ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 524.6;531

Поступило в редакцию 28.12.2017
Received 28.12.2017

Член-корреспондент Л. М. Томильчик

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

К ВОПРОСУ ОБ ЭНЕРГИИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Аннотация. На основе использования известного условия равновесия двух невращающихся шварцшильдовых черных дыр получено феноменологическое релятивистски мотивированное аналитическое выражение для энергии двухчастичного гравитационного взаимодействия пространственно локализованных масс. Показано, что наличие максимальной силы Гиббонса устраняет координатную сингулярность, существующую в исходном общерелятивистском соотношении, в силу чего найденное выражение для энергии вообще свободно от сингулярностей и имеет конечный минимум. Установлено наличие явной зависимости предельной силы двухчастичного взаимодействия от отношения масс конституентов.

Ключевые слова: невращающиеся черные дыры, максимальная сила, отсутствие сингулярностей, минимум энергии двухчастичного взаимодействия

Для цитирования: Томильчик, Л. М. К вопросу об энергии двухчастичного гравитационного взаимодействия / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 1. – С. 41–50.

Corresponding Member Lev M. Tomilchik

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON THE TWO-PARTICLE GRAVITATIONAL INTERACTION ENERGY PROBLEM

Abstract. The generally relativistic motivated explicit analytic expression describing the interacting energy of the pair of nonpoint-like non-spinning masses is found. It is shown that Gibbons' maximum tension principle allows us to remove the co-ordinate singularities so that the energy of the gravitational two-particle interaction possesses a numerically bounded minimum. It is shown that Gibbons' maximum force treated in a purely mechanical context possesses the explicit parametric dependence on the interacting mass ratio.

Keywords: Schwarzschild black wholes, Maximum force, singularities abolition, bounded energy interaction minimum

For citation: Tomilchik L. M. On the two-particle gravitational interaction energy problem. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 41–50 (in Russian).

Введение. Как известно, в традиционной общерелятивистской теории гравитации (General Relativity – GR) существует проблема с определением трансформационных свойств тензора энергии-импульса гравитационного поля. С другой стороны, понятия силы (Закон Всемирного Тяготения – ЗВТ) и энергии взаимодействия двух точечных масс, хорошо определенные в ньютоновой теории, не допускают непротиворечивого релятивистского обобщения. Кроме того, в исходном двухчастичном варианте и ЗВТ Ньютона и соответствующее выражение для потенциальной энергии взаимодействия сингулярны в нуле, в силу чего устойчивое статическое состояние в такого рода системе оказывается невозможным.

В то же время наличие в ней ненулевого межчастичного расстояния между конституентами и, соответственно, конечного энергетического минимума очевидным образом следует из принципа максимального натяжения (Maximum Tension Principle – MTP), предложенного Гиббонсом [1] (см. также [2; 3]), в соответствии с которым допустимая численная величина силы двухчастичного гравитационного притяжения ограничена сверху значением обратной гравитационной константы Эйнштейна (максимальная сила – Maximum Force – MF).

Проблема, однако, заключается в отыскании конкретной формы подобного ограничения. Так, минимальное расстояние, равное среднему квадратичному гравитационных радиусов тяготеющих масс, возникает немедленно, если приравнять, как это сделано в [4], ньютоново выражение для ЗВТ максимальной силе Гиббонса.

Однако такого рода прием не может считаться удовлетворительным, поскольку сам по себе носит характер типичной гипотезы ad hoc, оставляющей к тому же открытым вопрос о явной аналитической структуре искомого обобщения ЗВТ Ньютона. Более перспективным в этом плане выглядит ориентация на известное общерелятивистское выражение (см., напр., [5; 6]) для силы гравитационного взаимодействия двух находящихся в состоянии равновесия невращающихся шварцшильдовых черных дыр, которое асимптотически переходит в традиционную формулу для ЗВТ Ньютона.

