантированное попадание системы (1) на множество X_1:

$$X(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0)) \subseteq X_1. \tag{4}$$

При выполнении (4), по построению множества X_1, для любого $x_1 \in X(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0))$ существует оптимальная гарантирующая программа $u_1^0(\cdot \mid x_1)$. Далее предполагаем, что начальное состояние объекта x_0 таково, что существует $u_0(\cdot \mid x_0) \in U_0$, обеспечивающее включение (4). Тогда стратегия управления $\pi_1 = \{u_0(\cdot \mid x_0); \ u_1^0(\cdot \mid x_1), x_1 \in X(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0))\}$ является допустимой.

Оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot \mid x_0)$ на промежутке T_0 является решением следующей минимаксной задачи

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot)\in U_0} \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \left\{ \int_{T_0} \left\| u_0(t) \right\|_1 dt + J_1(x(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))) \right\} \tag{5}$$

при условии (4).

Задачу (5) можно переформулировать следующим образом (см. [4]):

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot)\in U_0,\, \alpha} \left\{ \int_{T_0} \left\| u_0(t) \right\|_1 dt + \alpha \right\}, \tag{6}$$

при условиях $x(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)) \in X_1, \ J_1(x(t_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))) \leq \alpha, \ \forall w_0(\cdot) \in W_0$.

Пусть $X_1(\alpha) = \{x_1 \in X_1 : J_1(x_1) \leq \alpha\}$. Тогда задача (6) примет вид

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0,\,\alpha}\left\{\int_{T_0}\|u_0(t)\|_1\,dt + \alpha\right\} \tag{7}$$

при условиях $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_0(t) + M(t)w_0(t)$, $x(t_0) = x_0$, $u_0(t) \in U$, $t \in T_0$, $x(t_1) \in X_1(\alpha)$, $\forall w_0(\cdot) \in W_0$.

Таким образом, стратегия управления (2), состоящая из решения $u_0^0(\cdot\,|\,x_0)$ задачи (7) и решений $u_1^0(\cdot\,|\,x_1)$ задач (3) для состояний $x_1 \in X(t_1\,|\,x_0, u_0^0(\cdot\,|\,x_0))$, будет *оптимальной стратегией управления с моментом замыкания* t_1.

Цель дальнейшего изложения – эффективное вычисление оптимальной начальной программы $u_0^0(\cdot\,|\,x_0)$ посредством сведения (7) к задаче линейного программирования.

Центральный результат настоящего исследования – простое описание множества $X_1(\alpha)$. В классе дискретных управляющих воздействий $X_1(\alpha)$ – многогранник при всех значениях параметра $\alpha \geq 0$. Будем считать, что известны нормали $p_i \in \mathbb{R}^n$, $\|p_i\| = 1$, $i = \overline{1, m_1}$, к граням всех $X_1(\alpha)$, и они являются строками матрицы $P \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$. Построить матрицу P можно, например, с помощью алгоритма, предложенного в [13]. Тогда $X_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : Px_1 \leq g(\alpha)\}$, где $g(\alpha) = (g_i(\alpha),\ i = \overline{1, m_1})^T$:

$$g_i(\alpha) = \max p_i^T x_1,\ \ x_1 \in X_1(\alpha). \tag{8}$$

Далее используются следующие обозначения: $\omega(\alpha) = (1, \dots, 1, \{\alpha / h\}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{rN_1}$, где дробная часть $\{\alpha / h\}$ является $[\alpha / h] + 1$-й компонентой; $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, – фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t) : \dot{F}(t) = A(t)F(t)$, $F(t_0) = E$; $G = HF(t_f)F^{-1}(t_1)$, $D(s) = \int_s^{s+h} F(t_1)F^{-1}(t)B(t)dt$, $s \in \Delta$; $q_{ij}(s) = \left|p_i^T d_j(s)\right|$, $s \in \Delta_1$; $Q = (q_i^T, i = \overline{1, m_1}) : q_i = (q_{ij}(s), j = \overline{1, r}, s \in \Delta_1)$, где элементы отсортированы по убыванию;

$$\gamma_1 = (\gamma_1^i, i = \overline{1, m})^T : \gamma_1^i = w^* \int_{T_1}\left\|h_i^T F(t_f)F^{-1}(t)M(t)\right\|_1 dt, i = \overline{1, m};$$

$$\gamma_0 = (\gamma_0^i, i = \overline{1, m_1})^T : \gamma_0^i = w^* \int_{T_0}\left\|p_i^T F(t_1)F^{-1}(t)M(t)\right\|_1 dt, i = \overline{1, m_1};$$

$$g_1 = (g_i(0), i = \overline{1, m_1})^T : g_i(0) = \max p_i^T x_1, Gx_1 \leq g - \gamma_1, i = \overline{1, m_1}.$$

Следующее утверждение позволяет легко вычислять значения $g(\alpha)$.

