ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 511.622
DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146

Поступило в редакцию 30.01.2018
Received 30.01.2018

М. М. Васьковский, А. О. Задорожнюк

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕЗИСТОРНЫХ РАССТОЯНИЙ В ГРАФАХ КЭЛИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. В настоящей работе доказаны асимптотически точные оценки для резисторных расстояний в некоторых семействах графов Кэли при условии, что функция роста является как минимум субэкспоненциальной, а диаметр либо обратная величина к спектральному пробелу полиномиальны по степени графа.

Ключевые слова: граф Кэли, резисторное расстояние, спектральный пробел, изопериметрическая постоянная

Для цитирования: Васьковский, М. М. Асимптотическое поведение резисторных расстояний в графах Кэли / М. М. Васьковский, А. О. Задорожнюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 140–146. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146

Maksim M. Vaskouski, Anna O. Zadorozhnyuk

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF RESISTANCE DISTANCES IN CAYLEY GRAPHS

(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)

Abstract. In the present paper, we prove asymptotically exact bounds for resistance distances in families of Cayley graphs that either have a girth of more than 4 or are free of subgraphs $K_{2,t}$, assuming that the growth function is at least subexponential, and either the diameter or the inverse value of the spectral gap are polynomial with respect to degrees of a graph.

Keywords: Cayley graphs, resistance distance, spectral gap, isoperimetric constant

For citation: Vaskouski M. M., Zadorozhnyuk A. O. Asymptotic behavior of resistance distances in Cayley graphs. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 140–146 (in Russian). DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146

Рассмотрим произвольный связный неориентированный граф $G=(V,E)$, где V – множество вершин, E – множество ребер. Для любых двух различных вершин $u,v\in V$ определим время связи $C_{u,v}$ как ожидаемое число шагов, за которое случайное блуждание из вершины u впервые достигнет вершины v и вернется обратно в вершину u. Резисторным расстоянием (или, кратко, сопротивлением) $R_{u,v}$ между вершинами $u,v\in V$ называется величина $\frac{C_{u,v}}{2|E|}$ [1]. Отметим, что резисторное расстояние может быть определено на основе законов Кирхгофа и Ома как сопротивление между вершинами u и v в электрической цепи, соответствующей графу G, где каждому ребру соответствует резистор с единичным сопротивлением [2].

Известны точные формулы для вычисления сопротивления, использующие матрицу Лапласа $L=D-A$ графа [3], где D – диагональная матрица, состоящая из степеней вершин графа, A – матрица смежности графа. Однако при исследовании асимптотического поведения сопротивлений в больших графах со сложной структурой матрицы Лапласа, таких как экспандеры или графы Кэли на симметрических группах, использовать эти формулы не представляется возможным.

Пусть Γ – конечная группа, T – ее непустое подмножество, не содержащее единицы и такое что $T=T^{-1}$, т. е. $\tau^{-1}\in T$ для любого $\tau\in T.$ Графом Кэли Cay(Γ, T) группы с порождающим множеством T называется неориентированный граф, у которого множество вершин совпадает с множеством элементов группы Γ, а две вершины s, $t \in \Gamma$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $s^{-1}t \in \Gamma$. Отметим, что любой граф Кэли конечной группы является вершинно-регулярным. Графы Кэли широко применяются при проектировании топологий компьютерных сетей, в анализе скорости распространения информации в сети, для построения кодов, корректирующих ошибки, и стойких хэш-функций [4; 5].

Пусть $G = \mathrm{Cay}(\Gamma, T)$ – граф Кэли конечной группы. Функция роста $V(G, \rho)$ этого графа Кэли определяется как число вершин графа G, находящихся на расстоянии (кратчайший путь в графе), не превосходящем ρ, от единичного элемента группы. Положим $\varphi(G, k) = \inf\{\rho \mid V(G, \rho) > k\}$.

