Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 январь–февраль Том 60 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

А. П. СТАРОВОЙТОВ, Е. П. КЕЧКО

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
apsvoitov@gmail.com; ekechko@gmail.com

В работе изучаются экстремальные свойства аппроксимаций Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными действительными и комплексными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, К. Дривер.

Ключевые слова: система экспонент, многочлены Эрмита, аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотика остаточного члена.

A. P. STAROVOITOV, A. P. KECHKO

EXTREMAL PROPERTY OF THE HERMITE–PADÉ APPROXIMATIONS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus
apsvoitov@gmail.com; ekechko@gmail.com

In this article we study the extremal properties of the Hermite–Padé approximations of type I for the exponential system $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ with different arbitrary real and complexes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. The theorems proved complement the known results of P. Borwein, F. Wielonsky, K. Driver.

Keywords: exponential system, Hermite polynomials, Hermite–Padé approximation, asymptotic of the remainder term.

Введение. Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^{k}$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита–Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называют многочлены $A_{n_p}^{p}(z)$, $\deg A_{n_p}^{p} \le n_p - 1$, $p = 0, 1, \ldots, k$, среди которых хотя бы один тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_o, n_1, \ldots, n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^{p}(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}),\ z \to 0. \tag{1}$$

Если $n_0 = n_1 = \ldots = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$ называются *диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде I типа* системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ (по поводу терминологии см. [1]).

Многочлены $A_{n_p}^{p}(z)$, удовлетворяющие равенству (1), введены Эрмитом [2] (подробнее см. [1]) спустя некоторое время после выхода в свет его знаменитой работы [3], посвященной доказательству трансцендентности числа e. В [3] Эрмит определил многочлены $Q_{kn}(z), P_{kn}^{j}(z), j = 1, 2, ..., k$, степени не выше kn, которые находятся из условий

$$Q_{kn}(z)\, e^{jz} - P_{kn}^{j}(z) = O(z^{kn+n+1}),\ z \to 0$$

и единственным образом определяют рациональные дроби $\pi_{kn}^j(z) = P_{kn}^j(z) / Q_{kn}(z), \quad j = 1, 2, ..., k$. Дроби $\pi_{kn}^1(z), \pi_{kn}^2(z), ..., \pi_{kn}^k(z)$ принято называть совместными диагональными рациональными приближениями, а многочлены $Q_{kn}(z), P_{kn}^1(z), P_{kn}^2(z), ..., P_{kn}^k(z)$ – диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде II типа (German type) системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$.

Аппроксимации Эрмита–Паде I и II типов, явно различные в многомерном случае, неоднократно обобщались в различных направлениях. Теория таких аппроксимаций имеет интересную и содержательную историю и составляет самостоятельное направление комплексного анализа и теории приближений. Кроме традиционных приложений к теории диофантовых приближений и приближениям аналитических функций, аппроксимации Эрмита–Паде оказались полезными, например, в теории несимметричных разностных операторов, в теории случайных матриц.

Экстремальные свойства диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде I типа описаны в [4] и [5] при $k = 2$ и $k > 2$ соответственно. В этих работах имеются подробные ссылки и достаточно полная библиография предшествующих исследований по теме.

В данном сообщении доказываются аналоги теорем из работы [5] для рассматриваемых общих аппроксимаций Эрмита–Паде. Если не принимать во внимание одномерный случай, когда аппроксимации Эрмита–Паде совпадают с хорошо изученными классическими аппроксимациями Паде (см., напр., [6]), то можно сказать, что до настоящего времени недиагональный случай оставался практически не исследованным (см. [7]). Отчасти это связано с тем, что методы, ранее применяемые при изучении диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде, в общей ситуации не работают. Например, методы Лапласа и перевала (метод седловой точки) достаточно детально разработаны для нахождения асимптотики интегралов, зависящих от одного параметра n. Однако в общей ситуации приходится иметь дело с интегралами, зависящими от $k+1$ различных параметров $n_0, n_1, \ldots, n_k$.