В настоящей работе рассмотрены чисто механические аспекты МТР Гиббонса, и на этой основе получено явное аналитическое выражение для энергии гравитационного взаимодействия двух пространственно локализованных невращающихся масс. Найденное выражение не содержит сингулярностей, что соответствует наличию конечного минимума энергии в такой системе.

Теоретическая часть. Будем исходить из выражения, определяющего силу $f_N^{(GR)}$, уравновешивающую взаимное притяжение двух невращающихся шварцшильдовых черных дыр [5; 6]

$$f_N^{(GR)} = f_N^{(GR)}(R; a, b) = F_0 \frac{b}{R^2 - a^2}, \tag{1}$$

где R – радиальная координата Шварцшильда; $F_0 = \frac{c^4}{G_N}$ (c – скорость света; G_N – гравитационная постоянная Ньютона); $a = R_1 + R_2, b = R_1 R_2$;

$$R_\alpha = \frac{m_\alpha G_N}{c^2}, \quad \alpha = 1, 2; \tag{2}$$

m_1, m_2 – массы покоя; размерность параметров R_α – [длина]. Комбинация $F_0 = \frac{c^4}{G_N}$ фундаментальных констант c и G_N имеет размерность силы. В [5] и [6] область изменения радиальной переменной полагается открытой полубесконечной ($R > a$). Выражение (1) асимптотически (при $R \gg a$) переходит в формулу, соответствующую ЗВТ Ньютона, и стремится к ∞ при $R \to R_0 = a$. Во избежание возможных недоразумений подчеркнем, что в исходном контексте ОТО формула (1) определяет силу, которая уравновешивает притяжение двух черных дыр, т. е. имеет положительный знак.

Мы примем выражение (1) в качестве некоторого феноменологического, релятивистски мотивированного двухпараметрического обобщения ЗВТ Ньютона и будем рассматривать его в чисто механическом контексте, т. е. когда параметры m_1 и m_2 обозначают (невращающиеся!) массы покоя, параметры R_1 и R_2, однозначно определяемые на основе соотношений (2), – их размеры (радиусы соответствующих сфер), а переменная R определяет (координатное) расстояние между их центрами. Будем также предполагать, что аналитическое выражение для функции $U_{gr}^{(GR)}(R)$, определяющее энергию гравитационного взаимодействия двух таких сфер, задается следующим интегралом:

$$U_{gr}^{(GR)}(R) \overset{\text{def}}{=} \int f_N dR. \tag{3}$$

Очевидно, что учет собственного вращения масс потребует ориентации не на формулу (1), а на соответствующее общерелятивистское («двухчастичное») выражение для *вращающихся* черных дыр (решение Керра).

В целях дальнейшего исследования удобно ввести обозначение для массы – символ $\boldsymbol{M}$. Тогда

$$m_1 = \boldsymbol{M}_{\text{major}} = M \quad \text{(бóльшая масса)}, \tag{4a}$$

$$m_2 = \boldsymbol{M}_{\text{minor}} = m \quad \text{(ме́ньшая масса).}$$

Введем также безразмерный параметр – отношение масс

$$\delta = \frac{m}{M} \tag{4b}$$

с областью определения

$$\delta_0 \le \delta \le 1,$$

где минимальное (ненулевое!) значение параметра $\delta_0 = \delta_{\min}$

$$\delta_0 = \frac{m_{\min} \ne 0}{M_{\max} \ne \infty} \ll 1$$

определено как отношение предельно малой массы покоя к предельно большой (существование которых является специальным предположением, его необходимость и следствия из него будут обсуждены ниже).

Выпишем явно также выражения для параметров a, b и их отношения в новой параметризации:

$$a = \frac{G_N}{c^2}(M + m) = \frac{G_N}{c^2}\boldsymbol{M}_+ = \frac{MG_N}{c^2}(1+\delta), \tag{4c}$$

где $\boldsymbol{M}_+ = M + m = M(1+\delta)$ – суммарная масса;

$$b = \left(\frac{G_N}{c^2}\right)^2 Mm = \left(\frac{MG_N}{c^2}\right)^2 \delta; \tag{4d}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{G_N}{c^2}\frac{Mm}{M+m} = \frac{\mu G_N}{c^2} = \frac{MG_N}{c^2}\frac{\delta}{1+\delta}, \tag{4e}$$

$$æ = \frac{b}{a^2} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{\mu}{\mathbf{M}_+} = \frac{\delta}{(1+\delta)^2}, \tag{4f}$$

где $\mu = \frac{mM}{M+m} = \frac{M\delta}{1+\delta}$ – приведенная масса.

