ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 517.9

Поступило в редакцию 15.01.2018
Received 15.01.2018

Л. Б. Княжище

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Аннотация. В работе приведены новые достаточные условия наличия экстремума для функции многих переменных. На основе этих условий установлены новые признаки устойчивости и асимптотической устойчивости градиентных систем.

Ключевые слова: устойчивость, градиентные системы, экстремум, метод Ляпунова

Для цитирования: Княжище, Л. Б. К исследованию устойчивости градиентных систем вторым методом Ляпунова / Л. Б. Княжище // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 1. – С. 13–17.

Leonid B. Knyazhishche

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF GRADIENT SYSTEMS BY THE SECOND LYAPUNOV METHOD

(Communicated by Academician Ivan V. Gaishun)

Abstract. In the article, new sufficient conditions of the extremum of the multivariable functions are shown. New sufficient tests of the stability and the asymptotic stability of gradient systems are stated.

Keywords: stability, gradient systems, extremum, Lyapunov method

For citation: Knyazhishche L. B. Investigation of the stability of gradient systems by the second Lyapunov method. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 13–17 (in Russian).

Введение. При исследовании устойчивости положения равновесия ряда дифференциальных систем вторым методом Ляпунова приходится иметь дело со скалярными функциями многих переменных, в том или ином смысле содержащими информацию о поведении решений в окрестности положения равновесия. При этом достаточно часто существенную роль играет наличие или отсутствие экстремума таких функций в особых точках, положениях равновесия. В связи с этим можно упомянуть, например, теорему Лагранжа–Дирихле об устойчивости для уравнения $\ddot{x} = -\nabla f(x),$ теоремы Ляпунова и Четаева об устойчивости и неустойчивости в гамильтоновых системах, исследование поведения решений градиентных систем. Как правило, существенную роль играет вопрос о знакоопределенности или знакопостоянстве той или иной функции. По сути дела, это вопрос о наличии строгого или нестрогого экстремума в точке покоя [1].

Ниже будет приведено несколько утверждений, которые обобщенно можно назвать достаточными признаками экстремума первого порядка, не использующими значений градиента и, тем более, гессиана в точке экстремума. Кроме того, сформулируем несколько утверждений, иллюстрирующих применение таких признаков при изучении асимптотического поведения решений дифференциальных систем.

Условия экстремума функции многих переменных. Введем несколько обозначений. Пусть U – открытое множество в R_n, содержащее точку $x_0 = 0$. Функция $f : U \to R$ предполагается, если не оговорено иное, непрерывно дифференцируемой по Фреше в U за исключением, возможно, точки $x_0 = 0$.

Нашей первой задачей будет формулирование достаточных признаков наличия минимума и строгого минимума в точке $x_0 = 0$.

В случае, когда для некоторой окрестности $B_\varepsilon = \{x \in R_n \mid \|x\| \le \varepsilon\}$ точки $x_0 = 0$ верно $f(x_0) \le f(x)\ \forall\ \|x\| \in B_\varepsilon$, будем говорить, что в точке $x_0 = 0$ достигается минимум. Если же выполнено неравенство $f(x_0) < f(x)$, то – строгий минимум. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0) = 0$.

Символом $\nabla f(x)$, как обычно, обозначается градиент функции f в точке x. Если зафиксирован некоторый базис в R_n, то $\nabla f(x)$ – вектор частных производных. Если функция дважды дифференцируема в точке x, то определена матрица вторых производных $\nabla^2 f(x)$ – гессиан функции f в точке x. Если x и y из R_n, то (x, y) – скалярное произведение векторов x и y, в координатной форме равное $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Норму $\|x\|$ вектора $x \in R_n$ полагаем равной $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Обозначим $S_r(x_0)$ и $B_r(x_0)$ – сфера и открытый шар в R_n с центром в точке x_0 и радиусом r. Если $x_0 = 0$, то будем x_0 опускать и использовать обозначения S_r и B_r. Луч в R_n, исходящий из точки x_0 с направлением x, т. е. $\{x \in R_n \mid x = x_0 + \alpha x,\ \alpha \ge 0\}$, будем обозначать $l_x(x_0)$, если $x_0 = 0$, то просто l_x. Отметим, что $l_x(x_0) = x_0 + l_x$ в смысле суммы Минковского.

