ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 511.42

Поступило в редакцию 22.01.2018
Received 22.01.2018

А. С. Кудин

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ОБ ОЦЕНКАХ ВЕЛИЧИН РЕЗУЛЬТАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ БЕЗ ОБЩИХ КОРНЕЙ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Аннотация. В данной работе мы усиливаем и обобщаем известную лемму из монографии А. О. Гельфонда «Трансцендентные и алгебраические числа» об оценке порядка одновременной аппроксимации нуля значениями двух целочисленных полиномов без общих корней. В лемме Гельфонда утверждается, что если два целочисленных полинома P_1 и P_2 степени не более n_1 и n_2 и высоты не более Q^{μ_1} и Q^{μ_2} соответственно, не имеющие общих корней, принимают в некоторой трансцендентной точке $x \in \mathbb{R}$ значения $|P_1(x)| < Q^{-\tau_1}$ и $|P_2(x)| < Q^{-\tau_2}$, то $\min(\tau_1, \tau_2) < n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta$. Лемма Гельфонда и ее аналоги имеют важные приложения во многих проблемах метрической теории диофантовых приближений. Одно из них – результат В. И. Берника 1983 года об оценке сверху размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности, который вместе с результатом А. Бейкера и В. Шмидта 1970 года об оценке снизу размерности Хаусдорфа позволил найти ее точное значение. В своей работе В. И. Берник усилил лемму Гельфонда, рассматривая значения полиномов степени не более n и высоты не более Q^{μ} на некотором интервале длины $Q^{-\eta}$ и получая более сильное неравенство $\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta$, $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$. Однако область применения результата В. И. Берника была несколько ограничена из-за необходимости рассматривать одинаковые оценки степени и высоты полиномов. В данной работе мы рассматриваем значения полиномов различной степени и высоты на интервале и получаем более сильную оценку, используя производные более высоких порядков, что усиливает и обобщает лемму А. О. Гельфонда и существующие аналогичные результаты. В работе используются методы теории трансцендентных чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, трансцендентные числа, результант, лемма Гельфонда, гипотеза Вирзинга

Для цитирования: Кудин, А. С. Об оценках величин результантов целочисленных полиномов без общих корней / А. С. Кудин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 1. – С. 18–23.

Alexey S. Kudin

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON THE ESTIMATES OF RESULTANT VALUES OF INTEGER POLYNOMIALS WITHOUT COMMON ROOTS

(Communicated by Academician Ivan V. Gaishun)

Abstract. In the article we present an improvement to the lemma on the order of simultaneous zero approximation by the values of two integer polynomials without common roots from A. O. Gelfond's monograph "Transcendental and algebraic numbers". The lemma says that if two integer polynomials P_1 and P_2 of degree not exceeding n_1 and n_2 and of height not exceeding Q^{μ_1} and Q^{μ_2} respectively having no roots in common take values $|P_1(x)| < Q^{-\tau_1}$ and $|P_2(x)| < Q^{-\tau_2}$ at some transcendental point $x \in \mathbb{R}$, then $\min(\tau_1, \tau_2) < n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta$. Gelfond's lemma and similar results have important applications to many problems of the metric theory of Diophantine approximation. One of such applications is the result due to V. Bernik (1983) on the upper bound for the Hausdorff dimension of the set of real numbers with specified order of zero approximation by the values of integer polynomials. This result along with the result of A. Baker and W. Schmidt (1970) on the lower bound of the Hausdorff dimension of the set mentioned above gives the exact formula. In order to prove the upper bound V. Bernik improved and extended Gelfond's lemma by considering the values of polynomials of degree not exceeding n and of height not exceeding Q^{μ} on some interval of length $Q^{-\eta}$ and obtaining a stronger inequality $\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta$, $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$. However, the need to consider the same estimates for the degree and height of the polynomials is still restrictive and limits the range of problems this result could be applied to. In our work we consider the values of polynomials of different degrees and heights on an interval and obtain a stronger estimate by using higher order derivatives, thus improving and extending Gelfond's lemma and existing similar results. The result is obtained using the methods of the theory of transcendental numbers.