Заметим, что в силу известного алгебраического соотношения $\frac{1}{2}(p+q) \ge (pq)^{\frac{1}{2}}$, справедливого для любой пары конечных положительных чисел p и q, параметр æ может принимать конечные численные значения в области

$$\frac{\delta_0}{(1-\delta_0)^2} \le æ \le \frac{1}{4}.$$

Обратимся к выражению (1). В формально-математическом плане функция $f_N^{(GR)}$ хорошо определена во всей несвязной области изменения переменной

$$0 \le R < \infty,$$

исключая особую точку $R_{\text{sing}} = a = R_1 + R_2$, которая разделяет эту область на две односвязные компоненты. Условимся кратко называть их *внешней* ($R > a$, вариант A) и *внутренней* ($R < a$ вариант B). Очевидно, что вариант A соответствует обобщению ньютоновой картины на тот случай, когда области локализации каждой из масс M и m не пересекаются и не имеют точек соприкосновения. С другой стороны, как хорошо известно, в ньютоновой гравидинамике взаимодействие тяготеющих масс в той ситуации, когда пробная масса m находится внутри массивного шара, масса которого M распределена равномерно, на массу m действует эффективная сила квазиупругого типа, порождающая ее гармонические колебания.

Поэтому вариант B будем в дальнейшем интерпретировать как искомое обобщение именно данной ньютоновой ситуации.

Учтем теперь наличие МТР Гиббонса. Рассмотрим вначале вариант A. Условие существования максимальной силы, записанное в виде

$$f_N^{(GR)}(R; a, b)\Big|_{\max} \equiv f_N^{(GR)}(R_{\min}^{(+)}; a, b) = F_0,$$

немедленно приводит к соотношению

$$R_{\min}^{2(+)} - a^2 = b.$$

Из него с учетом обозначений (4a)–(4f) следует выражение

$$R_{\min}^{(+)} = a\{1+æ\}^{\frac{1}{2}} = M\frac{G_N}{c^2}(1+\delta)\left\{1+\frac{\delta}{(1+\delta)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

определяющее то предельное значение радиальной переменной $R = R_{\min}$ («расстояние», до которого могут сблизиться центры двух тяготеющих масс). Поскольку допустимые значения параметра æ ограничены снизу величиной $æ_{\min} = \frac{\delta_0}{(1+\delta_0)^2} \neq 0$, то, как следует из (5), $R_{\min}^{(+)}$ всегда превосходит $R_{\text{sing}} = R_1 + R_2$. Это означает, что предельные значения радиальной переменной, зависящие от параметра $\delta = \frac{m}{M}$, всегда лежат выше сингулярности, причем величина $\Delta R_{\max}^{(+)}$ наибольшего удаления от нее возникает в случае равных масс $(m = M = \overline{m})$ и составляет

$$\Delta R_{\max}^{(+)} = \left(\sqrt{\frac{5}{4}} - 1\right)\frac{2\overline{m}G_N}{c^2} \cong 0{,}118 R_g(\overline{m}),$$

где $R_g(\overline{m})$ – радиус Шварцшильда.

Как нетрудно видеть, максимальное значение ньютоновой силы взаимного притяжения $f_N^{(\lim)} = -\frac{G_N mM}{R^2}$ в точке $R = R_{\lim}^{(+)}$, определяемой (5), задается следующим соотношением:

$$f_N^{\lim}(æ) = -\frac{æ}{1+æ}\frac{c^4}{G_N}, \tag{6}$$

где параметр æ определяется формулой (4f).

