ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 530.12,524.6,531
DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-159-163
Поступило в редакцию 19.01.2018
Received 19.01.2018

Ю. А. Курочкин, член-корреспондент Л. М. Томильчик

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ВЕЩЕСТВЕННОЙ МЕТРИКОЙ

Аннотация. Произведено обобщение векторной параметризации преобразований группы Лоренца, изоморфной *SO*(3.1) на случай, когда преобразования образуют подгруппы комплексной группы Лоренца, изоморфной группе *SU*(3.1), сохраняющей инвариантной вещественную билинейную форму. Установлен закон композиции и определена подгрупповая структура преобразований группы *SU*(3.1).

Ключевые слова: взаимная симметрия, группа Лоренца, группа *SU*(3.1), вектор-параметр, двойные и комплексные числа, преобразования, группа *SU*(3)

Для цитирования: Курочкин, Ю. А. О параметризации преобразований комплексной группы Лоренца для пространств с вещественной метрикой / Ю. А. Курочкин, Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 159–163. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-159-163

Yurii A. Kurochkin, Corresponding Member Lev M. Tomilchik

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

PARAMETRIZATION OF THE TRANSFORMATIONS OF THE LORENTZ COMPLEX GROUP FOR SPACES WITH REAL METRICS

Abstract. The generalization of the vector parametrization of Lorentz group transformations to the case of the complex Lorentz group *SU*(3.1) saving the invariant real bilinear form is realized. The composition law and the subgroup structure of the group *SU*(3.1) are defined.

Keywords: reciprocal symmetry, Lorentz group, *SU*(3.1) group, vector-parameter, double and complex numbers, transformations, subgroup structure

For citation: Kurochkin Yu. A., Tomilchik L. M. Parametrization of the transformations of the Lorentz complex group for spaces with real metrics. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 159–163 (in Russian). DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-159-163

Введение. В настоящее время наблюдается оживление интереса к концепции взаимности М. Борна [1; 2] применительно к проблемам космологии [3; 4], причем особое внимание уделяется поискам подходящей (адекватной) симметрийной базы новых моделей [5].

Как показано в [6; 7], группой симметрии взаимно инвариантного интервала Борна, объединяющего координатное и импульсное пространства, является изоморфная группе *SU*(3.1) комплексная группа Лоренца с инвариантной вещественной билинейной формой, рассмотренная в свое время А. Барутом [8] (в дальнейшем для краткости – группа Барута – Barut Group – BG).

Эта группа (BG) определена как группа преобразований

$$z' = \Lambda z,$$

действующих в пространстве комплексных 4-векторов

$$z = x + iy,$$

где x и y – вещественные 4-векторы относительно преобразований группы *SO*(3.1). Комплексные 4×4-матрицы Λ, удовлетворяют условию

$$\Lambda\eta\Lambda^{+} = \eta,$$

где $\eta = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1\}$, знак «+» означает эрмитово сопряжение.

Группа Барута – 16-параметрическая группа, локально изоморфная $U(3.1)$, обладающая характерной подгрупповой структурой – две подгруппы, каждая из которых изоморфна $SO(3.1)$ и подгруппа изоморфная $SU(3)\otimes U(1)$. Метрическим инвариантом BG является следующая вещественная билинейная форма

$$(\underline{z}\underline{z}^*) - z_0 z_0{}^* = z_1 z_1{}^* + z_2 z_2{}^* + z_3 z_3{}^* - z_0 z_0{}^* = \text{inv}, \tag{1}$$

что собственно и определяет изоморфизм GB и $U(3.1)$. Знак «*» в (1) означает обычное комплексное сопряжение.

Как известно, эффективность применения теории групп в физике во многом определяется выбором параметризации операторов групповых преобразований. Введенная Ф. И. Федоровым векторная параметризация преобразований четырехмерной псевдоортогональной группы $SO(3.1)$, изоморфной группе Лоренца, оказалась весьма эффективной в различных физических приложениях [9]. Как показано в [10] ее возможности значительно расширяются заданием преобразований ортогональных и псевдортогональных групп в пространствах, определенных над двойными и дуальными числами. В настоящей работе показано, что векторная параметризация Ф. И. Федорова может быть применена к случаю группы Барута.