Keywords: Diophantine approximation, Hausdorff dimension, transcendental numbers, resultant, Gelfond's lemma, Wirsing's hypothesis

For citation: Kudin A. S. On the estimates of resultant values of integer polynomials without common roots. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 18–23 (in Russian).

В монографии А. О. Гельфонда [1] приведена одна лемма, которая утверждает, что два целочисленных полинома без общих корней не могут одновременно принимать слишком малые ненулевые значения в одной точке. Гельфонд использовал ее в своем методе доказательства трансцендентности некоторых чисел. В дальнейшем данная лемма и утверждения, ее усиливающие, нашли широкое применение в метрической теории чисел.

Пусть $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ – целочисленный полином степени $\deg P=n$ и высоты $H(P)=\max_{0\le i\le n}|a_i|$. Обозначим как $\mathcal{P}_n$ множество целочисленных полиномов степени не более n и как $\mathcal{P}_n(Q)$ множество целочисленных полиномов степени не более n и высоты не более Q. Пусть $\mu(A)$ – мера Лебега измеримого множества $A\subset\mathbb{R}$. Запись $f\ll_{v_1,v_2,\ldots} g$ будет означать, что существует некоторая величина $C>0$ такая, что $f<Cg$. При этом величина C может зависеть от величин $v_1,v_2,\ldots,$ но не зависит от f и g. Как $\mathrm{res}(P_1,P_2)$ будем обозначать результант полиномов P_1 и P_2. В дальнейшем будем считать, что полиномы $T_1(x)$ и $T_2(x)$ имеют коэффициенты и корни, соответственно,

$$T_1(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n_1}x^{n_1}=a_{n_1}(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n_1}),\quad a_{n_1}\ne 0,$$
$$T_2(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{n_2}x^{n_2}=b_{n_2}(x-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_{n_2}),\quad b_{n_2}\ne 0.$$

Вышеупомянутую лемму Гельфонда можно сформулировать следующим образом.

Л е м м а 1 [1, лемма V, с. 181]. *Пусть $\delta>0$ – некоторое действительное число, n_1,n_2 – натуральные числа, $Q>Q_0(n,\delta)$ – достаточно большое действительное число. Далее пусть $P_1(x)\in\mathcal{P}_{n_1}(Q^{\mu_1})$, $P_2(x)\in\mathcal{P}_{n_2}(Q^{\mu_2})$, $\mu_1,\mu_2>0$ – полиномы без общих корней. Тогда, если для некоторого трансцендентного α выполняются неравенства $|P_1(\alpha)|<Q^{-\tau_1}$, $|P_2(\alpha)|<Q^{-\tau_2}$, то*

$$\min(\tau_1,\tau_2)<n_1\mu_2+n_2\mu_1+\delta.$$

В дальнейшем лемма Гельфонда была усилена В. И. Берником [2], что позволило ему доказать гипотезу А. Бейкера и В. Шмидта [3] о точном значении размерности Хаусдорфа множества всех $x\in\mathbb{R}$, для которых существует бесконечное число полиномов $P\in\mathcal{P}_n$, удовлетворяющих неравенству $|P(x)|<H(P)^{-w}$, $w>n$.

Т е о р е м а 1 [2, лемма 12]. *Пусть $\delta>0$ – некоторое действительное число, n – натуральное, $Q>Q_0(n,\delta)$ – достаточно большое действительное число. Далее пусть $P_1(x),P_2(x)\in\mathcal{P}_n(Q^{\mu})$, $\mu>0$ – полиномы без общих корней. Тогда, если для всех x из некоторого интервала $I\subset(-n,n)$, $|I|=Q^{-\eta}$, $\eta>0$, выполняются неравенства $\max(|P_1(x)|,|P_2(x)|)<Q^{-\tau}$, $\tau>0$, то*

$$\tau+\mu+2\max(\tau+\mu-\eta,0)<2\mu n+\delta.$$

Также в работе К. И. Тищенко [4] доказывается аналог леммы Гельфонда с использованием производных первого порядка, что позволило автору добиться [4; 5] улучшения результатов Е. Вирзинга [6].