Полученное соотношение показывает, что выражение для силы ньютонова притяжения двух масс, релятивистски модифицированное с учетом предела Гиббонса, фактически содержит явную зависимость от безразмерного параметра $\delta = m/M$, т. е. от отношения масс конституентов «бинарного» взаимодействия. Это весьма существенная деталь, поскольку из формулы (6) следуют экспериментально проверяемые выводы. Прежде всего, соотношения

$$W_m \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\left|f_N^{\lim}\right| = \frac{c^4}{MG_N}\gamma(\delta),$$

$$W_M \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta}{M}\left|f_N^{\lim}\right| = \frac{\delta c^4}{MG_N}\gamma(\delta),$$

где $\gamma(\delta) = (1+3\delta+\delta^2)^{-1}$; $W_m / W_M = M/m$.

Здесь W_m и W_M – предельные значения того ускорения, которое может быть достигнуто каждым из конституентов пары в результате силового воздействия со стороны партнера. В современной литературе применительно к подобной ситуации используется термин *максимальное ускорение, зависящее от массы* (Mass Dependent Maximum Acceleration – MDMA).

Помимо этого ситуация в целом выглядит так, как если бы допустимое верхнее значение скорости движения $v_{\lim}$ (*инертной*) массы $\mu = \dfrac{mM}{M+m}$ под воздействием силы притяжения со стороны (*тяготеющей*), суммарной массы $M_+ = M + m$, равной $f_N^{(\lim)}(æ) = -\overline{c}^4 / G_N$, определялось величиной

$$v_{\lim} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{\lim} = \alpha(æ)c,$$

где $\alpha(æ) = \left(\dfrac{æ}{1+æ}\right)^{\frac{1}{4}}$ – множитель, меньший 1, численное значение которого задается отношением масс $\left(\delta = \dfrac{m}{M}\right)$. Для случая равных масс $\left(\delta = 1, æ = \dfrac{1}{4}\right)$ $\alpha(æ) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

Наиболее интересна ситуация, когда $\delta \ll 1,\ æ \approx \delta.$ В этом случае

$$\alpha(æ) \cong \delta^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}},$$

что соответствует известному эмпирическому закону Талли–Фишера, которому подчиняются, в частности, периферийные скорости вращения типичных спиральных галактик.

Разумеется, приведенные соображения (равно как и принципиальный вопрос о корректном переходе к ньютонову пределу) требуют теоретического обоснования в рамках самосогласованной гравидинамической модели, в которой наличие ограничений одновременно на скорость $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)$ и скорость изменения импульса $\left(\dfrac{dp}{dt}\right)$ имели бы чисто кинематическое происхождение.

Переходя к рассмотрению варианта B, заметим прежде всего, что выражение (1) несингулярно в нуле, поскольку численное значение величины

$$f_N^{(GR)}(R = 0; R_1, R_2) = -æF_0 = -\frac{\mu}{\boldsymbol{M}_+}\frac{c^4}{G_N}$$

всегда конечно. Это выражение в структурно-содержательном плане аналогично (6). В то же время здесь речь идет о двух концентрических сферах.

Кроме того, знак силы в этом варианте оказывается противоположным тому, который он имеет в предыдущем варианте. Заметим также, что сингулярность теперь отсутствует и при $\delta = \delta_{\max} = \dfrac{1}{4}\left(M = m, æ_{\max} = \dfrac{1}{4}\right)$, когда абсолютное значение силы становится в точности равным пределу Гиббонса $\left(F_{\max} = F_G = \dfrac{c^4}{4G_N}\right)$. Этот случай соответствует такой предельной ситуации, когда толщина шарового слоя, разделяющего две концентрические сферы, стремится к нулю. Это означает, что варианту B соответствует, строго говоря, нетривиальная топологическая ситуация (сферическая трехмерная пространственная область с «выколотой» центральной точкой), анализ которой, не предполагающий выхода за пределы строгой общерелятивистской концепции, требует отдельного обсуждения.

