Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 январь–февраль Том 59 № 1

УДК 517.988

А. Н. ТАНЫГИНА

ОБОБЩЕННЫЙ ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 10.12.2014*

Пусть X и Y – банаховы пространства, f и g – определенные на некотором замкнутом шаре $\overline{B(x_0, R)} \subset X$ и принимающие значения из Y нелинейные операторы, причем f дифференцируем в каждой внутренней точке шара $\overline{B(x_0, R)}$, а g – недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \tag{1}$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где x_0 – заданное начальное приближение. Метод (2) является обобщением классического метода Ньютона–Канторовича и в случае $g = 0$ совпадает с ним.

В работе [1] при помощи мажорант был проведен анализ сходимости и получены оценки скорости сходимости последовательных приближений (2) для уравнений вида (1) при предположении, что оператор f является регулярно гладким, а оператор g удовлетворяет модифицированному условию Липшица

$$\|g(x'') - g(x')\| \le \psi(\rho)\|x'' - x'\|, \quad \forall x',\ x'' \in \overline{B(x_0, \rho)}, \tag{3}$$

где ψ – неубывающая функция, $0 \le \rho \le R$. Понятие регулярной гладкости было впервые введено в работах [2; 3]. В работе [4] было показано, что условие регулярной гладкости может быть заменено более простым условием

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \le \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+ + \|x'' - x'\|) - \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+), \tag{4}$$

где $r = \|x' - x_0\|$, $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$, в записи которого приращение производной оператора f мажорируется приращением непрерывной строго возрастающей вогнутой скалярной функции $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, обладающей свойством $\omega(0) = 0$; $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ – некоторая постоянная. Нетрудно показать (аналогично, как это было сделано в [4]), что в качестве r здесь можно взять величину $r = \min\{\|x' - x_0\|, \|x'' - x_0\|\}$.

Цель работы – установление результатов, аналогичных результатам из [1], для обобщенного двухшагового метода Ньютона–Канторовича вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - [f'(x_n)]^{-1}[f(y_n) + g(y_n)] & (n = 0, 1, \ldots), \\ y_n = x_n - [f'(x_n)]^{-1}[f(x_n) + g(x_n)] & (n = 0, 1, \ldots), \end{cases} \tag{5}$$

где оператор f предполагается удовлетворяющим модифицированному условию регулярной гладкости (4), а оператор g – условию (3). В частном случае, когда производная оператора f и оператор g

удовлетворяют модифицированному условию Липшица, результат о сходимости метода (5) был получен в [5]. Результаты настоящей работы применимы к более широкому классу нелинейных операторных уравнений вида (1) в силу того факта, что всякий гладкий по Липшицу оператор является регулярно гладким, в то время как обратное неверно. Случай, когда f удовлетворяет условию (4) и $g = 0$ был рассмотрен в [6].

1. Пусть $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau, \Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, число $a > 0$ удовлетворяет неравенству $\|f(x_0) + g(x_0)\| \le a$, $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Обозначим через Φ функцию числового аргумента $t \in [0, \chi]$:

$$\Phi(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - t(1 - \omega(\chi)).$$

Определим числовые последовательности $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$t_{n+1} = s_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - s_n) - s_n(1 - \omega(\chi)) + \Psi(s_n)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]}, \qquad t_0 = 0; \tag{6}$$

$$s_n = t_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t_n)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]}, \tag{7}$$

$n = 0, 1, \ldots$.

Л е м м а 1. *Пусть существует постоянная* $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство*

$$a \le \Omega(\chi) - \chi\omega(\chi) + \chi - \Psi(\chi) \tag{8}$$

и функция

$$W(t) = \Phi(t) + \Psi(t) \tag{9}$$

имеет единственный нуль t_* *на отрезке* $[0, \chi]$. *Тогда последовательности* $\{t_n\}$ *и* $\{s_n\}$ *определены корректно, монотонно возрастают и сходятся к* t_*, *причем для любого* $n = 0, 1, \ldots$

$$t_n \le s_n \le t_{n+1} \le t_*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 повторяет доказательство аналогичной леммы из [6] с рассмотрением вспомогательной функции $u(t) = -\dfrac{W(t)}{\Phi'(t)}$.