Некоторые ограничения для применения теоремы 1 возникают из-за необходимости рассматривать одинаковые оценки степени и высоты полиномов. В данной работе мы развиваем методы Тищенко [4] и усиливаем теорему 1, используя производные более высоких порядков и рассматривая полиномы с разными оценками степени и высоты.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\delta>0$ – некоторое действительное число, $1\le n_1\le n_2\le n$ – натуральные числа, $Q>Q_0(n,\delta)$ – достаточно большое действительное число, $P_1(x)\in\mathcal{P}_{n_1}$, $P_2(x)\in\mathcal{P}_{n_2}$ – полиномы без общих корней, $H(P_1(x))\ll_n Q^{\mu_1}$, $H(P_2(x))\ll_n Q^{\mu_2}$, $\mu_1,\mu_2>0$. Тогда, если для всех x из некоторого интервала $I\subset(-c_1(n),c_1(n))$, $|I|\asymp_n Q^{-\eta}$, $\eta>0$, выполняются неравенства $|P_1(x)|\ll_n Q^{-\tau_1}$, $|P_2(x)|\ll_n Q^{-\tau_2}$, $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}$, то*

$$\hat{\tau}+2\sum_{j=1}^{n_1-1}\max(\hat{\tau}-j\eta,0)+(1+n_2-n_1)\max(\hat{\tau}-n_1\eta,0)<n_1\mu_2+n_2\mu_1+\delta, \tag{1}$$

где

$$\hat{\tau}=\min(\tau_1+\mu_1,\tau_2+\mu_2).$$

В доказательстве теоремы 2 будут использоваться следующие утверждения.

Л е м м а 2. *Пусть даны полиномы* $T_1(x), T_2(x)\in\mathbb{C}[x]$ *степени* $1\le n_1\le n_2$ *вместе с оценками величин их коэффициентов*

$$\left|a_l\right|\le L_l,\quad l=0,\dots,n_1,$$
$$\left|b_l\right|\le L_l,\quad l=0,\dots,n_2,$$

где L_l *удовлетворяют условиям*

$$0<L_0\le L_1\le\dots\le L_{n_2},$$
$$\frac{L_0}{L_1}\le\frac{L_1}{L_2}\le\dots\le\frac{L_{n_2-1}}{L_{n_2}}. \tag{2}$$

Тогда величина результанта $\operatorname{res}(T_1,T_2)$ *заданных полиномов оценивается как*

$$\left|\operatorname{res}(T_1,T_2)\right|\le(n_1+n_2)!\cdot\overline{R},$$

где

$$\overline{R}=L_0(L_1\cdot\ldots\cdot L_{n_1-1})^2 L_{n_1}{}^{1+n_2-n_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем результант $\operatorname{res}(T_1,T_2)$ как определитель матрицы Сильвестра полиномов T_1 и T_2:

$$M=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n_1} & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & & \cdots & a_{n_1}\end{matrix}\right\}n_2 \\ \left.\begin{matrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & & \cdots & b_{n_2}\end{matrix}\right\}n_1 \end{pmatrix}=(m_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n_1+n_2\\ j=1,\dots,n_1+n_2}},$$

$$\operatorname{res}(T_1,T_2)=\det M=\sum_{\sigma\in S_{n_1+n_2}}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{n_1+n_2}m_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in S_{n_1+n_2}}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{j=1}^{n_1+n_2}m_{\sigma(j),j},$$

где $\operatorname{sgn}\sigma$ – знак перестановки σ.

Дополнительно определим величины L_l при $l=-n_2+1,\dots,-1$ и $l=n_2+1,\dots,n_1+n_2-1$ так, чтобы выполнялись аналоги условий (2):

$$0<L_{-n_2+1}\le\dots\le L_0\le L_1\le\dots\le L_{n_2}\le\dots\le L_{n_1+n_2-1},$$
$$\frac{L_{-n_2+1}}{L_{-n_2+2}}=\dots=\frac{L_{-1}}{L_0}=\frac{L_0}{L_1}\le\frac{L_1}{L_2}\le\dots\le\frac{L_{n_2-1}}{L_{n_2}}=\frac{L_{n_2}}{L_{n_2+1}}=\dots=\frac{L_{n_1+n_2-2}}{L_{n_1+n_2-1}}. \tag{3}$$