В рамках принятого нами феноменологического подхода будем рассматривать вариант B в предположении, что область изменения переменной R находится в пределах интервала $\Delta R = R_1 - R_2$.

Определение экстремального значения $R = R_{\lim}^{(-)}$ (в этом варианте – максимального) находится из условия

$$f_{gr}^{(GR)}(R_{\lim}^{(-)}; a, b) = -F_0,$$

из которого следует соотношение

$$R_{\max}^{(-)} = a\{1 - æ\}^{\frac{1}{2}} = \frac{MG_N}{c^2}(1+\delta)\left\{1 - \frac{\delta}{(1+\delta)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Видно, что наибольшее удаление $\Delta R_{\max}^{(+)}$ от R_{sing} теперь составляет

$$\Delta R_{\max}^{(-)} = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\frac{2\overline{m}G_N}{c^2} \cong 0,234 Rg(\overline{m}).$$

Рассмотрим теперь выражение (3), определяющее энергию взаимодействия $U_{gr}^{(GR)}$ для случая, когда сила $f_N^{(GR)}$ задана формулой (1). Возникает интеграл следующего вида:

$$U_{gr}^{(GR)} \overset{\text{def}}{=} F_0 b \int \frac{dR}{R^2 - a^2} = F_0 \frac{b}{a} \int \frac{d\left(\frac{R}{a}\right)}{\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 1},$$

где $a = R_1 + R_2, \quad b = R_1 R_2$.

Интеграл вида $I = \int \frac{d\eta}{\eta^2 - 1}$ относится к числу табличных и выражается (для внешней и внутренней областей соответственно) через элементарные функции следующим образом:

$$(A): \quad I_A = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\operatorname{Arcth} x + \text{const} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \text{const}$$
$$\left(x = \frac{R}{a} > 1\right); \tag{8}$$

$$(B): \quad I_B = \int \frac{d\xi}{\xi^2 - 1} = -\operatorname{Arth} \xi + \text{const} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) + \text{const}$$
$$\left(\xi = \frac{R}{a} < 1\right). \tag{9}$$

Подчеркнем, что в рассматриваемой нами ситуации, когда $(x_{\lim} > 1)$ и $(\xi_{\lim} < 1)$ функции (8) и (9) не имеют сингулярности в точке $\eta = 1$ в силу несвязности области изменения переменной R.

Здесь конкретные значения констант могут быть фиксированы выбором граничных условий.

Очевидно, что функция $U_{gr}^{(GR)}(R; a, b)$ принимает конечные значения в предельных точках $R_{\lim} = R_{\min}^{(+)}$ (формула (5), вариант (A)) и $R_{\lim} = R_{\max}^{(-)}$ (формула (7), вариант (B)).

Асимптотическое поведение этой функции при $\frac{R}{a} \gg 1$ в первом варианте и при $\frac{R}{a} \ll 1$ во втором очевидно.

Поскольку

$$\ln\left(\frac{\frac{R}{a}+1}{\frac{R}{a}-1}\right)\Bigg|_{\frac{R}{a}\gg 1} = \ln\left(\frac{1+\frac{a}{R}}{1-\frac{a}{R}}\right)\Bigg|_{\frac{a}{R}\ll 1} \cong \ln\left(1 + \frac{2a}{R}\right)\Bigg|_{\frac{a}{R}\ll 1} \cong 2a / R,$$

$$\ln\left(\frac{1+\frac{R}{a}}{1-\frac{R}{a}}\right)\Bigg|_{\frac{R}{a}\ll 1} \cong \ln\left(1+\frac{2R}{a}\right)\Bigg|_{\frac{R}{a}\ll 1} \cong 2R/a,$$

то получаем

$$(A):\quad U_{gr}^{(GR)}(R;a,b)\Big|_{\frac{R}{a}\gg 1} = -bF_0\frac{1}{R} = -R_1R_2\frac{C^4}{G_N}\frac{1}{R} = -\frac{G_N mM}{R} = U_{gr}^{N}(R),$$

где $U_{gr}^{(N)} = -\dfrac{G_N mM}{R}$ – ньютоново выражение для энергии двухчастичного гравитационного взаимодействия.

