Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **январь–февраль** **Том 59 № 1**

УДК 511.35, 511.48, 511.75

Д. У. КАЛЯДА

РАЗМЕРКАВАННЕ ЦЭЛЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ ЛІКАЎ ДАДЗЕНАЙ СТУПЕНІ НА РЭЧАІСНАЙ ПРАМОЙ

(Прадстаўлена акадэмікам І. В. Гайшуном)

Інстытут матэматыкі НАН Беларусі, Мінск *Паступіла 10.12.2014*

Размеркаванне алгебраічных лікаў і, у прыватнасці, алгебраічных цэлых лікаў цікавіць матэматыкаў даўно. Сярод задач у гэтай галіне разглядаюцца прыбліжэнні рэчаісных лікаў алгебраічнымі. Тут натуральным чынам узнікае паняцце рэгулярных сістэм [1]. Вынікі [1] былі палепшаны ў артыкулах [2; 3]. Развіццём гэтага напрамку даследаванняў стала пабудова рэгулярнай сістэмы алгебраічных цэлых лікаў [4].

Ёсць шэраг работ, у якіх падлічваецца асімптатычная колькасць алгебраічных лікаў з зададзенымі ступенямі і абмежаванымі мультыплікатыўнымі вышынямі ў палях пашырэнняў поля рацыянальных лікаў пры неабмежаваным нарастанні верхняй граніцы мультыплікатыўных вышынь. Напрыклад, такога роду вынікі для алгебраічных лікаў атрыманы ў [5], а для цэлых алгебраічных – у [6]. У рабоце [7] даказаны ацэнкі для колькасці цэлалікавых паліномаў зададзенай ступені з абмежаванай мерай Малера. Спасылкі па тэме таксама можна знайсці ў [8] (раздзел 3, §5).

Аднак пытанне аб агульным размеркаванні алгебраічных лікаў доўгі час заставалася без адказу нават для выпадку другой ступені. Гэта адзначаў яшчэ ў 1985 г. К. Малер у лісце да У. Г. Спрынджука.

Для рэчаісных алгебраічных лікаў другой ступені такі вынік быў атрыман у [9], а для адвольнай ступені – у [10] і [11]. У [10] паказана, што колькасць алгебраічных лікаў ступені n з вышынёй не больш за Q на прамежку $[a, b)$ задаецца асімптатычнай формулай

$$\frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)}\int_a^b \phi_n(t)dt + O(Q^n(\ln Q)^{\delta(n)}).$$

Тут функцыя $\phi_n(t)$ вызначаецца па формуле

$$\phi_n(t) = \int\limits_{G_n(t)}\left|\sum_{k=1}^{n} kp_k t^{k-1}\right| dp_1, \ldots, dp_n, \qquad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

дзе

$$G_n(t) = \left\{(p_1, \ldots, p_n)\in\mathbb{R}^n : \max_{1\le i\le n}\left|p_i\right| \le 1, \left|p_n t^n + \ldots + p_1 t\right| \le 1\right\},$$

$\zeta(x)$ – дзэта-функцыя Рымана. У астаткавым складніку няяўная сталая сімвала $O(\cdot)$ залежыць толькі ад ступені n, а паказчык ступені лагарыфма роўны

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n\le 2, \\ 0, & n\ge 3. \end{cases}$$

Тут і далей у паведамленні пад вышынёй алгебраічнага ліку маецца на ўвазе так званая звычайная вышыня, якая вызначаецца як максімум абсалютных велічынь каэфіцыентаў мінімальнага мнагачлена алгебраічнага ліку.

У дадзенай працы даследуецца размеркаванне рэчаісных цэлых алгебраічных лікаў адвольнай ступені. Па сутнасці, будзе даказана, што алгебраічныя цэлыя лікі n-й ступені і вышыні, не большай за Q, пры $Q \to \infty$ размяркоўваюцца на рэчаіснай восі амаль як алгебраічныя лікі $(n-1)$-й ступені для тых жа вышынь.

Няхай $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ – паліном ступені n, і няхай $H(p)$ – яго вышыня, вызначаная як $H(p) = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$. Няхай $\alpha \in \mathbb{C}$ – алгебраічны лік. Мінімальным мнагачленам алгебраічнага ліку α будзем называць ненулявы мнагачлен p найменшай ступені $\deg(p)$ з цэлымі ўзаемна простымі каэфіцыентамі, такі што $p(\alpha) = 0$. Для алгебраічнага ліку α яго ступень $\deg(\alpha)$ і вышыню $H(\alpha)$ вызначым як ступень і вышыню адпаведнага мінімальнага мнагачлена.