Из свойства (3) непосредственно следует, что для любых индексов $-n_2+1\le l_1,l_2,l_3,l_4\le n_1+n_2-1$, удовлетворяющих условиям $l_1\le l_3$ и $l_1-l_2=l_3-l_4<0$, справедливо

$$\frac{L_{l_1}}{L_{l_2}}=\frac{L_{l_1}}{L_{l_1+1}}\frac{L_{l_1+1}}{L_{l_1+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{L_{l_2-1}}{L_{l_2}}\le\frac{L_{l_3}}{L_{l_3+1}}\frac{L_{l_3+1}}{L_{l_3+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{L_{l_4-1}}{L_{l_4}}=\frac{L_{l_3}}{L_{l_4}}. \tag{4}$$

Определим матрицу $\overline{M}=(\overline{m}_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n_1+n_2\\ j=1,\dots,n_1+n_2}}$,

$$\overline{m}_{i,j}=\begin{cases}L_{-i+j}, & i\le n_2,\\ L_{-i+j+n_2}, & i>n_2,\end{cases}$$

заменяя в матрице Сильвестра M коэффициенты полиномов их оценками L_l, а нулевые элементы заменяя на дополнительно определенные величины L_l.

Из определения $\overline{M}$ следует, что для любой перестановки $\sigma\in S_{n_1+n_2}$ имеет место

$$\left|\prod_{j=1}^{n_1+n_2} m_{\sigma(j),j}\right|\le\left|\prod_{j=1}^{n_1+n_2}\overline{m}_{\sigma(j),j}\right|,$$

поэтому для доказательства леммы достаточно доказать справедливость оценки

$$\overline{\Pi}(\sigma)=\left|\prod_{j=1}^{n_1+n_2}\overline{m}_{\sigma(j),j}\right|\le\overline{R}. \qquad (5)$$

Заметим, что если для $\sigma\in S_{n_1+n_2}$ при $1\le j_1<j_2\le n_1+n_2$ выполняется одно из неравенств $n_2\ge\sigma(j_1)>\sigma(j_2)$ или $\sigma(j_1)>\sigma(j_2)>n_2$, то для перестановки $\sigma'=(\sigma(j_1)\sigma(j_2))\sigma$ справедливо

$$\overline{\Pi}(\sigma)\le\overline{\Pi}(\sigma'). \qquad (5)$$

Рассмотрим, например, случай $n_2\ge\sigma(j_1)>\sigma(j_2)$. Второй случай рассматривается аналогично. Неравенство (5) сводится к неравенству $L_{-\sigma(j_1)+j_1}L_{-\sigma(j_2)+j_2}\le L_{-\sigma(j_2)+j_1}L_{-\sigma(j_1)+j_2}$, которое выполняется в силу (4), если взять $l_1=-\sigma(j_1)+j_1$, $l_2=-\sigma(j_1)+j_2$, $l_3=-\sigma(j_2)+j_1$, $l_4=-\sigma(j_2)+j_2$.

Также заметим, что если для $\sigma\in S_{n_1+n_2}$ при $1\le j_1,j_2\le n_1+n_2$ выполняется неравенство $\sigma(j_1)+n_2=\sigma(j_2)$, то для перестановки $\sigma'=(\sigma(j_1)\sigma(j_2))\sigma$ справедливо

$$\overline{\Pi}(\sigma)=\overline{\Pi}(\sigma'). \qquad (6)$$

Пусть $\sigma\in S_{n_1+n_2}$ – некоторая перестановка. Начиная с первого столбца, используя свойства (5) и (6), будем последовательно переходить от перестановки σ к перестановкам σ_j, дающим максимальное значение $\overline{m}_{\sigma_j(j),j}$ в j-м столбце. Таким образом, получим цепочку $\overline{\Pi}(\sigma)\le\overline{\Pi}(\sigma_1)\le\ldots\le\overline{\Pi}(\sigma_{n_1+n_2})$, где

$$\sigma_{n_1+n_2}(j)=\begin{cases}\dfrac{j}{2}+\dfrac{1}{2}, & j\le 2n_1\wedge j\notin 2\mathbb{Z},\\[2mm] \dfrac{j}{2}+n_2, & j\le 2n_1\wedge j\in 2\mathbb{Z},\\[2mm] j-n_1, & j>2n_1,\end{cases}$$