Соответственно

$$f_{gr}^{(RG)}(R)\Big|_{\frac{R}{a}\gg 1} \overset{\text{def}}{=} -\frac{\partial U_{gr}^{(N)}}{\partial R} = -\frac{G_N mM}{R^2} = f_{gr}^{(N)} \text{ – ньютонова сила (ЗВТ).}$$

$$(B):\quad U_{gr}^{(GR)}(R;a,b)\Big|_{\frac{R}{a}\ll 1} = -\frac{b}{a^2}F_0R = -\frac{\mu}{\boldsymbol{M}_+}\frac{C^4}{G_N}R =$$

$$-\frac{\delta}{(1+\delta)^2}\frac{C^4}{G_N}R = -æ\frac{c^4}{G_N}R.$$

Соответственно, оставаясь в рамках традиционного определения связи между силой и потенциальной энергией, получаем в этом приближении

$$f_{gr}^{(RG)}(R)\Big|_{\frac{R}{a}\ll 1} \overset{\text{def}}{=} -\frac{\partial U_{gr}^{(N)}}{\partial R}\Bigg|_{\frac{R}{a}\ll 1} = \frac{\mu}{\boldsymbol{M}_+}F_0 = æ\frac{G_N}{c^4} = f_{gr}^{(RG)}(æ), \tag{10}$$

т. е. возникает постоянная (не зависящая от радиальной переменной) сила $f_g^{(RG)}(æ) = æ\dfrac{c^4}{G_N}$, имеющая характер силы гравитационного отталкивания. Эта сила параметрически зависит от отношения масс (в приближении $\delta \ll 1$ – линейно). Заметим, что с чисто формальной стороны соотношение (10) сохраняет смысл и для случая $\delta = 1$, что находится в полном соответствии с отмеченным выше фактом отсутствия сингулярности у исходного выражения в точке $R = 0$.

Как нетрудно видеть, в обоих случаях мы имеем дело с компактной трехмерной «потенциальной ямой», которая имеет следующую конфигурацию. Параметр

$$\overline{a} = \frac{1}{2}\left(R_1 + R_2\right) = \frac{a}{2}$$

определяет ее полуширину, тогда как величина

$$\overline{b} = \left(R_1R_2\right)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} -$$

ее глубину, так что в общем случае «яма» имеет форму сплюснутого эллипсоида вращения с эксцентриситетом ε, равным

$$\varepsilon = \left(1-\frac{\overline{b}^2}{\overline{a}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-4æ)^{\frac{1}{2}} = \left\{1-\frac{4\delta}{(1+\delta)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Сферическому случаю $(\varepsilon = 0)$ соответствует равенство масс $(M = m = \overline{m})$, что не вызывает дополнительных вопросов в случае варианта (A), но требует отдельного обсуждения при рассмотрении варианта (B). В то же время в рамках принятых нами допущений (наличие $M_{\max}$ и $m_{\min}$) предельное значение $\varepsilon_{\lim}=1$ исключается в обоих вариантах.

Минимальное значение энергии взаимодействия, которое соответствует предельным значениям (5) и (7), составляет соответственно

$$(A):\quad U_{gr}^{(GR)}\Big|_{\min} = -\frac{1}{4}\overline{m}c^2 \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) \approx -\frac{2,8875}{4}\overline{m}c^2 \cong -0,72\overline{m}c^2,$$

$$(B):\quad U_{gr}^{(GR)}\Big|_{\min} = -\frac{1}{4}\overline{m}c^2 \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) \approx -\frac{2,6377}{4}\overline{m}c^2 \cong -0,66\overline{m}c^2.$$

Здесь $\overline{m}=m=M$ ($\delta=1$, ситуация, когда обе массы совпадают по величине).

В этих предельных случаях гравитационная потенциальная яма имеет характер сферы с радиусом, определяемым (5), (7) соответственно.