У т в е р ж д е н и е 1. *При любом* $0 \leq \alpha \leq r(t_f - t_1)$ *имеет место*

$$g(\alpha) = g_1 + Q\omega(\alpha).$$

Приведем идею доказательства. С учетом определения множества $X_1(\alpha)$ и замены переменных $u_1(s) = u^*(s) - u_*(s)$, $s \in \Delta_1$, задача (8) может быть сведена к задаче линейного программирования

$$g_i(\alpha) = \max p_i^T x_1, \tag{9}$$

$$Gx_1 + \sum_{s\in\Delta_1} GD(s)(u^*(s) - u_*(s)) \leq g - \gamma_1, \sum_{s\in\Delta_1} \mathbf{1}_r^T(u^*(s) + u_*(s)) \leq \alpha / h,$$

$$0 \leq u^*(s) \leq \mathbf{1}_r,\ \ 0 \leq u_*(s) \leq \mathbf{1}_r,\ s \in \Delta_1,$$

где $\mathbf{1}_r$ – вектор из r единиц. Поскольку X_f ограничено, $X_1 \neq \varnothing$, задача (9) имеет решение при всех $p_i \in \mathbb{R}^n$, а следовательно, имеет решение и двойственная к ней задача:

$$g_i(\alpha) = \min\{(g - \gamma_1)^T y + \alpha y_\alpha / h + \sum_{s\in\Delta_1} \mathbf{1}_r^T(v^*(s) + v_*(s))\}, \tag{10}$$

$$D^T(s)G^T y + \mathbf{1}_r y_\alpha + v^*(s) \geq 0, -D^T(s)G^T y + \mathbf{1}_r y_\alpha + v_*(s) \geq 0,$$

$$G^T y = p_i,\ y \geq 0,\ y_\alpha \geq 0,\ v^*(s) \geq 0,\ v_*(s) \geq 0,\ s \in \Delta_1.$$

В (10) можно исключить переменную y, что дает

$$g_i(\alpha) = g_i(0) + \min\{\alpha y_\alpha / h + \textstyle\sum_{s\in\Delta_1} \mathbf{1}_r^T (v^*(s) + v_*(s))\}, \tag{11}$$

$$D^T(s)p_i + \mathbf{1}_r y_\alpha + v^*(s) \geq 0, -D^T(s)p_i + \mathbf{1}_r y_\alpha + v_*(s) \geq 0,\ y_\alpha \geq 0,\ v^*(s) \geq 0,\ v_*(s) \geq 0,\ s \in \Delta_1,$$

где минимум достигается при $v_j^*(s) + v_{*j}(s) = \max\{0; q_{ij}(s) - y_\alpha\}$, $j = \overline{1, r}$. Минимизируя далее (11) по y_α, получим: $y_\alpha = q_i^{[\alpha/h]+1}$, где q_i^l – l-й элемент вектора q_i. Тогда

$$g_i(\alpha) = g_i(0) + \alpha q_i^{[\alpha/h]+1} / h + \textstyle\sum_{l=1}^{[\alpha/h]} (q_i^l - q_i^{[\alpha/h]+1}) = g_i(0) + q_i^T \omega(\alpha).$$

Утверждение 1 позволяет сформулировать задачу (7) в виде

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0,\, \alpha} \left\{ \int_{T_0} \|u_0(t)\|_1\, dt + \alpha \right\},$$

при условиях $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_0(t) + M(t)w_0(t)$, $x(t_0) = x_0$, $u_0(t) \in U$, $t \in T_0$, $Px(t_1) - Q\omega(\alpha) \leq g_1$, $\forall w_0(\cdot) \in W_0$.