Запіс $\#M$ абазначае лік элементаў у канечным мностве M, а $\operatorname{mes}_k M$ абазначае k-мерную Лебегаву меру мноства $M \subset \mathbb{R}^d$ $(k \le d)$. Даўжыню прамежка I будзем абазначаць праз $|I|$. Еўклідава норма вектара $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ абазначана праз $\|\mathbf{x}\|$. Для абазначэння асімптатычных суадносін паміж функцыямі будзем карыстацца сімвалам Віноградава $\ll$: выраз $f \ll g$ значыць, што $f \le cg$, дзе c – сталая, якая залежыць толькі ад ступені n алгебраічных лікаў. Запіс $f \asymp g$ выкарыстоўваецца для асімптатычна эквівалентных функцый, г. зн. $g \ll f \ll g$. Абазначэнне $f \ll_{x_1, x_2, \ldots} g$ паказвае, што няяўныя сталыя залежаць толькі ад велічынь $x_1, x_2, \ldots$. Асімптатычная эквівалентнасць $f \asymp_{x_1, x_2, \ldots} g$ вызначаецца аналагічна.

Няхай сімвал $\mathcal{A}(p)$ абазначае мноства каранёў ненулявога мнагачлена $p(x)$. Вызначым $\mathcal{A}(p)$ як кратнае мноства, дзе кожны кратны корань палінома p лічыцца ў мностве столькі разоў, якая яго кратнасць. Для мноства $I \subset \mathbb{R}$ праз $\mathcal{A}(p, I) := \mathcal{A}(p) \cap I$ абазначым мноства каранёў мнагачлена p, што ляжаць у I (таксама з улікам кратнасці).

Няхай $n \in \mathbb{N}$, $Q > 1$. Вызначым наступнае мноства паліномаў:

$$\mathcal{U}_n(Q) = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg(p(x) - x^n) < n, H(p) \le Q\}.$$

Няхай $\mathcal{O}_n$ – мноства алгебраічных цэлых лікаў ступені n. Няхай $\Omega_n(Q, x)$ абазначае колькасць рэчаісных цэлых алгебраічных лікаў ступені n з вышынёй не больш за Q, меншых за x:

$$\Omega_n(Q, x) := \#\{\alpha \in \mathcal{O}_n \cap \mathbb{R} : H(\alpha) \le Q, \alpha < x\}.$$

Варта заўважыць, што алгебраічныя цэлыя лікі першай ступені – гэта проста рацыянальныя цэлыя лікі, мноства якіх нідзе не шчыльнае на рэчаіснай восі. Таму далей усюды будзем лічыць, што $n \ge 2$.

Будуць даказаны наступныя дзве тэарэмы.

Т э а р э м а 1. *Існуе дадатная функцыя* $\omega_n(\xi, t)$*, такая што для любых* $a < b$ *выконваецца роўнасць*

$$\Omega_n(Q, b) - \Omega_n(Q, a) = Q^n \int_a^b \omega_n(Q^{-1}, t)\,dt + O(Q^{n-1} (\ln Q)^{\delta(n)}), \tag{2}$$

дзе няяўная пастаянная ў сімвале $O(\cdot)$ *залежыць толькі ад ступені* n. *Пры гэтым існуюць прамежкі, для якіх астаткавы складнік мае парадак, не меншы за* $O(Q^{n-1})$.

Функцыя $\omega_n(\xi, t)$ *мае выгляд*

$$\omega_n(\xi, t) = \int_{D_n(\xi, t)} \left| n\xi t^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k p_k t^{k-1} \right| dp_1, \ldots, dp_{n-1}, \tag{3}$$

дзе $D_n(\xi, t) = \left\{ (p_1, \ldots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \max\limits_{1 \le i \le n-1} |p_i| \le 1, \left| \xi t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \ldots + p_1 t \right| \le 1 \right\}.$

Т э а р э м а 2. *Для любога* $t \in \mathbb{R}$ *справядліва лімітавая роўнасць*

$$\lim_{\xi \to 0} \omega_n(\xi, t) = \phi_{n-1}(t),$$

дзе функцыя $\phi_n(t)$ *вызначана ў (1).*

Пры гэтым для $\xi < 1$ *выконваецца няроўнасць*

$$\left|\omega_n(\xi,t)-\phi_{n-1}(t)\right| \ll_n \begin{cases} \xi^2 t^2, & |t| \le \kappa_1(n)\xi^{-1/2}, \\ \xi, & \kappa_1(n)\xi^{-1/2} < |t| \le \kappa_2(n)\xi^{-1}, \\ t^{-2}, & \kappa_2(n)\xi^{-1} < |t|, \end{cases} \tag{4}$$

дзе дадатныя канстанты $\kappa_1(n)$, $\kappa_2(n)$ і няяўная сталая ў сімвале Вінаградава залежаць толькі ад n.