откуда $\overline{\Pi}(\sigma_{n_1+n_2}(j))=\overline{R}$. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3 [4, лемма 3.3]. *Пусть даны полиномы* $T_1(x),T_2(x)\in\mathbb{C}[x]$, *а также некоторая точка* $\xi\in\mathbb{C}$. *Тогда результант полиномов* $T_1(x)$ *и* $T_2(x)$ *равен результанту полиномов* $\overline{T}_1(x)=T_1(x+\xi)$ *и* $\overline{T}_2(x)=T_2(x+\xi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что

$$\operatorname{res}(T_1(x),T_2(x))=a_{n_1}^{n_2}b_{n_2}^{n_1}\prod_{\substack{1\le i\le n_1\\1\le j\le n_2}}(\alpha_i-\beta_j)=a_{n_1}^{n_2}b_{n_2}^{n_1}\prod_{\substack{1\le i\le n_1\\1\le j\le n_2}}((\alpha_i-\xi)-(\beta_j-\xi))=\operatorname{res}(\overline{T}_1(x),\overline{T}_2(x)).$$

Лемма 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть $\deg P_1(x)=m_1\le n_1$, $\deg P_2(x)=m_2\le n_2$. Полиномы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ в совокупности имеют не более $2n$ корней, поэтому найдутся два различных, отличных от данных корней, целых числа $|r_1|,|r_2|\ll_n 1$. Введем целочисленные полиномы $T_k(x)=P_k(x)(x-r_k)^{n_k-m_k}$, $k=1,2.$ Нетрудно убедиться, что для них справедливы те же оценки высоты и значений на интервале I:

$$\deg T_k(x)=n_k,\quad H(T_k(x))\ll_n Q^{\mu_k},\quad \forall x\in I:\left|T_k(x)\right|\ll_n Q^{-\tau_k},\quad k=1,2.$$

Так как целочисленные полиномы $T_1(x)$ и $T_2(x)$ не имеют общих корней, $0\neq \operatorname{res}(T_1(x), T_2(x))\in\mathbb{Z}$, следовательно,

$$1\le\left|\operatorname{res}(T_1(x),T_2(x))\right|.$$

Найдется величина $c_2(n)>0$ и трансцендентная точка $\xi\in I$ такая, что $\left|\xi-\gamma\right|\ge c_2(n)\mu I$ для любого корня $\gamma=\alpha_1,\dots,\alpha_{n_1},\beta_1,\dots,\beta_{n_2}$, в противном случае можно покрыть интервал I интервалами вида $I_\gamma=\{x\in\mathbb{R}:\left|x-\gamma\right|<c_2(n)\mu I\}$ для сколь угодно малого $c_2(n)>0$, что приводит к противоречию. Следовательно, величины производных $\left|T_k{}^{(s)}(\xi)\right|$ можно оценить как

$$\left|T_k{}^{(s)}(\xi)\right|\ll_n Q^{-\tau_k+s\eta},\ k=1,2,\ s=0,\dots,n_k.$$

Например, получим данную оценку для полинома $T_1(x)$:

$$\left|T_1{}^{(s)}(\xi)\right|=\left|a_{n_1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n_1-s}\le n_1} s!\cdot(\xi-\alpha_{i_1})\cdot\ldots\cdot(\xi-\alpha_{i_{n_1-s}})\right|\ll_n\frac{\left|a_{n_1}(\xi-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(\xi-\alpha_{n_1})\right|}{(\mu I)^s}\ll_n Q^{-\tau_1+s\eta}.$$

Используем лемму 3 в точке $\xi\in I.$ Нетрудно убедиться, используя ряд Тейлора, что полиномы $\overline{T}_k(x)$ имеют коэффициенты $T_k{}^{(0)}(\xi),\frac{1}{1!}T_k{}^{(1)}(\xi),\dots,\frac{1}{n_k!}T_k{}^{(n_k)}(\xi).$ Поделим строки матрицы Сильвестра полиномов $\overline{T}_1(x)$ и $\overline{T}_2(x)$ на Q^{μ_1} и Q^{μ_2}. Тогда

$$\operatorname{res}(T_1(x),T_2(x))=\operatorname{res}(\overline{T}_1(x),\overline{T}_2(x))=\det M\cdot Q^{n_1\mu_2+n_2\mu_1},$$