Если рассматривать обсуждаемую двухчастичную систему как изолированную, где отрицательная энергия взаимодействия является энергией связи, то в ее полную энергию следует включать суммарную положительную энергию, соответствующую массе покоя конституентов.

Предложенная двухпараметрическая модель принадлежит к категории феноменологических. Вопрос о ее возможных физических приложениях требует, помимо фиксации численного значения ее параметров, также выбора той динамической версии, в рамках которой можно производить конкретные теоретические расчеты наблюдаемых эффектов.

Наиболее естественным выглядит отождествление параметра $M_{\max}$ с массой Вселенной ($M_{\max}=M_u\sim 10^{55}$ г). Если же ориентироваться на чисто классическую версию динамики, то безоговорочным нижним пределом следует полагать планковское значение массы, определяемое, как известно, условием численного совпадения гравитационного радиуса $R_g(m)=\dfrac{2mG_N}{c^2}$ с комптоновской длиной $\Lambda_c=\hbar/mc$, т. е. $m_{\min}=\left(\dfrac{\hbar c}{2G_N}\right)^{\frac{1}{2}}$. В действительности (на квазиклассическом уровне) этот предел следует определить, как минимум, на порядок выше. Ориентировочно можно считать, что $M_{\max}=M_u$, $\delta_0=\dfrac{m_{\min}}{M_{\max}}\sim 10^{-60}-10^{-59}$.

В этом случае во всем диапазоне допустимых значений параметров M и δ всегда можно выделить достаточно широкий интервал ($M\ll M_u$, $10^{-60}\ll\delta\ll 1$), моделирующий наблюдаемую физическую ситуацию.

Заметим, в частности, что в ситуации, когда $M\gg m$, MDMA «маленькой» пробной массы практически не зависит от параметра $\delta=\dfrac{m}{M}$, а «гравитационное поле» большой массы M в качестве приобретаемого ею ускорения будет с высокой степенью точности равно величине

$$W_M^{(\text{backgrown})}=\frac{c^4}{MG_N}\sim M^{-1}\cdot 10^{-49}\ \text{см}/\text{с}^2$$

и носить фоновый характер (не зависеть от величины m). Если $M=M_u\sim 10^{55}$ г, то $W_{M_u}\sim 10^{-8}$ см/с^2, что совпадает по порядку величины с экспериментально зарегистрированным аномальным ускорением космических кораблей Пионер 10/11 (Pioneer Anomaly).

В целом очевидным объектом рассмотрения в рамках предлагаемого подхода (вариант (A)) могут стать такие реальные крупномасштабные астрофизические объекты «бинарного» типа, как спиральные галактики, двойные звезды, две близкие отдельные галактики, пары массивных черных дыр.

Что касается варианта (B), то он может быть использован в целях поиска возможной физической интерпретации внутреннего решения Шварцшильда.

Выводы. Основные результаты проведенного исследования могут быть резюмированы следующим образом.

1. Если рассматривать МТР Гиббонса в чисто классическом механическом контексте, то оказывается, что предельная величина силы двухчастичного гравитационного взаимодействия параметрически зависит от отношения масс $\left(\delta = \frac{m}{M}\right)$ конституентов (допустимые численные значения масс конечны!). Она достигает экстремального значения соответственно – наибольшего (в случае: $\delta = 1$) и наименьшего (в случае: $\delta = \delta_0 = \frac{m_{\min}}{M_{\max}}$). Прямым следствием этого факта является а) существование предельного значения ускорения для обеих масс, составляющих пару (максимальное, зависящее от массы, ускорение (Mass Dependent Maximum Acceleration – MDMA)), причем отношение этих ускорений обратно пропорционально отношению масс; а также б) наличие фактора, равного $\delta^{\frac{1}{4}}$ (при $\delta \ll 1$), который снижает обычный специально-релятивистский верхний предел скорости движения $(v_{\max})$ меньшей из масс, входящих в пару, относительно большей до величины $v_{\max} = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}} c$, что находится в соответствии с данными астрофизических наблюдений (известный эмпирический закон Талли–Фишера, эффект «скрытой» массы – «холодная темная материя»).