Няроўнасць (4) паказвае, што для любых рэчаісных t верная ацэнка $\left|\omega_n(\xi,t)-\phi_{n-1}(t)\right| \ll_n \xi$, г. зн. функцыя $\omega_n(\xi,t)$ раўнамерна збягаецца да $\phi_{n-1}(t)$ пры імкненні ξ да нуля.

Такім чынам, па сутнасці, тэарэма 2 сцвярджае, што лімітавая шчыльнасць размеркавання рэчаісных цэлых алгебраічных лікаў ступені n супадае са шчыльнасцю размеркавання рэчаісных алгебраічных лікаў ступені $n-1$.

Для доказу тэарэмы 1 спатрэбяцца наступныя леммы.

Л е м а 1 ([12]). *Няхай $\mathcal{U}_n^{**}(Q)$ – мноства прыводных унітарных цэлалікавых мнагачленаў ступені n з вышынёй, не большай за Q. Тады справядліва асімптатычная роўнасць*

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{\#\mathcal{U}_n^{**}(Q)}{Q^{n-1}}=\upsilon_n, \qquad \lim_{Q\to\infty}\frac{\#\mathcal{U}_2^{**}(Q)}{2Q\ln Q}=1,$$

дзе υ_n – эфектыўная дадатная сталая, якая залежыць толькі ад ступені n, $n\ge 3$.

Л е м а 2 ([13]). *Няхай $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^d$ – абмежаваны абсяг, які складаецца з усіх пунктаў $(x_1,\ldots,x_d)$, якія задавальняюць канечнае мноства алгебраічных няроўнасцей*

$$F_i(x_1,\ldots,x_d)\ge 0, \qquad 1\le i\le k,$$

дзе F_i – мнагачлен ступені $\deg F_i \le m$ з рэчаіснымі каэфіцыентамі.

Няхай $\Lambda(\mathcal{D})=\mathcal{D}\cap\mathbb{Z}^d$. Тады

$$\left|\#\Lambda(\mathcal{D})-\operatorname{mes}_d\mathcal{D}\right|\le C\max(\bar{V},1),$$

дзе сталая C залежыць толькі ад d, k, m; велічыня $\bar{V}$ ёсць найбольшая r-мерная мера праекцый мноства $\mathcal{D}$ на ўсе каардынатныя падпрасторы, якія атрымліваюцца зануленнем $d-r$ каардынат пунктаў у $\mathcal{D}$, r прабягае ўсе значэнні ад 1 да $d-1$.

Л е м а 3. *Няхай $I\subset\mathbb{R}$ – канечны прамежак, $|I|\le 1$. Няхай $\mathcal{G}_n(\xi,k,I)$ – мноства мнагачленаў з рэчаіснымі каэфіцыентамі ступені n і вышыні, не большай за 1, са старшым каэфіцыентам ξ, $0<\xi\le 1$, якія маюць роўна k каранёў на мностве I. Тады*

$$\operatorname{mes}_n\bigcup_{k=2}^{n}\mathcal{G}_n(\xi,k,I)\le\lambda(n)(\xi+\rho^{-3})^2|I|^3,$$

дзе $\rho=\max(1,|\alpha+\beta|/2)$, а $\lambda(n)$ – пастаянная, якая залежыць толькі ад n.

Лема 3 доказваецца тым жа шляхам, што і асноўны вынік у [11].

Л е м а 4 ([10]). *Няхай $\alpha=a/b$ – нескарачальны дроб, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$. Тады на адрэзку $[\alpha-r_0,\alpha+r_0]$, дзе $r_0=r_0(\alpha,Q)=\dfrac{\kappa(n)}{b^nQ}$, $\kappa(n)$ – эфектыўная пастаянная, няма ні аднаго алгебраічнага ліку n-й ступені з вышынёй, не большай за Q.*

Апішам схему доказу тэарэмы 1.