В первой части работы мы находим асимптотику остаточного члена $R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z)$, а затем показываем, что нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$ являются решением следующей экстремальной задачи:

для фиксированного набора действительных чисел $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ найти многочлены $a_{n_p}^p(z)$, $\deg a_{n_p}^p \le n_p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, со старшим коэффициентом многочлена $a_{n_k}^k(z)$ равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве:

$$E_{n_0, n_1, \ldots, n_k} = E_{n_0, \ldots, n_k}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \rho) := \min_{\{a_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k} \left\| \sum_{p=0}^k a_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_\rho,$$

где $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$, а $D_\rho = \{z : |z| \le \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Поскольку найти точные значения $E_{n_0, n_1, \ldots, n_k}$ не представляется возможным, то конечной целью в задаче является нахождение асимптотики убывания последовательности $\{E_{n_0, n_1, \ldots, n_k}\}$, когда $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$.

Асимптотика величин $E_n := E_{n, n, \ldots, n}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \rho)$ найдена в [5]: при $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$ и $n \to \infty$

$$E_n \sim \frac{n! \lambda^{n+1}}{(kn+n+k)!} \rho^{kn+n+k}, \tag{2}$$

где $\lambda = \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)$. В отдельных частных случаях соотношение (2) было доказано П. Борвейном [8] и Ф. Вилонским [9]. Недиагональный случай, когда $k = 2$, $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, 2$, и $\rho = 1$, исследован К. Дривер [7]: если $\min\{n_0, n_1, n_2\} \to \infty$, то

$$E_{n_0, n_1, n_2} \sim \frac{2^{n_0+1} n_2!}{(n_0 + n_1 + n_2 + 2)!}.$$

Сформулируем основной результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ – произвольная фиксированная последовательность действительных чисел, а $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. Тогда, если $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$, то*

$$E_{n_0, n_1, \ldots, n_k} \sim \frac{n_k! \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{n_p+1}}{(n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k)!} \rho^{n_0+n_1+\ldots+n_k+k}.$$

В частных случаях теорема 1 совпадает с известными ранее результатами. Ее доказательство достаточно технично. Оно опирается на элементарные положения теории вычетов, а также методы суммирования степенных рядов и их произведений, известные в теории рациональной аппроксимации (см., напр., [10, с. 94–100]).

Отметим, что недиагональные квадратичные аппроксимации Эрмита–Паде II типа при произвольных комплексных $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ изучались в [11].

Предварительные результаты. В этом и следующем разделах будем считать, что λ_p – произвольные различные комплексные числа, занумерованные таким образом, чтобы $|\lambda_0| \le |\lambda_1| \le \ldots \le |\lambda_k|$.

Многочлены $A_{n_0}^0(z), A_{n_1}^1(z), \ldots, A_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие равенству (1), могут быть получены решением линейной системы $n_0 + n_1 + \ldots + n_k - 1$ однородных уравнений с $n_0 + n_1 + \ldots + n_k$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{p=0}^{k} (\xi - \lambda_p)^{n_p}}, \quad 0 \le p \le k, \tag{3}$$

$$R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{p=0}^{k} (\xi - \lambda_p)^{n_p}} \tag{4}$$

удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенства (3), (4) не являются новыми (см., напр., [1]). По-видимому, они были известны еще Эрмиту.

Далее будем рассматривать нормированную функцию, полученную делением остаточного члена $R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z)$ на старший коэффициент многочлена $A_{n_k}^k(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n-1$ раз равенство (3) при $p = k$. В результате получим, что значение старшего коэффициента $A_{n_k}^k(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i (n_k - 1)!} \int_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k) \prod_{p=0}^{k-1} (\xi - \lambda_p)^{n_p}},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$\prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{-n_p} \Big/ (n_k - 1)!.$$

Асимптотика остаточного члена $R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z)$.