Л е м м а 2. *Пусть существует постоянная* $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство (8), оператор f удовлетворяет на* $\overline{B(x_0, R)}$ *условию (4) с таким* χ, *оператор g удовлетворяет на* $\overline{B(x_0, R)}$ *условию (3) и функция (9) имеет единственный нуль* $t_* \le R$ *на отрезке* $[0, \chi]$. *Тогда уравнение (1) имеет единственное решение* x_* *в шаре* $\overline{B(x_0, t_*)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем существование решения x_* в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$. Для этого рассмотрим последовательность

$$u_{n+1} = Du_n \quad (n = 0, 1, \ldots;\ u_0 = x_0),$$

где $D = I - [f'(x_0)]^{-1}(f + g) = I - (f + g)$, и числовую последовательность

$$\rho_{n+1} = d(\rho_n) \quad (n = 0, 1, \ldots;\ \rho_0 = 0),$$

где $d(t) = t + W(t)$. Поскольку

$$d'(t) = 1 + W'(t) = 1 + \Phi'(t) + \Psi'(t) = \omega(\chi) - \omega(\chi - t) + \psi(t) \ge 0$$

на отрезке $[0, \chi]$, то функция d является монотонно возрастающей на данном отрезке. Докажем, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ имеет место неравенство

$$\rho_n \le t_*. \tag{10}$$

Действительно, при $n = 0$ неравенство (10) очевидно ($\rho_0 = 0 \le t_*$), и если предположить, что оно доказано для $n = k$, то из $\rho_k \le t_*$ в силу монотонности d получаем, что $d(\rho_k) \le d(t_*)$, т. е. $\rho_{k+1} \le t_*$. Следовательно, по индукции неравенство (10) верно для всех n.

Докажем по индукции монотонность последовательности $\{\rho_n\}$. Очевидно, $0 = \rho_0 \le \rho_1 = a$. Предположим, что $\rho_k \le \rho_{k+1}$. Тогда $\rho_{k+1} = d(\rho_k) \le d(\rho_{k+1}) = \rho_{k+2}$.

Таким образом, последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она сходится к некоторому $\tilde{\rho} \in [0, t_*]$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $\rho_{n+1} = \rho_n + W(\rho_n)$ имеем $\tilde{\rho} = \tilde{\rho} + W(\tilde{\rho})$, откуда $W(\tilde{\rho}) = 0$ и $\tilde{\rho} = t_*$.

Покажем, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ справедливо неравенство

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le \rho_{n+1} - \rho_n. \tag{11}$$

Для $n = 0$ неравенство (11) очевидно:

$$\|u_1 - u_0\| = \|x_0 - (f(x_0) + g(x_0)) - x_0\| = \|f(x_0) + g(x_0)\| \le a = W(0) = \rho_1 - \rho_0.$$

Предположим, что (11) выполняется для $n < k$. Тогда

$$\|u_{k+1} - u_k\| = \|Du_k - Du_{k-1}\| = \|u_k - u_{k-1} - (f(u_k) - f(u_{k-1})) - (g(u_k) - g(u_{k-1}))\| \le$$
$$\|u_k - u_{k-1} - (f(u_k) - f(u_{k-1}))\| + \|g(u_k) - g(u_{k-1})\| \le$$
$$\int_0^1 \|f'(u_\tau) - f'(x_0)\| \|u_k - u_{k-1}\| d\tau + \|g(u_k) - g(u_{k-1})\| \le$$
$$\int_0^1 (\omega((\chi - \|u_\tau - x_0\|)^+ + \|u_\tau - x_0\|) - \omega((\chi - \|u_\tau - x_0\|)^+)) \|u_k - u_{k-1}\| d\tau + \|g(u_k) - g(u_{k-1})\|,$$