Мы будем рассматривать семейства графов Кэли $G_n = \mathrm{Cay}(\Gamma_n, T_n)$, $n \in \mathbb{N}$, над конечными группами Γ_n, удовлетворяющие следующему условию.

Условие A.

A_1: *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *граф* G_n *либо двудольный и не содержит подграфов* $K_{2,t}$ *(*$t > 2$ *не зависит от n), либо имеет обхват* $g_n > 4$;

A_2: *существуют положительные постоянные C и m, такие что для любых натуральных* ρ *и n выполнено неравенство* $V(G_n, \rho) \ge C(\exp \rho^m)$, *где V – функция роста графа* G_n;

A_3: *существуют положительные постоянные A и k, такие что неравенство*

$$\min\{\mathrm{diam}(G_n), 1/\sigma_n\} \le A d_n^k$$

верно для любого n, где d_n *и* σ_n *– соответственно степень вершины и спектральный пробел, т. е. наименьшее положительное собственное значение матрицы Лапласа графа* G_n.

Изопериметрической постоянной графа $G = (V, E)$ называется величина

$$h(G) = \min \frac{|\partial S|}{|S|},$$

где ∂S – граница множества $S \subset V$, а минимум берется по всем подмножествам $S \subset V$ при $0 < |S| \le \frac{|V|}{2}$. Границу можно определить двумя способами: вершинная граница $\partial_V S$ – это множество вершин из $V \setminus S$, для каждой из которых существует смежная ей вершина в S; реберная граница $\partial_E S$ – это множество ребер графа, один из концов которых лежит в S, а другой в – $V \setminus S$. В зависимости от определения границы изопериметрическая постоянная может быть вершинной $h_V(G)$ или реберной $h_E(G)$.

Естественно ожидать, что в семействах графов с хорошей связностью (т. е. в таких, где между любыми двумя вершинами существует большое количество непересекающихся путей) сопротивление будет зависеть главным образом от ребер, выходящих из вершин u и v, а именно, верно асимптотическое равенство $R_{u,v} = \Theta(1/d(u) + 1/d(v))$, где $d(u)$ и $d(v)$ – степени вершин u и v. Одним из классов графов, для которых это предположение подтверждается, являются экспандеры (семейства графов с ограниченными степенями и ограниченными снизу универсальной константой изопериметрическими постоянными) [1].

Графы Кэли на симметрических группах, вообще говоря, не являются экспандерами, но имеют перед ними ряд преимуществ: наличие симметрии, простых способов генерации и представления в памяти компьютера. Кроме того, эти графы допускают построение простых алгоритмов маршрутизации, что позволяет эффективно использовать их в компьютерных сетях [6].

В настоящей работе обобщаются методы и результаты работы [7], где была получена оценка $\frac{c}{d_n} < R_{u,v} < \frac{C}{d_n^{1-\varepsilon}}$ сопротивления в семействах графов Кэли на симметрических группах для произвольного положительного ε. Доказательство основано на оценках реберных границ множеств. Кроме того, сопротивления оценивались с помощью спектрального анализа и анализа непересекающихся путей. Анализ спектра матрицы Лапласа позволял получить оценку $\Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$ для графов с достаточно большим спектральным пробелом, исследование же непересекающихся путей давало довольно грубую оценку, поскольку слишком многие ребра не учитывались. В данной работе результат улучшается за счет использования вершинных границ вместо реберных и таких характеристик графа, как функция роста и отсутствие определенных подграфов, позволяющих более точно оценить границу для множеств определенной мощности. Основным результатом данного сообщения является следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть семейство G_n, $n \in \mathbb{N}$, графов Кэли над конечными группами удовлетворяет условию A. Тогда для этого семейства выполняется равенство $R_{u,v} = \Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$ для любой пары вершин u и v.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для получения нижней оценки сопротивления воспользуемся следующим принципом монотонности.