Т е о р е м а 2. *Если* $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$, *то локально равномерно по z*

$$R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}}{(n_0 + n_1 + \ldots + n_k - 1)!} e^{\frac{n_0\lambda_0 + n_1\lambda_1 + \ldots + n_k\lambda_k}{n_0+n_1+\ldots+n_k} z}.$$

Для упрощения доказательства здесь ограничимся случаем $k = 2$. При $k > 2$ теорема 2 доказывается аналогично.

Без ограничения общности, считаем, что $\lambda_0 = 0$. В противном случае достаточно равенство (1) умножить на $e^{-\lambda_0 z}$. Чтобы упростить записи, полагаем $n_0 = s$, $n_1 = m$, $n_2 = n$. Тогда при $k = 2$ утверждение теоремы примет вид

$$R_{s,\,m,\,n}(z) \sim \frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!} e^{\frac{n\lambda_2+m\lambda_1}{n+m+s}z}. \tag{5}$$

Л е м м а 1. *Справедливо разложение*

$$R_{s,\,m,\,n}(z) = \frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+m+s)^j} \sum_{p=0}^{j} a_{j,p} C_p^j (n\lambda_2)^{j-p} (m\lambda_1{}^p) \right\} \frac{z^j}{j!}, \tag{6}$$

где

$$a_{j,p} = \frac{(n+m+s)^j (n)_{j-p} (m)_p}{(n+m+s)_j \, n^{j-p} m^p},$$

а

$$C_p^j = \binom{j}{p} = \frac{j!}{p!(j-p)!}; \;\; (a)_0 = 1, \;\; (a)_k = a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)$$

– биномиальные коэффициенты и символ Похгаммера соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку здесь и в дальнейшем в основном будем иметь дело с целыми функциями, мы не будем акцентировать внимание на радиусы сходимости соответствующих степенных рядов.

В нашем случае

$$R_{s,m,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\xi^s (\xi-\lambda_1)^m (\xi-\lambda_2)^n}.$$

Так как все конечные особые точки подынтегральной функции лежат внутри круга, ограниченного окружностью C_∞, то

$$R_{s,\,m,\,n}(z) = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{e^{\xi z}}{\xi^s (\xi-\lambda_1)^m (\xi-\lambda_2)^n}.$$

При $|\xi| > |\lambda_2|$ справедливо разложение

$$\frac{e^{\xi z}}{\xi^s (\xi-\lambda_1)^m (\xi-\lambda_2)^n} =$$

$$\frac{1}{\xi^{n+m+s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \xi^j \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\xi}\right)^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} \left(\frac{\lambda_2}{\xi}\right)^i.$$

Учитывая определение вычета в бесконечной точке, из последнего равенства получаем, что

$$R_{s,\,m,\,n}(z) = \frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \tag{7}$$

где

$$c_j = \frac{1}{(n+m+s)_j} \sum_{p=0}^{j} \binom{n+j-p-1}{j-p} \binom{m+p-1}{p} \lambda_2^{j-p} \lambda_1^p. \tag{8}$$

Из определения биномиальных коэффициентов следует, что

$$\binom{n+j-p-1}{j-p} \binom{m+p-1}{p} = \frac{(n)_{j-p}(m)_p}{n^{j-p} m^p} \frac{1}{j!} C_p^j n^{j-p} m^p. \tag{9}$$

Опираясь на (7)–(9), легко получить (6). Лемма 1 доказана.

