ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 539.12
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-274-280

Поступило в редакцию 11.05.2018
Received 11.05.2018

Е. М. Овсиюк[1], Я. А. Войнова[2], В. М. Редьков[3]

[1]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Республика Беларусь
[2]Минское суворовское военное училище, Минск, Республика Беларусь
[3]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

РЕШЕНИЯ ФРОБЕНИУСА И АНАЛИЗ ТУННЕЛЬНОГО ЭФФЕКТА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Аннотация. Выполнено исследование эффекта туннелирования дираковских частиц через эффективный потенциальный барьер, порождаемый статической метрикой черной дыры Шварцшильда. Исследование основано на использовании решений Фробениуса возникающего дифференциального уравнения второго порядка с тремя регулярными особыми точками и двумя нерегулярными точками ранга 2. Решения радиального уравнения построены в явном виде, показана сходимость вовлеченных в них степенных рядов во всей физической области изменения переменной: от радиуса Шварцшильда до бесконечности. Результаты анализа процесса туннелирования существенно зависят от того, с какой стороны частицы падают на барьер: слева или справа от барьера. Математическая структура полученных асимптотических формул является точной, однако неизвестны аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных рядов. Эта часть исследования должна базироваться на численном суммировании рядов.

Ключевые слова: частица Дирака, черная дыра Шварцшильда, сингулярности, решения Фробениуса, туннелирование

Для цитирования: Овсиюк, Е. М. Решения Фробениуса и анализ туннельного эффекта для частицы со спином 1/2 в поле Шварцшильда / Е. М. Овсиюк, Я. А. Войнова, В. М. Редьков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 3. – С. 274–280. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-274-280

Elena M. Ovsiyuk[1], Ya. A. Voynova[2], V. M. Red'kov[3]

[1]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Republic of Belarus
[2]Minsk Suvorov Military School, Minsk, Republic of Belarus
[3]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

FROBENIUS' SOLUTIONS AND THE ANALYSIS OF THE TUNNELING EFFECT FOR SPIN 1/2 PARTICLE THROUGH THE SCHWARZSCHILD BARRIER

(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)

Abstract. For a Dirac particle, the general mathematical study of the particle tunneling process through an effective potential barrier generated by the Schwarzschild black hole background is done. The study is based on the use of 8 Frobenius' solutions of the related second-order differential equation with 3 regular and 2 irregular singularities of the rank 2. Solutions of the radial equations are constructed in explicit form, and the convergence of the involved power series is proved in the physical range of the variable $r \in (1, +\infty)$. Results for the tunneling effect are significantly different for two situations: one when the particle falls on the barrier from the inside and another when the particle falls from the outside. The mathematical structure of the derived asymptotic relations is exact, however the analytical expressions for the involved convergent powers series are unknown, and a further study of penetration and reflection coefficients should be based on the numerical summation of the power series.

Keywords: Dirac particle, Schwarzschild black hole, singularities, Frobenius solutions, tunneling effect

For citation: Ovsiyuk E. M., Voynova Ya. A., Red'kov V. M. Frobenius' solutions and the analysis of the tunneling effect for spin 1/2 particle through the Schwarzschild barrier. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 274–280 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-274-280

Исходная идея, лежащая в основе данного анализа, появилась много лет назад в работе Редже и Уиллера [1]. Главным образом работа была посвящена выяснению условий стабильности черной дыры Шварцшильда [2]. Попутно в работе были получены линеаризованные уравнения для поля со спином 2 на фоне метрики Шварцшильда. Было установлено, что на фоне этой метрики уравнение для линеаризованного поля сводится к радиальному уравнению шрёдингеровского типа с эффективным потенциалом барьерного типа. Более детальный анализ этого и других вопросов был выполнен позднее Чандрасекаром [3]; см. также недавние работы [4; 5].