где

$$M=\left(\begin{array}{cccccc} T_1(\xi)Q^{-\mu_1} & \cdots & \frac{1}{n_1!}T_1{}^{(n_1)}(\xi)Q^{-\mu_1} & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & T_1(\xi)Q^{-\mu_1} & \cdots & \frac{1}{n_1!}T_1{}^{(n_1)}(\xi)Q^{-\mu_1} & \\ T_2(\xi)Q^{-\mu_2} & \cdots & \frac{1}{n_2!}T_2{}^{(n_2)}(\xi)Q^{-\mu_2} & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & T_2(\xi)Q^{-\mu_2} & \cdots & \frac{1}{n_2!}T_2{}^{(n_2)}(\xi)Q^{-\mu_2} & \end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}n_2\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}n_1\end{array}=(m_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n_1+n_2\\ j=1,\dots,n_1+n_2}}.$$

Пусть

$$\hat{\tau}=\min(\tau_1+\mu_1,\tau_2+\mu_2),$$

$$L_s=c_3(n)\min(1,Q^{-\hat{\tau}+s\eta}),\ s=0,\dots,n_2.$$

Тогда при подходящем выборе $c_3(n)$ для величин $T_k{}^{(s)}(\xi)Q^{-\mu_k}$ справедливы оценки

$$\left|T_k{}^{(s)}(\xi)Q^{-\mu_k}\right|\le L_s,\ k=1,2,\ s=0,\dots,n_k.$$

Также нетрудно убедиться, что для L_s выполняются свойства (2), что позволяет оценить определитель матрицы M с помощью леммы 2. Получим неравенство

$$1 \ll_n L_0 (L_1 \cdot \ldots \cdot L_{n_1-1})^2 L_{n_1}{}^{1+n_2-n_1} Q^{n_1\mu_2+n_2\mu_1},$$

$$\max(1, Q^{\hat{\tau}})(\max(1, Q^{\hat{\tau}-\eta}) \cdot \ldots \cdot \max(1, Q^{\hat{\tau}-(n_1-1)\eta}))^2 \max(1, Q^{\hat{\tau}-n_1\eta})^{1+n_2-n_1} \ll_n Q^{n_1\mu_2+n_2\mu_1}.$$

Оценивая скрытую в символе Виноградова константу как Q^{δ} и переходя к логарифмам по основанию Q, получим неравенство (1). Теорема 2 доказана.

Список использованных источников

1. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – Москва: ГИТТЛ, 1952. – 224 с.

2. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.

3. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proceedings of the London Mathematical Society (3). – 1970. – Vol. 21. – P. 1–11. doi.org/10.1112/plms/s3-21.1.1

4. Tishchenko, K. I. On approximation to real numbers by algebraic numbers / K. I. Tishchenko // Acta Arithmetica. – 2000. – Vol. 94, N 1. – P. 1–24.

5. Tsishchanka, K. I. On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree / K. I. Tishchenko // Journal of Number Theory. – 2007. – Vol. 123, N 2. – P. 290–314. doi.org/10.1016/j.jnt.2006.07.012

6. Wirsing, E. Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades / E. Wirsing // J. Reine Angew. Math. – 1961. – Vol. 206. – P. 67–77. doi.org/10.1515/crll.1961.206.67

References

1. Gelfond A. O. *Transcendental and algebraic numbers*. Moscow, GITTL Publ., 1952. 224 p. (in Russian).

2. Bernik V. I. Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation. *Acta Arithmetica*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian).

3. Baker A., Schmidt W. M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), 1970, vol. 21, pp. 1–11. doi.org/10.1112/plms/s3-21.1.1

4. Tishchenko K. I. On approximation to real numbers by algebraic numbers. *Acta Arithmetica*, 2000, vol. 94, no. 1, pp. 1–24.

5. Tsishchanka K. I. On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree. *Journal of Number Theory*, 2007, vol. 123, no. 2, pp. 290–314. doi.org/10.1016/j.jnt.2006.07.012

6. Wirsing E. Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1961, vol. 206, pp. 67–77 (in German). doi.org/10.1515/crll.1961.206.67

Информация об авторе

Кудин Алексей Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: knxd@yandex.ru.

Information about the author

Kudin Alexey Sergeevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: knxd@yandex.ru.