Используя результаты [10] и замену $u_0(s) = u^*(s) - u_*(s)$, $s \in \Delta_0$, нетрудно получить

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть $u_*^0(s)$, $u^{*0}(s) \in \mathbb{R}^r$, $s \in \Delta_0$, $\omega^0 \in \mathbb{R}^{rN_1}$ – решение задачи линейного программирования*

$$\varphi^0 = \min_{u_*, u^*, \omega} \left\{ \textstyle\sum_{s\in\Delta_0} \mathbf{1}_r^T (u^*(s) + u_*(s)) + \mathbf{1}_{rN_1}^T \omega \right\},$$

$$\textstyle\sum_{s\in\Delta_0} PD(s)(u^*(s) - u_*(s)) - Q\omega \leq g_1 - \gamma_0 - PF(t_1)F^{-1}(t_0)x_0,$$

$$0 \leq u^*(s) \leq \mathbf{1}_r,\ 0 \leq u_*(s) \leq \mathbf{1}_r,\ s \in \Delta_0,\ 0 \leq \omega \leq \mathbf{1}_{rN_1}.$$

Тогда $u_0^0(t\,|\,x_0) \equiv u^{*0}(s) - u_*^0(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in \Delta_0$, $\alpha^0 = h\mathbf{1}_{rN_1}^T \omega$, – оптимальная начальная программа и оптимальное значение параметра задачи (7). *При этом* $V(\pi_1^0) = h\varphi^0$.

Сравним значение критерия качества $V(\pi_1^0)$ с качеством оптимальной гарантирующей программы $u^0(t)$, $t \in T$, которая является решением следующей задачи:

$$J(u^0) = \min_u \int_T \|u(t)\|_1\, dt, \tag{12}$$

при условиях $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + M(t)w(t)$, $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in U$, $t \in T$, $Hx(t_f) \leq g$, $\forall w(\cdot) \in W$.

Предполагается, что решение задачи (12) существует.

Очевидно, что $V(\pi_1^0) \leq J(u^0)$, поскольку на основе оптимальной гарантирующей программы $u^0(t)$, $t \in T$, можно построить допустимую стратегию π_1, составив ее из $u_0(t\,|\,x_0) = u^0(t)$, $t \in T_0$, и $u_1(t\,|\,x_1) = u^0(t)$, $t \in T_1$, для всех $x_1 \in X(t_1\,|\,x_0, u_0(\cdot\,|\,x_0))$.

Следующее утверждение позволяет оценить улучшение качества процесса управления при использовании оптимальной стратегии π_1^0.

У т в е р ж д е н и е 3. *Для оптимальных значений задач (12), (7) справедливы оценки*

$$\delta_{\min} \leq J(u^0) - V(\pi_1^0) \leq \delta_{\max},\ \delta_{\min} = \int_{T_1} \left\| u^0(t) \right\|_1 dt - \alpha_1 h,\ \delta_{\max} = w^* \int_{T_1} \varphi(t, \nu^0) dt,$$

где $\alpha_1 = \min \mathbf{1}^T_{rN_1}\omega$, $Q\omega \geq Px(t_1 \mid x_0, u^0(\cdot), 0) + \gamma_0 - g_1$, $0 \leq \omega \leq \mathbf{1}_{rN_1}$, $\varphi(t,\nu) = \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{m} |\nu_i| \, |h_i^T F(t_f)F^{-1}(t)M_j(t)| - |\nu^T HF(t_f)F^{-1}(t)M_j(t)|\right)$, $M_j(t)$ *– j-й столбец матрицы* $M(t)$; $\nu^0 \geq 0$ *– вектор оптимальных множителей Лагранжа в задаче (12), соответствующий терминальным ограничениям.*

Заключение. В сообщении предложен метод построения оптимальной стратегии с одним моментом замыкания в задаче минимизации полного импульса ограниченного дискретного управляющего воздействия на траекториях линейной нестационарной системы с неизвестными ограниченными возмущениями и подвижным правым концом. Получены оценки улучшения гарантированного значения критерия качества при использовании оптимальной стратегии в сравнении с оптимальной гарантирующей программой.

Список использованных источников

1. Witsenhausen, H. A minimax control problem for sampled linear systems / H. Witsenhausen // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – Vol. 13, N 1. – P. 5–21. doi.org/10.1109/tac.1968.1098788

2. Куржанский, А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977. – 392 с.

3. Красовский, Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1985. – 520 с.