П р е д л о ж е н и е 1 [2]. *Во взвешенном неориентированном связном графе для любых двух вершин $u, v \in V$ сопротивление $R_{u,v}$ между ними не увеличивается при добавлении ребер и уменьшении реберных сопротивлений.*

Согласно этому принципу, мы можем считать, что все ребра, кроме выходящих из *u* и *v*, имеют нулевое сопротивление. Полученная схема эквивалентна графу из 3 вершин, где все вершины, кроме *u* и *v*, заменены одной вершиной *w*. В полученном графе существует несколько ребер, соединяющих *w* с *u* и *v*, и, возможно, ребро (u, v). Если последнего ребра нет, то сопротивление не меньше, чем $2/d_n$. В противном случае оно не меньше, чем $2/(d_n+1)$.

Перейдем к получению оценки сверху для сопротивления $R_{u,v}$. Легко видеть, что выполняются неравенства

$$h_V(G) \le h_E(G) \le dh_V(G)$$

в *d*-регулярном графе *G*. Тогда из [9, Глава 1] следует, что

$$h_V(G) \ge \frac{\sigma}{2d}. \tag{1}$$

Важным инструментом для получения явной оценки сверху на $R_{u,v}$ является следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2 [7; 9]. *Пусть G – конечный граф, $R_{u,v}$ – резисторное расстояние между вершинами u и v. Тогда*

$$R_{u,v} \le 4(L_u + L_v),$$

где

$$L_w = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 |G| \rfloor} \max_{A \in X_k(w)} \left\{ \frac{1}{|\partial_V A|} + \frac{|A|}{|\partial_V A|^2} \right\}, \ w \in V,$$

где $X_k(w)$ – *множество всех подмножеств вершин A графа G, такое что $\omega \in A$, подграф G, порожденный множеством A, – связный,* $|G|2^{-(k+1)} < |A| \le |G|2^{-k}$.

Основная идея – оценить слагаемые из предложения 2, разбив множества *A* на «большие», «средние» и «малые» в зависимости от их мощности. Будем называть множество «большим», если $|A| > K_2$, «средним» – если $K_1 < |A| \le K_2$ и «малым» – если $|A| \le K_1$, где постоянные $K_1 < K_2 < |V_n|/2$ зависят от графа. Для «больших» множеств мы используем часть условия A_3 и изопериметрическое неравенство (1), для «средних» – оценку вершинной границы через функцию роста и условие A_2. Для «малых» множеств будем оценивать мощность границы, основываясь на максимальном возможном числе ребер в графе, не содержащем подграфов определенного вида [10, Глава 10], используя при этом условие A_1.

В дальнейших рассуждениях *M* обозначает универсальные положительные константы, не зависящие от *n*, а ε – достаточно маленькую положительную константу. Эти константы могут меняться от выражения к выражению.

Для «больших» *A* мы используем неравенство (1) или неравенство $|\partial_V A| \ge \frac{1}{4\operatorname{diam}(G_n)}|A|$ [11]. Из них следует, что

$$|\partial_V A| \ge \max\left\{\frac{\sigma_n}{2d_n}, \frac{1}{4\operatorname{diam}(G_n)}\right\}|A|.$$

Теперь мы можем заключить, что верна следующая оценка:

$$\frac{|A|}{|\partial_V A|^2}+\frac{1}{|\partial_V A|}\le\frac{M}{\max\left\{\frac{\sigma_n}{2d_n},\frac{1}{4\operatorname{diam}(G_n)}\right\}^2|A|}\le\frac{M}{d_n|A|^{\varepsilon}} \tag{2}$$

при $|A|>\left(\min\left\{\frac{4d_n^3}{\sigma_n^2},16\operatorname{diam}(G_n)^2d_n\right\}\right)^{1/(1-\varepsilon)}=K_2.$

Рассмотрим «средние» A, т. е $|A|\le K_2$.