Теоретическая часть. Определим группу Барута как группу преобразований, действующих в пространстве комплексных четырехмерных векторов z, оставляющих инвариантными билинейную вещественную форму (1). Мы будем представлять эти векторы в виде четырехмерных вектор-столбца (z) и вектор-строки ($\tilde{z}$) (тильда (~) – знак транспозиции) соответственно. Кроме того, учитывая наличие знака «–» перед четвертым слагаемым в выражении (1), четвертую компоненту векторов будем выделять символом «j», который является в системе двойных чисел аналогом мнимой единицы «i» в системе чисел комплексных. Операцию сопряжения в системе двойных чисел условимся обозначать символом «◦», при этом ($j^\circ = -j$, $j^2 = 1$, в отличие от $i^* = -i$, $i^2 = -1$ для комплексных чисел). Очевидно, что операции «*» и «◦» независимы и перестановочны. Теперь вектор-столбец (z) и вектор-строка ($\tilde{z}$), а также сопряженный ему ($z^\dagger$) выглядят следующим образом:

$$z = \begin{pmatrix} \underline{z} \\ jz_0 \end{pmatrix},\ \tilde{z} = (\underline{z},\, jz_0);\, z^\dagger = (\underline{z}^*, -jz_0{}^*). \tag{2}$$

Соответственно, инвариантная форма (1) представится в следующем виде:

$$z^\dagger z = (\underline{z}^*, -jz_0{}^*)\begin{pmatrix} \underline{z} \\ jz_0 \end{pmatrix} = \text{inv}. \tag{3}$$

Очевидно, что 4 × 4-матрица U преобразования вида

$$z' = Uz,$$

действующая на 4-векторы (z), определенные формулой (2), может быть представлена в следующем блочном виде:

$$U = \begin{pmatrix} u & j\underline{k} \\ -j\underline{\tilde{m}} & U_{44} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где u – 3 × 3-комплексная матрица; $\underline{k}$ и $\underline{\tilde{m}}$ – комплексные вектор-столбец и вектор-строка соответственно; U_{44} – комплексное число. При таком выборе векторы вида (2) будут преобразовываться матрицами (4) в векторы той же структуры.

Выполнение требования (1), (3) налагает на матрицы U обобщенное условие унитарности, т. е.

$$UU\dagger = I, \tag{5}$$

где знак «†« означает два сопряжения и транспонирование.

Нетрудно убедиться, что в предложенном формализме для BG существует простой способ выделения подгрупп, локально изоморфных соответственно группе Лоренца и группе $SU(3)$.

В множестве матриц U, которые очевидно образуют группу, выделим важную подгруппу, изоморфную группе Лоренца.

Утверждение. *Преобразования в форме матрицы Лоренца L в векторной параметризации Ф. И. Федорова [9]*

$$L(\underline{q}, \underline{q}^*) = \varepsilon(\hat{\underline{q}}_+)\varepsilon(\hat{\underline{q}}_-^*) = \frac{(1+\hat{\underline{q}}_+)(1+\hat{\underline{q}}_-^*)}{\sqrt{1+\underline{q}^2}\sqrt{1+\underline{q}^{*2}}} = \frac{(1+\hat{\underline{q}}_+)(1+\hat{\underline{q}}_-^*)}{\left|1+\underline{q}^2\right|}, \tag{6}$$

в которых комплексные векторы $\underline{q} = \underline{a} + i\underline{b}$, $\underline{q}^* = \underline{a} - i\underline{b}$ *заменены на векторы* $\underline{q} = \underline{a} + ji\underline{b}$, $\underline{q}^* = \underline{a} - ji\underline{b}$ *являются преобразованиями подгруппы группы SU(3.1).*

Такая замена вектор-параметров в (6) обеспечивает свойство псевдоунитарности матрицы при сохранении ее ортогональности.

Преобразование (6) следующим образом представляется в виде 4 × 4-матрицы, зависящей от $\underline{q}$ и $\underline{q}^*$ [9],

$$L(\underline{q}, \underline{q}^*) = \frac{1}{\left|1+\underline{q}^2\right|}\begin{pmatrix} 1-\left|\underline{q}^2\right| + (\underline{q}+\underline{q}^*)^\times + \underline{q}\cdot\underline{q}^* + \underline{q}^*\cdot\underline{q} & \underline{q}-\underline{q}^*-[\underline{q}\underline{q}^*] \\ -(\underline{q}-\underline{q}^*)-[\underline{q}\underline{q}^*] & 1+\left|\underline{q}\right|^2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