Для статической метрики Шварцшильда [2] в координатах $x^{\alpha} = (t, \theta, \phi, r)$

$$dS^2 = \Phi dt^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{1}{\Phi} dr^2, \quad \Phi = 1 - \frac{1}{r}, r \in (1, +\infty)$$

общековариантное уравнение Дирака [6] принимает следующий вид (удобно в волновой функции выделить специальный множитель):

$$\Psi = r^{-1} \Phi^{-1/4}(r) \psi, \quad \left[\frac{\gamma^0}{\sqrt{\Phi}} \partial_t + i\sqrt{\Phi} \gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \left(i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12} \cos\theta}{\sin\theta} \right) - M \right] \psi(x) = 0.$$

Решения со сферической симметрией строятся как собственные функции квадрата и третьей проекции оператора полного момента $\vec{J}^{\,2}$, J_3, а также оператора пространственной инверсии (значения четности при заданном j равны $\Pi = \delta(-1)^{j+1}$, $\delta = \pm 1$), подстановка для волновой функции берется в виде [7]

$$\psi(x)_{\varepsilon j m \delta} = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ \delta f_2(r) D_{-1/2} \\ \delta f_1(r) D_{+1/2} \end{vmatrix}.$$

Здесь используется формализм функций Вигнера (подробнее см. в [7]): $D_\sigma = D^{j}_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0)$; $j = 1/2, 3/2, ...$; $m \in \{-j, ..., +j\}$. После выполнения вычислений по разделению переменных для новых комбинаций радиальных функций (они используются для того, чтобы исключить из уравнений присутствие мнимой единицы i)

$$f = (f_1 + f_2), \quad g = -i(f_1 - f_2)$$

находим уравнения (используем обозначение $\nu = j + 1/2, \ \ \nu = 1, 2, 3...$)

$$\left(\Phi \frac{d}{dr} + \frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r} \right) f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi}) g, \quad \left(\Phi \frac{d}{dr} - \frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r} \right) g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) f. \tag{1}$$

Введем новую переменную

$$+\sqrt{\Phi} = +\sqrt{1 - 1/r = x}, \quad r \to 1, \ x \to 0, \quad r \to +\infty, \ x \to +1,$$

физической областью изменения переменной является интервал $x \in (0, 1)$. Уравнения (1) принимают вид

$$\left(\frac{x(1-x^2)^2}{2} \frac{d}{dx} + \nu x(1-x^2) \right) f = -(\varepsilon - Mx) g,$$

$$\left(\frac{x(1-x^2)^2}{2} \frac{d}{dx} - \nu x(1-x^2) \right) g = +(\varepsilon + Mx) g.$$

Отсюда следует уравнение 2-го порядка для функции $f(x)$ (отмечаем, что $c = \varepsilon / M > 1$)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{d}{dx} - \right.$$
$$\left. -\nu \frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x+c} \frac{2\nu}{1-x^2} + (\varepsilon^2 - M^2 x^2) \frac{4}{x^2(1-x^2)^4} \right] f = 0, \tag{2}$$

уравнение для функции $g(x)$ следует из (2) при формальных заменах:

$$f \Rightarrow g, \quad \nu \Rightarrow -\nu, \quad c \Rightarrow -c.$$

Исследуемая физическая задача становится понятнее [1], если преобразовать уравнения к другой радиальной переменной r_*:

$$\Phi \frac{d}{dr} = \frac{d}{dr_*}, \quad r_* = r + \ln(r-1), \quad r_* \in (-\infty, +\infty),$$

точкам $r = +1, \ +\infty$ соответствуют следующие значения r_*:

$$r \to +1, \ r_* \to -\infty; \qquad r \to +\infty, \ r_* \to +\infty.$$

Система уравнений 1-го порядка (1) записывается так:

$$\left(\frac{d}{dr_*} + \nu\varphi(r_*)\right) f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})g, \quad \left(\frac{d}{dr_*} - \nu\varphi(r_*)\right) g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) f,$$

где вспомогательная функция $\varphi(r_*)$ задается соотношениями

$$\varphi(r_*) = \frac{\sqrt{\Phi}}{r}, \quad r_* \to \pm\infty, \ \varphi(r_*) \to 0.$$