где $u_\tau = u_{k-1} + \tau(u_k - u_{k-1})$, $0 \le \tau \le 1$. По предположению индукции

$$\|u_k - x_0\| = \|u_k - u_0\| \le \sum_{j=1}^{k} \|u_j - u_{j-1}\| \le \sum_{j=1}^{k} (\rho_j - \rho_{j-1}) = \rho_k.$$

Следовательно,

$$\|u_\tau - x_0\| = \|(1-\tau)(u_{k-1} - u_0) + \tau(u_k - u_0)\| \le (1-\tau)\|u_{k-1} - u_0\| + \tau\|u_k - u_0\| \le (1-\tau)\rho_{k-1} + \tau\rho_k.$$

Поскольку для любого $n = 0, 1, \ldots$ имеет место неравенство (10) и $t_* \le \chi$, то $(1-\tau)\rho_{k-1} + \tau\rho_k \le \chi$ при $0 \le \tau \le 1$. Отсюда в силу монотонности функции ω

$$\omega((\chi - \|u_\tau - x_0\|)^+ + \|u_\tau - x_0\|) - \omega((\chi - \|u_\tau - x_0\|)^+) = \omega(\chi) - \omega(\chi - \|u_\tau - x_0\|) \le$$
$$\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-\tau)\rho_{k-1} + \tau\rho_k)).$$

В силу предложения 1 из [7] условие (3) для оператора g может быть переписано в виде

$$\|g(x+\xi) - g(x)\| \le \Psi(\rho + \|\xi\|) - \Psi(\rho) \quad \forall x \in \overline{B(x_0, \rho)}, \quad \|\xi\| \le R - \rho. \tag{12}$$

Используя неравенство (12) и предположение индукции получим

$$\|u_{k+1} - u_k\| \le \int_0^1 (\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-\tau)\rho_{k-1} + \tau\rho_k))) \|u_k - u_{k-1}\| d\tau + \Psi(\rho_{k-1} + \|u_k - u_{k-1}\|) - \Psi(\rho_{k-1}) \le$$
$$\int_0^1 (\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-\tau)\rho_{k-1} + \tau\rho_k)))(\rho_k - \rho_{k-1}) d\tau + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) =$$
$$\int_0^1 (1 + \Phi'((1-\tau)\rho_{k-1} + \tau\rho_k))(\rho_k - \rho_{k-1}) d\tau + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) =$$
$$\int_{\rho_{k-1}}^{\rho_k} (1 + \Phi'(\theta)) d\theta + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) = \rho_k - \rho_{k-1} + \Phi(\rho_k) - \Phi(\rho_{k-1}) + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) =$$
$$d(\rho_k) - d(\rho_{k-1}) = \rho_{k+1} - \rho_k.$$

Таким образом, неравенство (11) имеет место и при $n = k$.

Из (11) вытекает, что при $m > n$

$$\|u_m - u_n\| \le \|u_m - u_{m-1}\| + \ldots + \|u_{n+1} - u_n\| \le \rho_m - \rho_{m-1} + \ldots + \rho_{n+1} - \rho_n = \rho_m - \rho_n$$

и, следовательно, при всех m и n

$$\|u_m - u_n\| \le |\rho_m - \rho_n|. \tag{13}$$

Так как последовательность $\{\rho_n\}$ сходится к t_*, то из (13) вытекает, что последовательность $\{u_n\}$ является сходящейся к некоторому значению x_*. При этом

$$\|u_n - u_0\| \le \rho_n \le t_* \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

откуда следует, что все u_n лежат в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$, а значит и их предел x_* также лежит в этом шаре. Переходя в равенстве $u_{n+1} = Du_n$ к пределу при $n \to \infty$ в силу непрерывности оператора D получим, что $x_* = D(x_*)$ или $x_* - (f(x_*) + g(x_*)) = x_*$, откуда следует, что $f(x_*) + g(x_*) = 0$. Таким образом, x_* является решением уравнения (1) в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$.

Докажем единственность решения x_* в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$.