Заметим, что в общем случае равенство (6) примет вид

$$R_{n_0,\,n_1,\,\ldots,\,n_k}(z) = \frac{z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}}{(n_0+n_1+\ldots+n_k-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} z^j,$$

где

$$c_j = \frac{1}{(n_0+n_1+\ldots+n_k)^j} \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k=j} a_{j;\, i_0,\, i_1, \ldots, i_k} \frac{j!}{i_0!\, i_0! \cdots i_k!} (n_0\lambda_0)^{i_0} (n_1\lambda_1)^{i_1} \cdots (n_k\lambda_k)^{i_k},$$

$i_0, i_1, \ldots, i_k$ – целые неотрицательные числа, считается $(n_p\lambda_p)^0 = 1$, даже когда $n_p\lambda_p = 0$, а

$$a_{j;\, i_0,\, i_1, \ldots, i_k} = \frac{(n_0+n_1+\ldots+n_k)^j\ (n_0)_{i_0} (n_1)_{i_1} \cdots (n_k)_{i_k}}{(n_0+n_1+\ldots+n_k)_j\ n_0^{i_0}\ n_1^{i_1} \cdots n_k^{i_k}}.$$

Л е м м а 2. *Для любого* $j \ge 2,\ 0 \le p \le j$

$$\left|1 - a_{j,\,p}\right| \le 3\left(\frac{n+m+s}{n}\right)^{j-p} \left(\frac{n+m+s}{m}\right)^{p} \left(\frac{j(j-1)(j-2)}{m} + \frac{j(j-1)}{n}\right). \qquad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко убедиться, что

$$\frac{(n)_{j-p}(m)_p}{(n+m+s)_j} = \frac{(n)_{j-p}}{(n+m+s)_{j-p}} \frac{(m)_p}{(n+m+s+j-p)_p}.$$

Заметим, что при $p = 0, 1, \ldots, j-1$

$$\left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p} \ge$$

$$\frac{(n)_{j-p}}{(n+m+s)_{j-p}} = \frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+j-p-1)}{(n+m+s)\cdot\ldots\cdot(n+m+s+j-p-1)} \ge$$

$$\left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p} \prod_{l=1}^{j-p-1}\left(1 - \frac{l}{n+j-p-1}\right) \ge$$

$$\left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p} \left(1 - \sum_{l=1}^{j-p-1} \frac{l}{n+j-p-1}\right) =$$

$$\left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p} \left(1 - \frac{(j-p)(j-p-1)}{2(n+j-p-1)}\right).$$

При $p = j$ предыдущие неравенства переходят в равенства. Отсюда следует, что для каждого $p = 0, 1, \ldots, j$ существуют такие $\theta_{j-p},\ 0 \le \theta_{j-p} \le 1$, что

$$\frac{(n)_{j-p}}{(n+m+s)_{j-p}} = \left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p} \left(1 - \theta_{j-p} \frac{(j-p)(j-p-1)}{2(n+j-p-1)}\right).$$

Аналогично, для каждого $p = 0, 1, \ldots, j$ найдутся такие $\theta_p^*,\ 0 \le \theta_p^* \le 1$, что

$$\frac{(m)_p}{(n+m+s+j-p)_p} = \left(\frac{n+p-1}{n+m+s+j-1}\right)^{p} \left(1 - \theta_p^* \frac{p(p-1)}{2(m+p-1)}\right).$$

Тогда $1 - a_{j,\,p}$ можно представить в виде

$$1 - a_{j,\,p} = \left(\frac{n+m+s}{n}\right)^{j-p} \left(\frac{n+m+s}{m}\right)^{p} \times$$

$$\left\{\left(\frac{n}{n+m+s}\right)^{j-p} \left(\frac{m}{n+m+s}\right)^{p} - \left(1 - \theta_{j-p}\frac{(j-p)(j-p-1)}{2(n+j-p-1)}\right)\left(1 - \theta_p^* \frac{p(p-1)}{2(m+p-1)}\right) \times \right. \qquad (11)$$

$$\left. \left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p} \left(\frac{m+p-1}{n+m+s+j-1}\right)^{p}\right\}.$$