Няхай $I=[\alpha,\beta)$ – канечны прамежак. Абазначым праз $\mathcal{N}_n(Q,k,I)$ колькасць непрыводных унітарных мнагачленаў n-й ступені з вышынёй не большай чым Q, якія маюць роўна k каранёў на мностве I. Нескладана заўважыць, што

$$\Omega_n(Q,\beta)-\Omega_n(Q,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}k\mathcal{N}_n(Q,k,I). \tag{5}$$

Мноства рэчаісных мнагачленаў ступені n і вышыні не больш чым 1 са старшым каэфіцыентам ξ, якія маюць роўна k каранёў на мностве I, абазначым як

$$\mathcal{G}_n(\xi,k,I):=\{p\in\mathbb{R}[x]:\deg(p(x)-\xi x^n)<n,\,H(p)\le 1,\,\#\mathcal{A}(p,I)=k\}.$$

З лем 1 і 2 вынікае

$$\mathcal{N}_n(Q,k,I) = Q^n \operatorname{mes}_n \mathcal{G}_n(Q^{-1},k,I) + O(Q^{n-1}(\ln Q)^{\delta(n)}), \tag{6}$$

дзе няяўная пастаянная ў сімвале $O(\cdot)$ залежыць толькі ад n.

Няцяжка праверыць, што для функцыі

$$\widehat{\Omega}_n(\xi,x) := \sum_{k=1}^{n} k \operatorname{mes}_n \mathcal{G}_n(\xi,k,(-\infty,x))$$

будзе справядліва роўнасць

$$\widehat{\Omega}_n(\xi,\beta) - \widehat{\Omega}_n(\xi,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} k \operatorname{mes}_n \mathcal{G}_n(\xi,k,I). \tag{7}$$

Пакажам, што $\widehat{\Omega}_n(\xi,x)$ дыферэнцавальная па x. Няхай

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\xi,I) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n = \xi,\, p(\alpha)p(\beta) < 0,\, H(p) \le 1\},$$

дзе $p = (\xi, p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0)$ – вектар каэфіцыентаў мнагачлена $p(x) = \xi x^n + \ldots + p_1 x + p_0$, а $\xi = Q^{-1}$. Відавочна, любы мнагачлен з вобласці $\mathcal{D}$ мае няцотную колькасць каранёў на прамежку I.

З лемы 3 маем

$$\widehat{\Omega}_n(\xi,\beta) - \widehat{\Omega}_n(\xi,\alpha) = \operatorname{mes}_n \mathcal{D}(\xi,I) + O(|I|^3), \tag{8}$$

дзе няяўная сталая ў сімвале $O(\cdot)$ залежыць толькі ад n.

Пры імкненні β да α выконваецца роўнасць

$$\operatorname{mes}_n \mathcal{D}(\xi,I) = \omega_n(\xi,\alpha)|I| + o(|I|),$$

дзе $\omega_n(\xi,\alpha)$ мае выгляд (3).

Адсюль, улічваючы (8), атрымліваем, што функцыя $\widehat{\Omega}_n(\xi,x)$ дыферэнцавальная па x, і $\omega_n(\xi,x)$ – яе вытворная. Такім чынам,

$$\widehat{\Omega}_n(\xi,\beta) - \widehat{\Omega}_n(\xi,\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \omega_n(\xi,x)\,dx.$$

У выніку, з (5), (6) і (7) атрымліваем сцвярджэнне асноўнай тэарэмы. З лемы 4 вынікае, што існуе бесканечна многа прамежкаў I, для якіх хібнасць асімптатычнай формулы (2) мае парадак $O(Q^{n-1})$. Тэарэма 1 даказана.

Цяпер коратка апішам схему доказу тэарэмы 2.

Функцыя $\omega_n(\xi,t)$ цотная па зменнай t. Таму без абмежавання агульнасці дзеля зручнасці будзем лічыць $t \ge 0$. Каб спрасціць запісы, увядзём вектарныя абазначэнні $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1})$, $\mathbf{w}(t) = (t, t^2, \ldots, t^{n-1})$ і $\mathbf{v}(t) = (1, 2t, \ldots, (n-1)t^{n-2})$.