Хорошо известно, что если функция f дифференцируема в точке $x_0 = 0$, то условие $\nabla f(0) = 0$ является необходимым условием экстремума. Это же условие является и достаточным условием локального минимума для выпуклой в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$ функции.

Если f дважды дифференцируема в точке $x_0 = 0$, то условие $\nabla^2 f(x_0) \ge 0$ является необходимым, а условие $\nabla^2 f(x_0) > 0$ – достаточным условием минимума. Знакопостоянство и знакоопределенность матрицы $\nabla^2 f(x_0)$ здесь понимаются в общепринятом для матриц смысле.

Пусть $M(r) = \min_{x \in S} f(x)$ – минимальное значение функции f на сфере S_r и MS_r – множество тех точек на сфере радиуса r, в которых f принимает минимальное на этой сфере значение, равное $M(r)$.

Л е м м а 1. *Пусть f – непрерывно дифференцируема в проколотом шаре B_H и для каждого $0 < r < H$ и любого $x \in MS_r$ верно неравенство*

$$(\nabla f(x), x) \ge 0. \tag{1}$$

Тогда $x_0 = 0$ – точка локального минимума функции f_0. Если же найдется последовательность $\{r_i\}_i^\infty$, такая, что $r_i \le H\ \forall\ i$ и $r_i \to 0$, $i \to 0$ и для любого $x \in MS_{ri}$ верно строгое неравенство

$$(\nabla f(x), x) > 0, \tag{2}$$

то $x_0 = 0$ – точка строго локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о несложно получить, заметив, что множество MS_r – компактно при каждом r и условие (1), как нетрудно показать, гарантирует неубывание функции $M(r)$ на множестве $r \in (0, H)$, а условие (2) – ее монотонное возрастание в некоторой окрестности каждой точки r_i.

З а м е ч а н и е 1. *Условия леммы при изучении точек максимума, очевидно, необходимо изменить следующим образом. Множество MS_r функции $M(r)$ следует строить опираясь на максимальное значение f на сфере S_r, а знаки в неравенствах (1) и (2) заменить на противоположные.*

Отметим, что множество MS_r при каждом r, как правило, будет состоять из небольшого числа точек, однако его явное построение, как и вычленение $M(r)$, достаточно затруднительно.

Пусть $M_1S_r = \{x \in S_r \mid \nabla f(x) = \alpha(x)x,\ \alpha(x) \in R\}$ – множество таких x, для которых градиент f коллинеарен x. Отметим, что $\nabla f(x) = \alpha(x)x$ – необходимое условие экстремума функции f на сфере S_r в точке x.

Л е м м а 2. *Пусть f – непрерывно дифференцируема в проколотом шаре B_H и для каждого $0 < r < H$ и любого $x \in M_1S_r$*

$$\alpha(x) \ge 0, \tag{3}$$

тогда $x_0 = 0$ *– точка локального минимума. Если же найдется последовательность* $\{r_i\}_i^\infty$, *такая, что* $r_i \leq H \; \forall \; i, r_i \to 0, i \to 0$ *и для любого* $x \in MS_{ri}$ *верно строгое неравенство*

$$\alpha(x) > 0 \tag{4}$$

то $x = 0$ *– точка строгого локального минимума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно следует из леммы 1, так как M_1S_r содержит множество MS_r, а из (3) следует (1) и из (4) – (2).

Множество M_1S_r может быть существенно больше множества MS_r, так как в него входят, например, точки максимума функции f на сфере S_r.

Если функция f дважды дифференцируема, то для явного построения множества, меньшего чем M_1S_r, но содержащего MS_r, можно использовать необходимое условие минимума f на сфере S_r второго порядка [2].

Положим $M_2S_r = \{x \in S_r \mid \nabla f(x) = \alpha(x)x$ и $(h, \nabla^2 f(x)h) \geq \alpha(x), \; \forall \; h \in L_x\}$, где $L_x = \{h \in R_n \mid (x, h) = 0 \; \| h \| = 1\}$.

Л е м м а 3. *Пусть* f *– дважды дифференцируема в проколотом шаре* B_H, *для каждого* $0 < r < H$ *и любого* $x \in M_2S_r$ *выполнено (3). Тогда* x_0 *– точка локального минимума. Если найдется последовательность* $\{r_i\}_i^\infty$, *такая что* $r_i \leq H \; \forall \; i, r_\text{i} \to 0, i \to 0$ *и для любого* $x \in M_2S_r$ *верно (4), то* $x_0 = 0$ *– точка строгого локального минимума*.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно, поскольку M_2S_r содержит MS_r.