Из доказательства теоремы 6.20 в [12, Глава 6] следует, что для любого множества $A\subset V$ в графе Кэли конечной группы верно неравенство

$$\frac{|\partial_V A|}{|A|}\le\frac{1}{2\varphi(G,2|A|)}.$$

Комбинируя его с условием A_2, имеем

$$|\partial_V A|\ge\frac{|A|}{2\varphi(G_n,2|A|)}\ge\frac{|A|}{M(\ln 2|A|)^{1/m}}. \tag{3}$$

Либо $1/\sigma_n$, либо $\operatorname{diam}(G_n)$ полиномиально по d_n, а значит «средние» A тоже имеют полиномиальную по d_n мощность. Это значит, что знаменатель в правой части (3) не больше чем $M(\ln d_n)^{1/m}$, и мы имеем неравенство

$$|\partial_V A|\ge\frac{|A|}{M(\ln d_n)^{1/m}},$$

из которого получаем

$$\frac{|A|}{|\partial_V A|^2}+\frac{1}{|\partial_V A|}\le\frac{M(\ln d_n)^{1/m}}{|A|}\le\frac{M}{d_n|A|^{\varepsilon}} \tag{4}$$

для $|A|>d_n^{1/(1-\varepsilon)}(\ln d_n)^{1/(m-m\varepsilon)}=K_1$.

Наконец, перейдем к «малым» A, т. е. $|A|\le K_1$.

Пусть G_n – двудольный и не содержит $K_{2,t}$-подграфов. Из теоремы 10.2.4 [10] следует, что двудольный граф с долями m_1,m_2 и без $K_{2,t}$ имеет не более чем $\sqrt{(t-1)m_2}(m_1-1)+m_2\le M|A|^{3/2}$ ребер. В то же время должно существовать больше $|A|d_n/2$ ребер, хотя бы один конец которых лежит в A. Таким образом, больше чем $|A|d_n/2-M|A|^{3/2}$ ребер связывают A с вершинной границей $\partial_V A$ (другими словами, принадлежат $\partial_E A$). Рассмотрим подграф $(A_1\cup\partial_V A,\partial_E A)$ графа G_n, где A_1 подмножество множества A, состоящее из вершин графа G_n, инцидентных ребрам из множества $\partial_E A$. Этот подграф тоже двудольный и не содержит $K_{2,t}$, поэтому в нем не более чем $(|\partial_V A|-1)\sqrt{(t-1)|A|}+|A|$ ребер. Тогда $|A|d_n/2-M|A|^{3/2}\le(|\partial_V A|-1)\sqrt{(t-1)|A|}+|A|$. Учитывая, что $|A|\le K_1$, мы получаем оценку на $\partial_V A$:

$$|\partial_V A|\ge Md_n|A|^{1/2}.$$

Это позволяет нам оценить сумму

$$\frac{|A|}{|\partial_V A|^2}+\frac{1}{|\partial_V A|}\le\frac{M}{d_n^2}+\frac{M}{d_n|A|^{1/2}}, \tag{5}$$

где $|A|\le K_1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $g_n>4$. Пока нас интересуют множества A мощности $d_n^{1/2+\varepsilon}\le|A|\le K_1$. Поскольку $g_n>4$, граф $G_n=(V_n,E_n)$ не содержит $K_{2,2}$. Теорема 10.2.2 [10] гласит, что в этом случае $|E_n|\le\frac{1}{4}(1+\sqrt{4|V_n|-3})|V_n|$. Рассматривая подграф, состоящий из A и $\partial_V A$, получаем, что в нем не более чем

$$\frac{1}{4}(1+\sqrt{4|A+\partial_V A|-3})|A+\partial_V A|\le M|A+\partial_V A|^{3/2}$$

ребер. Согласно лемме 4.9 из [4], имеем

$$|\partial_E A| \geq (d_n - 2[A]^{2/(g_n-2)})\,|A| \geq (d_n - Md_n^{(2+4\varepsilon)/(g_n-2)})\,|A| \geq Md_n\,|A|.$$

Это означает, что $|\partial_V A| \geq M\,|A|$. Таким образом, упомянутый подграф содержит максимум $M\,|\partial_V A|^{3/2}$ ребер. С другой стороны, в этом подграфе есть хотя бы $\frac{|A|\,d_n}{2}$ ребер. Итак, $M\,|\partial_V A|^{3/2} \geq \frac{|A|\,d_n}{2}$ и $|\partial_V A| \geq M(|A|\,d_n)^{2/3} \geq Md_n\,|A|^{\varepsilon}$.