4. Scokaert, P. O. M. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems / P. O. M. Scokaert, D. Q. Mayne // IEEE Transactions on Automatic control. – 1998. – Vol. 43, N 8. – P. 1136–1142. doi.org/10.1109/tac.1968.1098788

5. Костюкова, О. И. Оптимальные гарантированные стратегии управления с промежуточными моментами коррекции / О. И. Костюкова, М. А. Курдина // Тр. Ин-та матем. – 2006. – Т. 14, № 1. – С. 82–93.

6. Goulart, P. J. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints / P. J. Goulart, E. C. Kerrigan, J. M. Maciejowski // Automatica. – 2006. – Vol. 42, N 4. – P. 523–533. doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.023

7. Bemporad, A. Model predictive control based on linear programming the explicit solution / A. Bemporad, F. Borrelli, M. Morari // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, N 12. – P. 1974–1985. doi.org/10.1109/tac.2002.805688

8. Габасов, Р. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Е. А. Костина // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 7. – С. 121–130.

9. Габасов, Р. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Е. А. Костина // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 8. – С. 90–99.

10. Балашевич, Н. В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н. В. Балашевич, Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265–286.

11. Kostyukova, O. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances / O. Kostyukova, E. Kostina // Mathematical programming. – 2006. – Vol. 107, N 1–2. – P. 131–153. doi.org/10.1007/s10107-005-0682-4

12. Kostina, E. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances / E. Kostina, O. Kostyukova // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2009. – Vol. 19, N 17. – P. 1940–1958. doi.org/10.1002/rnc.1417

13. Jones, C. Equality set projection: A new algorithm for the projection of polytopes in halfspace representation. Technical Report CUED/F-INFENG/TR. 463 [Electronic resource] / C. Jones, E. C. Kerrigan, J. Maciejowski. – Cambridge University Engineering Dept., 2004. – Mode access: https://infoscience.epfl.ch/record/169768/files/resp_mar_04_15.pdf

References

1. Witsenhausen H. A minimax control problem for sampled linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. 13, no. 1, pp. 5–21. doi.org/10.1109/tac.1968.1098788

2. Kurzhanski A. B. *Control and observation under uncertainty conditions*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p. (in Russian).

3. Krasovskii N. N. *Control of a dynamical system*. Moscow, Nauka Publ., 1985. 520 p. (in Russian).

4. Scokaert P. O. M., Mayne D. Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 8, pp. 1136–1142. doi.org/10.1109/tac.1968.1098788

5. Kostyukova O. I., Kurdina M. A. Worst-case control policies with intermediate correct moments. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2006, vol. 14, no. 1, pp. 82–93 (in Russian).

6. Goulart P. J., Kerrigan E. C., Maciejowski J. M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 4, pp. 523–533. doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.023

7. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. Model predictive control based on linear programming the explicit solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, vol. 47, no. 12, pp. 1974–1985. doi.org/10.1109/tac.2002.805688

8. Gabasov R., Kirillova F. M., Kostina E. A. Subtended Feedback with Respect to State for Optimization of Uncertain Control Systems. I. Single Loop. *Automation and Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 7, pp. 1008–1015.

9. Gabasov R., Kirillova F. M., Kostina E. A. Closed-Loop State Feedback for Optimization of Uncertain Control Systems. II. Multiply Closed Feedback. *Automation and Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 8, pp. 1137–1145.

10. Balashevich N. V., Gabasov R., Kirillova F. M. The construction of optimal feedback from mathematical models with uncertainty. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 247–267.

11. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances. *Mathematical programming*, 2006, vol. 107, no. 1–2, pp. 131–153. doi.org/10.1007/s10107-005-0682-4

12. Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear–quadratic control problems under disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, vol. 19, no. 17, pp. 1940–1958. doi.org/10.1002/rnc.1417

13. Jones C., Kerrigan E. C., Maciejowski J. *Equality set projection: A new algorithm for the projection of polytopes in halfspace representation*. Technical Report CUED/F-INFENG/TR. 463. Department of Engineering, University of Cambridge, 2004. Available at: https://infoscience.epfl.ch/record/169768/files/resp_mar_04_15.pdf

Информация об авторе

Дмитрук Наталия Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: dmitrukn@bsu.by.

Information about the author

Dmitruk Natalia Mikhailovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dmitrukn@bsu.by.