Для описания достаточно широкого класса функций, для которых в условиях леммы 1, 2 неравенства (1) и (3) не только достаточны, но и необходимы, введем следующие определения.

Пусть l_x – луч в R_n, проходящий через точку x. Будем говорить, что функция $-f$ радиально выпукла в направлении x, если она выпукла на отрезке луча l_x, лежащем в U. Если функция f радиально выпукла в направлении x, то будем говорить, что f – радиально вогнута. Если f радиально выпукла для всех x из некоторого множества, то такую функцию будем называть радиально выпуклой для направлений из этого множества. Наконец, скажем, что функция f радиально сохраняет тип выпуклости на направлениях из некоторого множества, если для каждого направления из этого множества функция либо выпукла, либо вогнута. Говоря просто «радиально выпуклая функция», будем иметь ввиду, что множество направлений, для которых функция радиально выпукла, совпадает с U. Аналогично, для радиально вогнутой и радиально сохраняющей тип выпуклости. Отметим, что выпуклая в U функция f является и радиально выпуклой, а вогнутая – радиально вогнутой. Обратное, очевидно, неверно. Линейную функцию будем относить к выпуклым.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* f *непрерывно дифференцируема в* U *и достигает в точке* $x \in U$ *строгого минимума. Если* f *радиально сохраняет тип выпуклости для всех* $x \in MS_r$ *и для таких* x, *в направлении которых* f *радиально вогнута, верно* $f'_\alpha(\alpha x) \neq 0 \; \forall \; \alpha > 0$, *таких, что* $\alpha x \in U$, *то при любом* $r > 0$ *для всякого* $x \in MS_r$ *верно (2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно, для $x \in MS_r$, таких, что на l_x функция радиально выпукла.

Рассматривая $x \in MS_r$, такие, что f радиально вогнута, отметим, что $f'_\alpha(\alpha x) = \nabla f(\alpha x)x$. Поскольку $f'_\alpha(\alpha x) \neq 0$, то f не достигает максимума на луче l_x, пока он не выходит из U, а значит, $f'_\alpha(\alpha x)$ сохраняет знак на этом луче. Поскольку $f(\alpha x) > f(0)$, то $f'_\alpha(\alpha x) > 0$. Отсюда очевидно, что $\nabla f(x)x > 0$.

З а м е ч а н и е 2. *Если в условиях утверждения 1 заменить множество* MS_r *на множество* M_1S_r *(или на множество* M_2S_r*), то при любом* $r > 0$ *для всякого* $x \in M_1S_r$ *(или* M_2S_r*) будет верно (4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство утверждения (1).

Таким образом, для функций f, радиально сохраняющих тип выпуклости, леммы 1–3 представляют необходимые и достаточные условия строгого максимума.

З а м е ч а н и е 3. *Аналогично доказывается и необходимость условия (1) в лемме 1 и условия (3) в леммах 2, 3, если в точке* $x_0 = 0$ *функция* f *достигает не строгого локального минимума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о для $x \in MS_r$, таких, что $f(\alpha x) > f(0)$, повторяет доказательство утверждения 1 и приводит к более сильному, чем (1) неравенству (2). Если же x таково, что $f(x) = f(0)$, то поскольку f радиально сохраняет тип выпуклости, легко получаем, что $f(\alpha x) = f(0)\ \forall\ \alpha$, такого, что $\alpha x \in U$. Отсюда очевидно, что $\nabla f(x)x = 0$, т. е. выполнено (1) (а в леммах 2, 3 выполнено равенство $\alpha(x) = 0$, т. е. верно (3)).

Условия устойчивости градиентных систем. Рассмотрим градиентную дифференциальную систему

$$\dot{x} = -\nabla f(x),\ \nabla f(x_0) = 0,\ x \in U. \tag{5}$$

Используя в качестве функции Ляпунова $V(x) = f(x)$ и применяя основные положения второго метода Ляпунова, легко получить следующие заключения, заметив, что $\dot{V}(x) = -(\nabla f(x), \nabla f(x))$.