Пусть x_{**} – еще одно решение уравнения (1) в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$. Покажем, что при всех $n = 0, 1, \ldots$ справедливо неравенство

$$\|x_{**} - u_n\| \le t_* - \rho_n. \tag{14}$$

При $n = 0$ неравенство (14) очевидно: $\|x_{**} - x_0\| \le t_* - \rho_0 = t_*$. Предположим, что (14) верно при всех $n \le k$. Тогда

$$\|x_{**} - u_{k+1}\| = \|x_{**} - Du_k\| = \|x_{**} - u_k + f(u_k) + g(u_k)\| =$$
$$\|f(u_k) - f(x_{**}) - (u_k - x_{**}) + g(u_k) - g(x_{**})\| \le$$
$$\|f(u_k) - f(x_{**}) - f'(x_0)(u_k - x_{**})\| + \|g(u_k) - g(x_{**})\| \le$$
$$\int_0^1 \|f'(\tilde{u}_\tau) - f'(x_0)\| \|u_k - x_{**}\| d\tau + \|g(u_k) - g(x_{**})\| \le$$
$$\int_0^1 (\omega((\chi - \|\tilde{u}_\tau - x_0\|)^+ + \|\tilde{u}_\tau - x_0\|) - \omega((\chi - \|\tilde{u}_\tau - x_0\|)^+)) \|u_k - x_{**}\| d\tau + \|g(u_k) - g(x_{**})\|,$$

где $\tilde{u}_\tau = x_{**} + \tau(u_k - x_{**})$, $0 \le \tau \le 1$. Поскольку

$$\|\tilde{u}_\tau - x_0\| = \|(1-\tau)(x_{**} - x_0) + \tau(u_k - x_0)\| \le (1-\tau)\|x_{**} - x_0\| + \tau\|u_k - x_0\| \le (1-\tau)t_* + \tau\rho_k$$

и в силу неравенства (10) $(1-\tau)t_* + \tau\rho_k \le t_* \le \chi$ при $0 \le \tau \le 1$, то в силу монотонности функции ω

$$\omega((\chi - \|\tilde{u}_\tau - x_0\|)^+ + \|\tilde{u}_\tau - x_0\|) - \omega((\chi - \|\tilde{u}_\tau - x_0\|)^+) = \omega(\chi) - \omega(\chi - \|\tilde{u}_\tau - x_0\|) \le$$
$$\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-\tau)t_* + \tau\rho_k)),$$

откуда с учетом справедливости неравенства (12) и предположения индукции

$$\|x_{**} - u_{k+1}\| \le \int_0^1 (\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-\tau)t_* + \tau\rho_k))) \|u_k - x_{**}\| d\tau + \Psi(\rho_k + \|u_k - x_{**}\|) - \Psi(\rho_k) \le$$
$$\int_0^1 (\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-\tau)t_* + \tau\rho_k)))(t_* - \rho_k) d\tau + \Psi(t_*) - \Psi(\rho_k) =$$
$$\int_0^1 (1 + \Phi'((1-\tau)t_* + \tau\rho_k))(t_* - \rho_k) d\tau + \Psi(t_*) - \Psi(\rho_k) =$$
$$\int_{\rho_k}^{t_*} (1 + \Phi'(\theta)) d\theta + \Psi(t_*) - \Psi(\rho_k) = t_* - \rho_k + \Phi(t_*) - \Phi(\rho_k) + \Psi(t_*) - \Psi(\rho_k) =$$
$$d(t_*) - d(\rho_k) = t_* - \rho_{k+1}.$$

Таким образом, неравенство (14) имеет место и при $n = k + 1$. Переходя в неравенстве (14) к пределу при $n \to \infty$, получим $\|x_{**} - x_*\| \le t_* - t_* = 0$, откуда следует, что $x_{**} = x_*$. Лемма 2 доказана.

2. Сформулируем основную теорему о сходимости метода (5).