Перейдем к случаю $A < d_n^{1/2+\varepsilon}$. В таких множествах вершина v из A смежна хотя бы с Md_n вершинами из $\partial_V A$. Возьмем еще одну вершину u из A. Если для v и u существует более одной вершины из $\partial_V A$, с которой они обе смежны, в графе содержится $K_{2,2}$. Но мы рассматриваем графы с $g_n > 4$, следовательно, вершины v и u имеют не более одной общей смежной в $\partial_V A$ и в сумме у них не меньше $2Md_n - 1$ соседей в $\partial_V A$. Применяем те же рассуждения для остальных вершин A и получаем, что вершинная граница этого множества содержит хотя бы $Md_n + Md_n - 1 + \ldots + Md_n - |A| + 1 \geq Md_n\,|A|$ вершин.

Подводя итог, в обоих случаях имеем

$$\frac{|A|}{|\partial_V A|^2} + \frac{1}{|\partial_V A|} \leq \frac{M}{d_n^{4/3}\,|A|^{1/3}} + \frac{M}{d_n\,|A|^{\varepsilon}} \leq \frac{M}{d_n\,|A|^{\varepsilon}} \tag{6}$$

для $|A| \leq K_1$.

Теперь мы можем оценить сумму из предложения 2. Из неравенств (2), (4) и (5) или (6) следует, что $R_{u,v} \leq \frac{M}{d_n}$. Учитывая нижнюю оценку, можем утверждать, что $R_{u,v} = \Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$. Теорема доказана.

В качестве приложений доказанной теоремы, рассмотрим следующие графы Кэли на симметрических группах S_n:

1. SS_n (star Cayley graph): порождающее множество состоит из транспозиций

$$\{(1, 2), (2, 3), \ldots, (1, n)\};$$

2. PS_n (pancake Cayley graph): порождающее множество – это множество

$$\{(1, i), (2, i-1), \ldots, \lfloor (i+1)/2 \rfloor \lceil (i+1)/2 \rceil \mid 2 \leq i \leq n\};$$

3. BS_n (bubble-sort Cayley graph): порождающее множество состоит из транспозиций

$$\{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)\};$$

4. TS_n (transposition Cayley graph): порождающее множество состоит из всех возможных транспозиций.

Приведем характеристики перечисленных классов графов – степень, обхват, спектральный пробел, которые могут быть найдены в [4; 7; 13–15]: 1) $d_n = n-1$, $g_n = 6$, $\sigma_n = 1$, $\mathrm{diam}(SS_n) = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ для SS_n; 2) $d_n = n-1$, $g_n = 6$, $\sigma_n = 1$, $\mathrm{diam}(PS_n) \leq 5(n+1)/3$ для PS_n; 3) $d_n = n-1$, $g_n = 4$, $\sigma_n = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ для BS_n; 4) $d_n = \frac{(n-1)n}{2}$, $g_n = 4$, $\sigma_n = n$ для TS_n.

П р и м е р 1. Пусть $G_n = PS_n$, $n > 3$. Так как $\sigma_n = 1$, то выполняется условие A_3. Рассмотрим функцию роста на PS_n. Этот граф обладает рекурсивной структурой [14], а его диаметр не превышает $5(n+1)/3$. Таким образом, шар радиуса ρ содержит PS_k для $k = \left\lfloor \frac{3\rho}{5} - 1 \right\rfloor$ и следовательно, $V(G_n, \rho) \geq Ce^{\sqrt{\rho}}$, т. е. верно условие A_2. Поскольку $g_n = 6$, условие A_1 также выполняется. По теореме настоящей работы $R_{u,v} = \Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$ для семейства PS_n.