У інтэграле для функцыі $\omega_n(\xi,t)$ зробім замену зменных

$$\begin{cases} p_i = q_i, & i = 1, \ldots, n-2, \\ p_{n-1} = q_{n-1} - \xi t. \end{cases}$$

Пры гэтым абсяг інтэгравання $D_n(\xi,t)$ ператорыцца ў вобласць $S_n(\xi,t)$:

$$S_n(\xi,t) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-1} : \max_{1\le i\le n-2} |q_i| \le 1,\, |q_{n-1} - \xi t| \le 1,\, |\mathbf{w}(t)\mathbf{q}| \le 1 \right\}.$$

Атрыманы ў выніку інтэграл распішам на складнікі:

$$\omega_n(\xi,t) = \int_{G_{n-1}(t)} \left|\xi t^{n-1} + \mathbf{v}(t)\mathbf{q}\right| dq_1, \ldots, dq_{n-1} +$$

$$\int_{S_n^+(\xi,t)} \left|\xi t^{n-1} + \mathbf{v}(t)\mathbf{q}\right| dq_1, \ldots, dq_{n-1} - \int_{S_n^-(\xi,t)} \left|\xi t^{n-1} + \mathbf{v}(t)\mathbf{q}\right| dq_1, \ldots, dq_{n-1},$$

дзе

$$S_n^+(\xi,t) := S_n(\xi,t) \setminus G_{n-1}(t), \qquad S_n^-(\xi,t) := G_{n-1}(t) \setminus S_n(\xi,t).$$

Дзеля зручнасці абазначым інтэграл па $G_{n-1}(t)$ праз J_1, па $S_n^+(\xi, t)$ – праз J_2, а па $S_n^-(\xi, t)$ – праз J_3. Такім чынам,

$$\omega_n(\xi, t) = J_1 + J_2 - J_3.$$

Для рознасці $J_2 - J_3$ маем ацэнку

$$\left|J_2 - J_3\right| \ll_n \begin{cases} \xi^2 t^n, & 0 \le t \le c_1(n), \\ 0, & c_1(n) < t \le c_2(n)\xi^{-1}, \\ \xi, & c_2(n)\xi^{-1} < t, \end{cases}$$

дзе $c_1(n)$, $c_2(n)$ – некаторыя сталыя, якія залежаць толькі ад ступені n.

Рознасць $J_1 - \phi_{n-1}(t)$ ацэньваецца наступным чынам:

$$\left|J_1 - \phi_{n-1}(t)\right| \ll_n \begin{cases} \xi^2 t^{2(n-1)}, & 0 \le t \le 1/2, \\ \xi^2 t^2, & 1/2 < t \le \kappa_1(n)\xi^{-1/2}, \\ \xi, & \kappa_1(n)\xi^{-1/2} < t. \end{cases}$$

Адсюль, улічваючы, што $\omega_n(\xi, t) = 0$ для $t \ge \xi^{-1} + \xi$, атрымліваем (4).

Літаратура

1. *Baker A., Schmidt W.* // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 21, N 3. P. 1–11.
2. *Берник В. И.* // Acta Arith. 1983. Vol. 42, N 3. P. 219–253.
3. *Beresnevich V.* // Acta Arith. 1999. Vol. 90, N 2. P. 97–112.
4. *Bugeaud Y.* // J. London Math. Soc. 2002. Vol. 65, N 3. P. 547–559.
5. *Masser D., Vaaler J. D.* // Diophantine Approximation. Developments in Mathematics. 2008. Vol. 16. P. 237–243.
6. *Barroero F.* // Monatshefte für Mathematik. 2013. P. 1–17.
7. *Chern S.-J., Vaaler J. D.* // J. Reine Angew. Math. 2001. Vol. 540. P. 1–47.
8. *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии. М., 1986. – 446 с.
9. *Коледа Д. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 54–63.
10. *Каляда Д. У.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 3. С. 28–33.
11. *Коледа Д. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 41–49.
12. *Chela R.* // J. London Math. Soc. 1963. Vol. 38. P. 183–188.
13. *Davenport H.* // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 179–183; 1964. Vol. 39. P. 580.

D. U. KALIADA

koledad@rambler.ru

DISTRIBUTION OF ALGEBRAIC INTEGERS OF A GIVEN DEGREE IN THE REAL LINE

Summary

In the article, we have obtained an asymptotic formula for the number of algebraic integers α of an arbitrary given degree n that have the height $H(\alpha) \le Q$ and lie in the interval I, as Q tends to infnfinity. We have proved that the error term in this formula is of the order $O(Q^{n-1})$ for infinitely many intervals. We have shown that algebraic integers of the given degree n are distributed asymptotically just like algebraic numbers of the degree $n-1$.