Т е о р е м а. *Пусть существует постоянная* $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство (8), оператор f удовлетворяет на* $\overline{B(x_0, R)}$ *условию (4) с таким* χ, *оператор g удовлетворяет на* $\overline{B(x_0, R)}$ *условию (3) и функция (9) имеет единственный нуль* $t_* \le R$ *на отрезке* $[0, \chi]$. *Тогда*

1) уравнение (1) имеет единственное решение x_* *в шаре* $\overline{B(x_0, t_*)}$;

2) последовательные приближения $\{x_n\}$, *заданные соотношениями (5), определены для всех* $n = 0, 1, \ldots$, *принадлежат шару* $\overline{B(x_0, t_*)}$ *и сходятся к* x_*;

3) для всех $n = 0, 1, \ldots$ *справедливы оценки*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le t_{n+1} - t_n, \tag{15}$$

$$\|x_* - x_n\| \le t_* - t_n, \tag{16}$$

где последовательность $\{t_n\}$ *определена с помощью рекуррентных соотношений (6) и (7), монотонно возрастает и сходится к* t_*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы необходимо показать, что последовательные приближения $\{x_n\}$, заданные соотношениями (5), определены для всех $n = 0, 1, \ldots$, принадлежат шару $\overline{B(x_0, t_*)}$, сходятся к x_* и удовлетворяют оценкам (15) и (16). Остальные утверждения следуют из лемм 1 и 2. Справедливость оценки (15), а следовательно, и оценки (16), вытекает из оценок

$$\|x_{n+1} - y_n\| \le t_{n+1} - s_n \tag{17}$$

и

$$\|y_n - x_n\| \le s_n - t_n, \tag{18}$$

доказательство которых проводится методом математической индукции. Схема доказательства оценок (17) и (18) повторяет схему доказательства аналогичных оценок в [6], поэтому подробный вывод неравенств здесь для краткости изложения будет опущен.

Пусть $n = 0$. Тогда

$$\|y_0 - x_0\| = \|[f'(x_0)]^{-1}(f(x_0) + g(x_0))\| = \|f(x_0) + g(x_0)\| \le a = s_0 - t_0,$$

$$\|x_1 - y_0\| = \|[f'(x_0)]^{-1}(f(y_0) + g(y_0))\| = \|f(y_0) + g(y_0)\| =$$

$$\|f(y_0) - f(x_0) - f'(x_0)(y_0 - x_0) + g(y_0) - g(x_0)\| \le$$

$$\|f(y_0) - f(x_0) - f'(x_0)(y_0 - x_0)\| + \|g(y_0) - g(x_0)\| \le$$

$$\int_0^1 \|f'((1-\tau)x_0 + \tau y_0) - f'(x_0)\| \|y_0 - x_0\| d\tau + \Psi(\|y_0 - x_0\|) \le$$

$$\omega(\chi)s_0 + \Omega(\chi - s_0) - \Omega(\chi) + \Psi(s_0) = t_1 - s_0,$$

что доказывает справедливость оценок (17) и (18) при $n = 0$. Предположим, что оценки (17) и (18) имеют место для всех $n < k$ и докажем их справедливость при $n = k$.

По предположению индукции

$$\|x_{k-1} - x_0\| \le \sum_{j=1}^{k-1} \|x_j - x_{j-1}\| \le \sum_{j=1}^{k-1} (t_j - t_{j-1}) = t_{k-1},$$

$$\|x_k - x_0\| \le \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| \le t_k - t_{k-1} + t_{k-1} = t_k$$

и

$$\|y_{k-1} - x_0\| \le \|y_{k-1} - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| \le s_{k-1} - t_{k-1} + t_{k-1} = s_{k-1}.$$

Докажем оценку $\|y_k - x_k\| \le s_k - t_k$. Имеем

$$\|y_k - x_k\| = \|[f'(x_k)]^{-1}(f(x_k) + g(x_k))\| \le \|[f'(x_k)]^{-1}\| \|f(x_k) + g(x_k)\|.$$

Обратимость оператора $f'(x_k)$ и оценка

$$\|[f'(x_k)]^{-1}\| \le \frac{1}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]}$$