2. Найденные явные аналитические выражения для энергии двухчастичного гравитационного взаимодействия имеют минимум конечной величины, что, в принципе, обеспечивает устойчивость рассматриваемой системы. Они имеют перспективы использования в целях описания поведения наблюдаемых крупномасштабных астрофизических объектов.

3. Корректная математическая экстраполяция исходного выражения для силы на конечную (*внутреннюю*) область изменения радиальной переменной приводит к ситуации, соответствующей эффекту гравитационного отталкивания.

Благодарности. Выражаю благодарность В. В. Кудряшову, Е. А. Толкачеву и А. Э. Шалыт-Марголину за помощь в работе и полезные обсуждения.

Acknowledgements. I am grateful to V. V. Kudryashov, E. A. Tolkachev and A. E. Shalyt-Margolin for assistance in the study and useful discussions.

Список использованных источников

1. Gibbons, G. W. The Maximum Tension Principle in General Relativity / G. W. Gibbons // Found. Phys. – 2002. – Vol. 32, N 12. – P. 1891–1901. doi.org/10.1023/a:1022370717626

2. Schiller, C. General relativity and cosmology derived from principle of maximum power or force / C. Schiller // Int. J. Theor. Phys. – 2005. – Vol. 44, N 9. – P. 1629–1647. doi.org/10.1007/s10773-005-4835-2

3. Tomilchik, L. M. Conformally-Flat Metric, Position-Dependent Mass and Cold Dark Matter / L. M. Tomilchik, V. V. Kudryashov // Actual Problems of MicroWorld Physics. Proc. Int. School-Seminar, Gomel, Belarus, July 28–August 8, 2003 / ed. P. Starovoitov. – Dubna, 2004. – Vol. 1. – P. 24–42.

4. Томильчик, Л. М. Модель пульсирующего массивного шара как точное решение уравнений самовзаимной гамильтоновой динамики / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 36–46.

5. Weinstein, G. On Rotating Black Holes in Equilibrium in General Relativity / G. Weinstein // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 43, N 7. – P. 903–948. doi.org/10.1002/cpa.3160430705

6. Manko, V. S. Double-Reissner-Nordstrom Solution and the interaction force between two spherical masses in general relativity / V. S. Manko // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 76, N 12. – P. 124032 (1–6). doi.org/10.1103/physrevd.76.124032

References

1. Gibbons G. W. The Maximum Tension Principle in General Relativity. *Foundations of Physics*, 2002, vol. 32, no. 12, pp. 1891–1901. doi.org/10.1023/a:1022370717626

2. Schiller C. General relativity and cosmology derived from principle of maximum power or force. *International Journal of Theoretical Physics*, 2005, vol. 44, no. 9, pp. 1629–1647. doi.org/10.1007/s10773-005-4835-2

3. Tomilchik L. M., Kudryashov V. V. Conformally-Flat Metric, Position-Dependent Mass and Cold Dark Matter. Starovoitov P. (ed.) *Actual Problems of MicroWorld Physics. Proceedings International School-Seminar, Gomel, Belarus, July 28–August 8, 2003*. Dubna, 2004, vol. 1, pp. 24–42.

4. Tomilchik L. M. Model of massive pulsating sphere as an exact solution of the Hamiltonian self reciprocal dynamics equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 36–46 (in Russian).

5. Weinstein G. On Rotating Black Holes in Equilibrium in General Relativity. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1990, vol. 43, no. 7, pp. 903–948. doi.org/10.1002/cpa.3160430705

6. Manko V. S. Double-Reissner-Nordstrom Solution and the interaction force between two spherical masses in general relativity. *Physical Review D*, 2007, vol. 76, no. 12, pp. 124032 (1–6). doi.org/10.1103/physrevd.76.124032

Информация об авторе

Томильчик Лев Митрофанович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.

Information about the author

Tomilchik Lev Mitrofanovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.