приведенной в блочной форме, где точка между векторами обозначает матрицу-диаду, а косой крест над вектором – матрицу, дуальную данному трехмерному вектору $(\vec{q}^\times)_{ik} = \varepsilon_{ijk}q_j$. Заметим, что для определения матрицы (7) достаточно любого из двух введенных нами сопряжений.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что по-прежнему сохраняется закон композиции вектор-параметров, т. е. при

$$L(\underline{q}'', \underline{q}''^*) = L(\underline{q}', \underline{q}'^*)L(\underline{q}, \underline{q}^*) = L(\langle\underline{q}', \underline{q}\rangle; \underline{q}'^*, \underline{q}^*\rangle) \tag{8}$$

имеет место

$$\underline{q}'' = \langle\underline{q}', \underline{q}\rangle = \frac{\underline{q}'+\underline{q}+[\underline{q}\underline{q}']}{1-(\underline{q}'\underline{q})},\ \underline{q}''^* = \langle\underline{q}'^*, \underline{q}^*\rangle = \frac{\underline{q}'^*+\underline{q}^*+[\underline{q}^*\underline{q}'^*]}{1-(\underline{q}'^*\underline{q}^*)}. \tag{9}$$

Все групповые свойства закона композиции (9) такие же как и для комплексных вектор-параметров [9]. Важно отметить, что при композиции (9) структура вектор-параметров не нарушается в том смысле, что при композиции не возникают «чисто» мнимые в смысле комплексных чисел и в смысле двойных чисел векторы.

Отметим некоторые свойства матриц L (6), (7), следующие из формул (8), (9)

$$L(0,0) = L(-\underline{q}, -\underline{q}^*)L(\underline{q}, \underline{q}^*) = L(\langle-\underline{q}, \underline{q}\rangle; \langle-\underline{q}^*, \underline{q}^*\rangle) = I.$$

Здесь I – единичная 4 × 4-матрица. Из (6) следует

$$L(-\underline{q}, -\underline{q}^*) = \tilde{L}(\underline{q}, \underline{q}^*) = L^\dagger(\underline{q}, \underline{q}^*), \tag{10}$$

и с учетом того, что после двух сопряжений векторы не меняются, получим в частности (5)

$$L^\dagger(\underline{q}, \underline{q}^*)L(\underline{q}, \underline{q}^*) = I.$$

Теперь докажем, что общую матрицу U всегда можно представить в виде произведения

$$U = U^3 L, \tag{11}$$

где

$$U^3 = \begin{pmatrix} u^3 & 0 \\ 0 & u_{44} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а $u^3 = e^{iA}$ – 3 × 3-комплексная унитарная матрица $u^{3+}u^3 = 1$, A – эрмитова 3 × 3-матрица, u_{44} – комплексное число $e^{i\alpha}$ единичного модуля. Очевидно, для (12) справедливо условие унитарности (псевдоунитарности) и матрицы типа (12) образуют группу, изоморфную $U(3)$,

$$U^{3\dagger}U^3 = U^{3+}U^3 = 1.$$

Теперь покажем, что множество матриц (11) образуют группу $SU(3.1)$.

1. Матрица вида (11) псевдоунитарна. Действительно,

$$U^{\dagger} = L^{\dagger}U^{3\dagger}$$

и поэтому в силу условий (10), (12) выполняется (5).

2. Произведение матриц типа (11) дает матрицу того же типа.

$$U^{3''}L'' = U^{3'}L'U^3L = U^{3'}U^3U^{3+}L'U^3L = U^{3''}L''. \tag{13}$$

Здесь учтено, что фиксированная матрица U^3 определяет автоморфизм $U^{3+}L'U^3 = L^U$ и $U^{3'}U^3 = U^{3''}$, $L'' = L^U L$.

Закон композиции (13) свидетельствует о том, что группа $SU(3.1)$ есть полупрямое произведение групп $U(3)$ и L.

В предположении возможности представления матрицы $U \in SU(3.1)$ в виде произведения (11) можно определить параметры преобразований. Действительно, из свойств матриц U, L, U^3 следуют соотношения:

$$U\tilde{U} = U^3L\tilde{L}\tilde{U}^3 = U^3\tilde{U}^3, \; \tilde{U}^*U = U^+U = \tilde{L}^*\tilde{U}^{3*}U^3L = L^+U^{3+}UL = L^+L,$$

которые и обеспечивают выражение параметров $\underline{q}$, A, α через элементы исходной матрицы.

Ассоциативность произведения матриц (11) следует из ассоциативности произведения матриц.