П р и м е р 2. Пусть $G_n = BS_n$, $n > 3$. Эти графы двудольные и не содержат $K_{2,3}$ [14]. Диаметр графа равен $\frac{n(n-1)}{2}$, поэтому шар радиуса ρ содержит BS_k при $k = \lfloor \sqrt{\rho} \rfloor$, т. е. $V(G_n, \rho) \geq \lfloor \sqrt{\rho} \rfloor! \geq Ce^{\sqrt{\rho}}$. Таким образом, семейство BS_n удовлетворяет условию A. Тогда по теореме в данном семействе $R_{u,v} = \Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$.

П р и м е р 3. Рассмотрим семейство $G_n = SS_n$ при $n > 3$. Это семейство удовлетворяет условию A. Действительно, SS_n – двудольный и не содержит $K_{2,4}$, а его диаметр равен $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$. Этот граф обладает рекурсивной структурой, поэтому шар радиуса ρ содержит подграф SS_k на $\lfloor 2\rho/3 \rfloor!$ вершинах и $V(G_n,\rho) \geq Ce^{\sqrt{\rho}}$ и согласно теореме, $R_{u,v} = \Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$ для семейства SS_n.

П р и м е р 4. Рассмотрим семейство $G_n = TS_n$ при $n > 3$. Оно удовлетворяет условию A: TS_n – двудольный, свободный от $K_{2,4}$ граф [14] с диаметром $n-1$. Этот граф также обладает рекурсивной структурой, и шар радиуса ρ содержит подграф $TS_{\rho+1}$. Тогда $V(G_n,\rho) \geq Ce^{\rho}$ и, согласно теореме, $R_{u,v} = \Theta\left(\frac{1}{d_n}\right)$ для семейства TS_n.

З а м е ч а н и е. *Из принципа монотонности следует, что верен аналог теоремы для взвешенных графов, реберные сопротивления в которых ограничены снизу и сверху независимыми от n положительными постоянными* α *и* β *соответственно.*

Список использованных источников

1. The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times / A. K. Chandra [et al.] // Comput. Complex. – 1996. – Vol. 6, N 4. – P. 312–340. DOI: 10.1007/bf01270385
2. Effective graph resistance / W. Ellens [et al.] // Linear Algebra and its Applications. – 2011. – Vol. 435, N 10. – P. 2491–2506. DOI: 10.1016/j.laa.2011.02.024
3. Bapat, R. B. A simple method for computing resistance distance / R. B. Bapat, I. Gutmana, W. Xiao // Z. Naturforsch. – 2003. – Vol. 58, N 9–10. – P. 494–498. DOI: 10.1515/zna-2003-9-1003
4. Sauerwald, T. Randomized Protocols for Information Dissemination. / T. Sauerwald. – University of Padeborn, 2008.
5. Heydemann, M.-C. Cayley graphs and interconnection networks / M.-C. Heydemann // Graph Symmetry. – 1997. – P. 167–224. DOI: 10.1007/978-94-015-8937-6_5
6. Suzuki, Y. Node-disjoint paths algorithm in a transposition graph / Y. Suzuki, K. Kaneko, M. Nakamori // IEICE Trans. Inf. Syst. – 2006. – Vol. E89-D, N 10. – P. 2600–2605. DOI: 10.1093/ietisy/e89-d.10.2600
7. Vaskouski, M. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups / M. Vaskouski, A. Zadorozhnyuk // Discrete Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 227. – P. 121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044
8. Krebs, M. Expander Families and Cayley Graphs / M. Krebs, A. Shaneen. – Oxford University Press, 2011. – 283 p.
9. Benjamini, I. A resistance bound via an isoperimetric inequality / I. Benjamini, G. Kozma // Combinatorica. – 2005. – Vol. 25, N 6. – P. 645–650. DOI: 10.1007/s00493-005-0040-4
10. Gould, R. Graph Theory / R. Gould. – Dover, 2012.
11. Babai, L. Local expansion of vertex-transitive graphs and random generation in finite groups / L. Babai // Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Theory of computing. – 1991. – P. 164–174. DOI: 10.1145/103418.103440
12. Lyons, R. Probability on Trees and Networks / R. Lyons, Y. Peres. – Cambridge University Press, 2016. – 720 p.
13. Chung, F. The spectral gap of graphs arising from substring reversals / F. Chung, J. Tobin // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2017. – Vol. 23, N 3. – P. 1–18.
14. Konstantinova, E. Vertex reconstruction in Cayley graphs / E. Konstantinova // Discrete Mathematics. – 2009. – Vol. 309, N 3. – P. 548–559. DOI: 10.1016/j.disc.2008.07.039
15. Gates, W. H. Bounds for sorting by prefix reversal / W. H. Gates, C. H. Papadimitriou // Discrete Mathematics. – 1979. – Vol. 27, N 1. – P. 47–57. DOI: 10.1016/0012-365x(79)90068-2