доказываются по той же схеме, что и в [1], с учетом того факта, что для последовательности $\{t_n\}$, определенной с помощью рекуррентных соотношений (6) и (7), имеет место неравенство $t_n < \chi$ для любого $n = 0, 1, \ldots$. Далее,

$$\|f(x_k)+g(x_k)\| = \|f(x_k)-f(y_{k-1})-f'(x_{k-1})(x_k-y_{k-1})+g(x_k)-g(y_{k-1})\| \le$$
$$\|f(x_k)-f(y_{k-1})-f'(x_{k-1})(x_k-y_{k-1})\| + \|g(x_k)-g(y_{k-1})\| \le$$
$$\int_0^1 \|f'((1-\tau)y_{k-1}+\tau x_k)-f'(x_{k-1})\| \, \|x_k-y_{k-1}\| d\tau + \Psi(s_{k-1}+\|x_k-y_{k-1}\|)-\Psi(s_{k-1}) \le$$
$$\omega(\chi-t_{k-1})(t_k-s_{k-1})+\Omega(\chi-t_k)-\Omega(\chi-s_{k-1})+\Psi(t_k)=$$
$$a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_k)-t_k(1-\omega(\chi))+\Psi(t_k),$$

откуда

$$\|y_k-x_k\| \le \frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_k)-t_k(1-\omega(\chi))+\Psi(t_k)}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_k)]} = s_k-t_k.$$

Оценка $\|x_{k+1}-y_k\| \le t_{k+1}-s_k$ доказывается аналогично:

$$\|f(y_k)+g(y_k)\| = \|f(y_k)-f(x_k)-f'(x_k)(y_k-x_k)+g(y_k)-g(x_k)\| \le$$
$$\|f(y_k)-f(x_k)-f'(x_k)(y_k-x_k)\| + \|g(y_k)-g(x_k)\| \le$$
$$\int_0^1 \|f'((1-\tau)x_k+\tau y_k)-f'(x_k)\| \, \|y_k-x_k\| d\tau + \Psi(t_k+\|y_k-x_k\|)-\Psi(t_k) \le$$
$$\omega(\chi-t_k)(s_k-t_k)+\Omega(\chi-s_k)-\Omega(\chi-t_k)+\Psi(t_k)=$$
$$a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-s_k)-s_k(1-\omega(\chi))+\Psi(t_k) \le a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-s_k)-s_k(1-\omega(\chi))+\Psi(s_k),$$

откуда

$$\|x_{k+1}-y_k\| = \|[f'(x_k)]^{-1}(f(y_k)+g(y_k))\| \le \|[f'(x_k)]^{-1}\| \, \|f(y_k)+g(y_k)\| \le$$
$$\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-s_k)-s_k(1-\omega(\chi))+\Psi(s_k)}{1-[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_k)]} = t_{k+1}-s_k.$$

Поскольку для любого $n=0,1,\dots$ оператор $f'(x_n)$ обратим и $\|x_n-x_0\| \le t_n \le t_*$, то последовательные приближения $\{x_n\}$ определены для всех $n=0,1,\dots$ и принадлежат шару $\overline{B(x_0,t_*)}$. Сходимость $\{x_n\}$ к x_* вытекает из оценки (16) и сходимости последовательности $\{t_n\}$ к t_*. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036).

Литература

1. *Таныгина А. Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 6. С. 17–22.
2. *Galperin A., Waksman Z.* // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. P. 207–215.
3. *Galperin A., Waksman Z.* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, N 7–8. P. 813–858.
4. *Забрейко П. П., Таныгина А. Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.
5. *Appel J., De Pascale E., Evkhuta N. A., Zabrejko P. P.* // Math. Nachr. 1995. Vol. 172. P. 5–14.
6. *Таныгина А. Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 4. С. 5–10.
7. *Zabrejko P. P., Nguen D. F.* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1987. Vol. 9, N 5–6. P. 671–684.

A. N. TANYHINA

anast-minsk@yandex.ru

GENERALIZED TWO-STEP NEWTON–KANTOROVICH METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS WITH NON-DIFFERENTIABLE OPERATORS

Summary

The generalized two-step Newton–Kantorovich method for approximate solution of nonlinear equations with non-differentiable operators allowing the separation of a regular smooth component is considered. Using majorants, the convergence of this method is proved and estimates for the convergence rate are obtained.