1. Если положение равновесия $x = 0$ системы (5) является точкой локального минимума и изолирована, т. е. в U нет таких точек $x \neq 0$, что $\nabla f(x) = 0$, то $x_0 = 0$ асимптотически устойчиво.

2. Если $x_0 = 0$ – точка строгого локального минимума функции $f(x)$, то положение равновесия $x \equiv 0$ устойчиво.

3. Наличие локального минимума функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$, вообще говоря, не влечет устойчивости [3; 4].

Опираясь на предложенные выше формулировки достаточных условий минимума, можно сформулировать следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема в U, за исключением точки $x = 0$, и $\nabla f(x) = 0$ только при $x = 0$. Если для $x \in U$ из равенства $\nabla f(x) = \alpha(x)x$ следует $\alpha(x) > 0$, то положение равновесия $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.*

У т в е р ж д е н и е 3. *Пусть в системе (5) функция f дважды дифференцируема в U, за исключением точки $x = 0$, и $\nabla f(x) = 0$ только при $x = 0$.*

Если для таких $x \in U$, для которых верно

$$\nabla f(x) = \alpha(x)x, \tag{6}$$

$$(h, \nabla^2 f(x)h) \geq \alpha(x),\ \forall\ h \text{ таких, что } (x, h) = 0,\ \| h \| = 1$$

следует $\alpha(x) > 0$, то положение равновесия $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Аналогичным образом, используя признаки строгого минимума из леммы 2 и 3, можно сформулировать условия устойчивости для системы (5). При этом не следует предполагать, что точка $x = 0$ – изолированная критическая точка, поскольку условия (2), (4) допускают наличие точек x, в которых $\nabla f(x) = 0$ вне множеств $M_1 S_r$ (или $M_2 S_r$).

Приведем здесь формулировку, опирающуюся на лемму 3.

У т в е р ж д е н и е 4. *Пусть функция f дважды дифференцируема. Если найдется последовательность чисел $r_i > 0$, таких, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$ и для таких $x \in U$, что $\| x \| = r_i$ и верны соотношения (6) выполнено неравенство $\alpha(x) > 0$, то положение равновесия $x \equiv 0$ системы (5) устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из того факта, что функция Ляпунова $v(x) = f(x)$ в данном случае оказывается положительно определенной и имеет знакоотрицательную производную в силу системы (5).

В заключение отметим, что представленный в утверждениях 1–3 метод исследования устойчивости допускает обобщения и на ряд других систем, в которых легко удается строить функции со знакопостоянной производной.

Список использованных источников

1. Гайшун, И. В. Условия устойчивости решений автономных вполне интегрируемых уравнений / И. В. Гайшун, Л. Б. Княжище // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 8. – С. 1453–1456.

2. Гороховик, В. В. Конечномерные задачи оптимизации / В. В. Гороховик. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 239 с.

3. Absil, P. A. On the stable equilibrium points of gradient systems / P. A. Absil, K. Kurdyka // Systems & Control Letters. – 2006. – Vol. 55, N 7. – P. 573–577. doi.org/10.1016/j.sysconle.2006.01.002

4. Румянцев, В. В. О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем / В. В. Румянцев, С. П. Сосницкий // Прикл. матем. и мех. – 1993. – Т. 57, № 6. – С. 144–166.

References

1. Gaishun I. V., Knyazhishche L. B. Conditions for the stability of solutions of autonomous completely integrable equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*, 1982, vol. 18, no. 8, pp. 1453–1456 (in Russian).

2. Gorokhovik V. V. *Finite-dimensional optimization tasks.* Minsk, Publishing Center of the Belarusian State University, 2007. 239 p. (in Russian).

3. Absil P. A., Kurdyka K. On the stable equilibrium points of gradient systems. *Systems & Control Letters*, 2006, vol. 55, no. 7, pp. 573–577. doi.org/10.1016/j.sysconle.2006.01.002

4. Rumyantsev V. V., Sosnitskii S. P. The stability of the equilibrium of holonomic conservative systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993. vol. 57, no. 6, pp. 1101–1122. doi.org/10.1016/0021-8928(93)90088-4

Информация об авторе

Княжище Леонид Болеславович – д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: klb@im.bas-net.by.

Information about the author

Knyazhishche Leonid Boleslavovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Leading reseacher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: klb@im.bas-net.by.