References

1. Chandra A. K., Raghavan P., Ruzzo W. L., Smolensky R., Tiwari P. The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times. *Computational Complexity*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 312–340. DOI: 10.1007/bf01270385
2. Ellens W., Spieksma F. M., van Mieghem P., Jamakovic A., Kooij R. E. Effective graph resistance. *Linear Algebra and its Applications*, 2011, vol. 435, no. 10, pp. 2491–2506. DOI: 10.1016/j.laa.2011.02.024
3. Bapat R. B., Gutmana I., Xiao W. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2003, vol. 58, no. 9–10, pp. 494–498. DOI: 10.1515/zna-2003-9-1003
4. Sauerwald T. *Randomized Protocols for Information Dissemination*. University of Padeborn, 2008.
5. Heydemann M.-C. Cayley graphs and interconnection networks. *Graph Symmetry*, 1997, pp. 167–224. DOI: 10.1007/978-94-015-8937-6_5
6. Suzuki Y., Kaneko K., Nakamori M. Node-disjoint paths algorithm in a transposition graph. *IEICE Transactions on Information and Systems*, 2006, vol. E89-D, no. 10, pp. 2600–2605. DOI: 10.1093/ietisy/e89-d.10.2600
7. Vaskouski M., Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics*, 2017, vol. 227, pp. 121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044
8. Krebs M., Shaneen A. *Expander Families and Cayley Graphs*. Oxford University Press, 2011. 283 p.

9. Benjamini I., Kozma G. A resistance bound via an isoperimetric inequality. *Combinatorica*, 2005, vol. 25, no. 6, pp. 645–650. DOI: 10.1007/s00493-005-0040-4

10. Gould R. *Graph Theory*. Dover, 2012.

11. Babai L. Local expansion of vertex-transitive graphs and random generation in finite groups. *Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, 1991, pp. 164–174. DOI: 10.1145/103418.103440

12. Lyons R., Peres Y. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, 2016. 720 p.

13. Chung F., Tobin J. The spectral gap of graphs arising from substring reversals. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 23, no. 3, pp. 1–18.

14. Konstantinova E. Vertex reconstruction in Cayley graphs. *Discrete Mathematics*, 2009, vol. 309, no. 3, pp. 548–559. DOI: 10.1016/j.disc.2008.07.039

15. Gates W. H., Papadimitriou C. H. Bounds for sorting by prefix reversal. *Discrete Mathematics*, 1979, vol. 27, no. 1, pp. 47–57. DOI: 10.1016/0012-365x(79)90068-2

Информация об авторах

Васьковский Максим Михайлович – доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vaskovskii@bsu.by.

Задорожнюк Анна Олеговна – студент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a_zadorozhnyuk@mail.ru.

Information about the authors

Vaskouski Maksim Mihailavich – Assosiate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vaskovskii@bsu.by.

Zadorozhnyuk Anna Olegovna – Student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a_zadorozhnyuk@mail.ru.