Разность, стоящую в фигурных скобках в (11), обозначим через $B_{j,\,p}$. Она по модулю не превосходит суммы модулей следующих двух выражений:

$$\left(\frac{n}{n+m+s}\right)^{j-p}\left(\frac{m}{n+m+s}\right)^{p}-\left(\frac{n+j-p-1}{n+m+s+j-p-1}\right)^{j-p}\left(\frac{m+p-1}{n+m+s+j-1}\right)^{p},$$
$$\theta_{j-p}\frac{(j-p)(j-p-1)}{2(n+j-p-1)}+\theta_p^*\frac{p(p-1)}{2(m+p-1)}+\theta_{j-p}\theta_p^*\frac{(j-p)(j-p-1)p(p-1)}{4(m+p-1)(n+j-p-1)}. \tag{12}$$

Для оценки модуля разности в первом выражении вычтем и добавим

$$\left(\frac{n}{n+m+s}\right)^{j-p}\left(\frac{m+p-1}{n+m+s+j-1}\right)^{p},$$

а затем воспользуемся равенством $x^{\alpha}-y^{\alpha}=\alpha\xi^{\alpha-1}(x-y)$, где ξ лежит между x, y, а $\alpha\ge 1$. В результате получим, что эта разность по модулю не превышает $4j(j-1)/(n+m+s)$.

Поэтому из (12) следует, что

$$\left|B_{j,\,p}\right|\le\frac{4j(j-1)}{n+m+s}+\frac{(j-p)(j-p-1)p(p-1)}{4(m+p-1)(n+j-p-1)}+\frac{(j-p)(j-p-1)}{2(n+j-p-1)}+\frac{p(p-1)}{2(m+p-1)}.$$

Из (11) и последнего неравенства вытекает (10). Лемма 2 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству эквивалентности (5). Для этого правую часть в (5) представим в виде

$$\frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+m+s)^{j}}\sum_{p=0}^{j}C_p^j(n\lambda_2)^{j-p}(m\lambda_1)^{p}\right\}\frac{z^{j}}{j!}. \tag{13}$$

Тогда, учитывая (6), получим

$$R_{s,m,n}(z)-\frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!}e^{\frac{n\lambda_2+m\lambda_1}{n+m+s}z}=$$
$$\frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!}\sum_{j=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+m+s)^{j}}\sum_{p=0}^{j}\left(a_{j,\,p}-1\right)C_p^j(n\lambda_2)^{j-p}(m\lambda_1)^{p}\right\}\frac{z^{j}}{j!}. \tag{14}$$

Здесь учтено, что первые и вторые члены рядов в (6) и (13) совпадают.

Обозначим через $\Omega(z)$ сумму ряда в правой части равенства (14). Из леммы 2 следует, что

$$\left|\Omega(z)\right|\le 3\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{j(j-1)(j-2)}{m}+\frac{j(j-1)}{n}\right)\frac{(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{j}}{j!}=$$
$$\frac{3(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{3}}{m}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{j-3}}{(j-3)!}+\frac{3(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{2}}{n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{j-2}}{(j-2)!}=$$
$$\left(\frac{3(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{3}}{m}+\frac{3(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{2}}{n}\right)e^{(|\lambda_1|+|\lambda_2|)|z|}.$$

В результате приходим к неравенству

$$\left|R_{s,m,n}(z)-\frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!}e^{\frac{n\lambda_2+m\lambda_1}{n+m+s}z}\right|\le$$
$$\frac{3|z|^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!}\left(\frac{(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{3}}{m}+\frac{(|\lambda_1 z|+|\lambda_2 z|)^{2}}{n}\right)e^{(|\lambda_1|+|\lambda_2|)|z|},$$

из которого следует, что

$$R_{s,m,n}(z)=\frac{z^{n+m+s-1}}{(n+m+s-1)!}e^{\frac{n\lambda_2+m\lambda_1}{n+m+s}z}(1+o(1)),$$