Заключение. Выше показано, что 4 × 4-матрица произвольного преобразования группы $SU(3.1)$ всегда может быть представлена в виде произведения унитарной 4 × 4-матрицы, имеющей блочно диагональную форму, одним из блоков которой является матрица преобразования $U(3)$, а вторым блоком – комплексное число единичного модуля на матрицу Лоренца в векторной параметризации Ф. И. Федорова с вектор-параметрами, в которых «чисто» мнимые части в смысле комплексных чисел заменены на чисто мнимые одновременно являющиеся «чисто» мнимыми в смысле комплексных и двойных чисел.

Благодарности. Авторы благодарят профессора Е. А. Толкачева за полезные замечания, членов семинара лаборатории теоретической физики за плодотворное обсуждение работы.

Acknowledgments. The authors would like to thank professor Evgenii Tolkachev for useful remarks and participants in the seminar of Laboratory of Theoretical Physics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus for fruitful discussions of the work.

Список использованных источников

1. Born, M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity / M. Born // Proc. Roy. Society. – 1938. – Vol. 165, N 921. – P. 291–303. DOI: 10.1098/rspa.1938.0060

2. Born, M. Reciprocity Theory of Elementary Particles / M. Born // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, N 3. – P. 463–473. DOI: 10.1103/revmodphys.21.463

3. Low, S. G. Reciprocal relativity of noninertial frames and the quapletic group / S. Low // Found. Phys. – 2006. – Vol. 36, N 7. – P. 1036–1069. DOI: 10.1007/s10701-006-9051-2

4. Bolognesi, S. Born Reciprocity and CosmicAccelaration / S. Bolognesi // Advances in Dark Energy Research / ed. Miranda L. Ortiz. – NY: Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 56–74; Arxiv: 1506,02187 v3, hep-th.

5. Morgan, S. A modern Approach to Born Reciprocity / Stuart Morgan. – University of Tasmania, 2010.

6. Томильчик, Л. М. Взаимная инвариантность, принцип максимального натяжения и комплексная группа Лоренца как симметрия гравитационного взаимодействия / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 1. – С. 41–48.

7. Томильчик, Л. М. Модель пульсирующего массивного шара как точное решение уравнений самовзаимной гамильтоновой динамики / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 36–46.

8. Barut, A. O. Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure / A. O. Barut // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, N 11. – P. 1652–1656. DOI: 10.1063/1.1931202

9. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

10. Богуш, А. А. Векторная параметризация некоторых групп, связанных с бикватернионами над двойными и дуальными числами / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 39–43.

References

1. Born M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1938, vol. 165, no. 921, pp. 291–303. DOI: 10.1098/rspa.1938.0060

2. Born M. Reciprocity Theory of Elementary Particles. *Reviews of Modern Physics*, 1949, vol. 21, no. 3, pp. 463–473. DOI: 10.1103/revmodphys.21.463

3. Low S. G. Reciprocal relativity of noninertial frames and the quapletic group. *Foundations of Physics*, 2006, vol. 36, no. 7, pp. 1036–1069. DOI: 10.1007/s10701-006-9051-2

4. Bolognesi S. Born Reciprocity and Cosmic Accelaration. Ortiz M. L. (ed.) *Advances in Dark Energy Research*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2015, pp. 56–74; Arxiv: 1506,02187 v3, hep-th.

5. Morgan S. *A modern Approach to Born Reciprocity*. University of Tasmania, 2010.

6. Tomilchik L. M. Reciprocal invariant, maximum tension principle, and the Lorentz complex group as the symmetry of gravitational interaction. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 41–48 (in Russian).

7. Tomilchik L. M. Model of massive pulsating sphere as an exact solution of the Hamiltonian self reciprocal dynamics equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 36–46 (in Russian).

8. Barut A. O. Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure. *Journal of Mathematical Physics*, 1964, vol. 5, no. 11, pp. 1652–1656. DOI: 10.1063/1.1931202

9. Fedorov F. I. *Lorentz Group*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 384 p. (in Russian).

10. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A. The vector parametrization certan groups ouver double ana dual numbers. *Doklady akademii nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1995, vol. 39, no. 3, pp. 39–43 (in Russian).

Информация об авторах

Курочкин Юрий Андреевич – д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий центром. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: y.kurochkin@ifanbel.bas-net.by.

Томильчик Лев Митрофанович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.

Information about the authors

Kurochkin Yurii Andreevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Center. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: y.kurochkin@ifanbel.bas-net.by.

Tomilchik Lev Mitrofanovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.