где оценка $o(1)$ равномерна по z на любом компакте в $\mathbb{C}$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Вслед за Д. Браессом [12] рассмотрим сдвиг аппроксимаций Эрмита–Паде. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ – произвольные действительные числа,

$$\tilde{a}^{p}_{n_p}(z) = n_k!\prod_{p=0}^{k-1}(\lambda_k - \lambda_p)^{n_p+1} A^{p}_{n_p+1}(z - z^{\lambda}_k),\ 0 \le p \le k,$$
$$\tilde{R}_{n_0,n_1,\ldots,n_k}(z) = n_k!\prod_{p=0}^{k-1}(\lambda_k - \lambda_p)^{n_p+1} R_{n_0+1,n_1+1,\ldots,n_k+1}(z - z^{\lambda}_k), \tag{15}$$
$$E^{*}_{n_0,n_1,\ldots,n_k} = \left\|\tilde{R}_{n_0,n_1,\ldots,n_k}\right\|_{\rho},$$

где

$$z^{\lambda}_k = \frac{\lambda_0(n_0+1) + \lambda_1(n_1+1) + \ldots + \lambda_k(n_k+1)}{n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k + 1}\frac{\rho^2}{n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k},$$

а множитель $n_k!\prod_{p=0}^{k-1}(\lambda_k - \lambda_p)^{n_p+1}$ в приведенных выше формулах нормализует многочлен $\tilde{a}^{k}_{n_k}(z)$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из двух следующих лемм.

Л е м м а 3. *Если* $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$, *то*

$$E^{*}_{n_0,n_1,\ldots,n_k} \sim \frac{n_k!\prod_{p=0}^{k-1}(\lambda_k - \lambda_p)^{n_p+1}}{(n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k)!}\rho^{n_0+n_1+\ldots+n_k+k}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий леммы

$$(z - z^{\lambda}_k)^{n_0+n_1+\ldots+n_k+k} \sim z^{n_0+n_1+\ldots+n_k+k} e^{-\frac{\lambda_0(n_0+1)+\lambda_1(n_1+1)+\ldots+\lambda_k(n_k+1)}{n_0+n_1+\ldots+n_k+k+1}\frac{\rho^2}{z}}.$$

С учетом этого, из теоремы 2 при $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$ и $|z| = \rho$ следует эквивалентность

$$R_{n_0+1,n_1+1,\ldots,n_k+1}(z - z^{\lambda}_k) \sim \frac{\rho^{n_0+n_1+\ldots+n_k+k}}{(n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k)!}.$$

Отсюда и из определения $E^{*}_{n_0,n_1,\ldots,n_k}$ (см. (15)) следует (16). Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Пусть* $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. *Тогда если* $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$ *является достаточно большим числом, то*

$$E_{n_0,n_1,\ldots,n_k} = E^{*}_{n_0,n_1,\ldots,n_k}.$$

Лемма 4 доказывается с помощью теоремы Руше методом работы [8] (см. также [4; 9]).

Список использованной литературы

1. *Mahler, K.* Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 95–166.

2. *Hermite, C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.

3. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

4. *Старовойтов, А. П.* Квадратичные аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций / А. П. Старовойтов // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, вып. 4, ч. 1. – С. 387–395.

5. *Астафьева, А. В.* Экстремальные свойства аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций / А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 32–37.

6. *Бейкер, Дж. мл.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.

7. *Driver, K.* Nondiagonal Hermite–Padé approximation to the exponential function / K. Driver // J. Comput. Appl. Math. – 1995. – Vol. 65. – P. 125–134.

8. *Borwein, P. B.* Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function / P. B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.

9. *Wielonsky, F.* Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to *ez* / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, N 2. – P. 283–298.

10. *Petrushev, P. P.* Rational approximation of real functions / P. P. Petrushev, V. A. Popov. – Cambridge: University Press, 1987.

11. *Старовойтов, А. П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А. П. Старовойтов // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1, ч. 2. – С. 88–91.

12. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of *ez* / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, N 4. – P. 375–379.

Поступило в редакцию 22.06.2015