Соответственно, два уравнения 2-го порядка имеют вид

$$\begin{gathered}
\left[(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})\left(\frac{d}{dr_*} + \nu\varphi\right)\frac{1}{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})}\right]\left(\frac{d}{dr_*} - \nu\varphi\right) g + (\varepsilon^2 - M^2\Phi) g = 0, \\
\left[(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})\left(\frac{d}{dr_*} - \nu\varphi\right)\frac{1}{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})}\right]\left(\frac{d}{dr_*} + \nu\varphi\right) f + (\varepsilon^2 - M^2\Phi) f = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Уравнения (3) могут быть приведены к виду

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + P^2(r_*)\right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + Q^2(r_*)\right) g = 0,$$

в физических особых точках $r \to 1, \ +\infty$ они упрощаются и имеют простые асимптотики:

$r \to +1,$

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2\right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2\right) g = 0, \quad f, g \sim e^{\pm i\varepsilon r_*};$$

$r \to \infty,$

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - M^2\right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - M^2\right) g = 0, \quad f, g \sim e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}\, r_*}.$$

Поведение кривых $P^2(r_*)$ и $Q^2(r_*)$ (они представляют квадраты эффективных радиальных импульсов) указывает на то, что здесь имеем ситуацию, когда возможно квантово-механическое туннелирование частиц сквозь эффективный потенциальный барьер [1; 3].

Обратимся к аналитическому исследованию туннельного эффекта. Для этого рассматриваем уравнение (2) для функции $f(x)$ в более удобном виде:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2}{dx^2} f + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c}\right)\frac{df}{dx} f + \\
+\left\{-\frac{2\nu}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{D}{x+c} + \frac{A}{(x+1)} + \frac{A'}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{(x-1)^2} + \right. \\
\left. + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4}\right\} f = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$A=\frac{-8\nu^2+35\varepsilon^2+8\nu-5M^2+8\nu/(c-1)}{8},\quad A'=\frac{+8\nu^2-35\varepsilon^2+8\nu+5M^2-8\nu/(c+1)}{8},$$

$$B=\frac{-8\nu^2+19\varepsilon^2-8\nu-5M^2}{8},\quad B'=\frac{-8\nu^2+19\varepsilon^2+8\nu-5M^2}{8}\frac{x-\mu}{\sigma},\quad D=-\frac{2\nu}{c^2-1}.$$

Здесь имеем уравнение с тремя регулярными особыми точками $x=0,\ -c,\ \infty$ и двумя нерегулярными особыми точками ранга 2 (см. [8; 9]). Приведем асимптотики решений около всех особых точек:

$$x\longrightarrow 0,\quad f\sim x^{\gamma},\quad \gamma=\pm 2i\varepsilon; \tag{5a}$$

$$x\longrightarrow -c,\quad f=(x+c)^{\rho},\quad \rho=0,2; \tag{5b}$$

$$x\to\infty(y=x^{-1}),\quad \frac{d^2f}{dy^2}-\frac{2}{y}\frac{df}{dy}=0,\quad f(y)\sim\frac{1}{x^{\sigma}},\quad \sigma=0,3; \tag{5c}$$

около точки $x=+1$:

$$f=(x-1)^{\alpha}\exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right),\quad \beta=\pm i\frac{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}{2},\quad \alpha=\pm i\frac{(\varepsilon^2-M^2)+M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}; \tag{5d}$$

около точки $x=-1$:

$$f=(x+1)^{\alpha'}\exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right),\quad \beta'=\pm i\frac{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}{2},\quad \alpha'=\mp i\frac{(\varepsilon^2-M^2)+M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}. \tag{5e}$$

Построим формально точные решения Фробениуса [8; 9] рассматриваемого уравнения (4). Введем сокращающие запись обозначения

$$(\varepsilon^2-M^2)/4=E,\quad \varepsilon^2-M^2/2=E',$$

для дальнейшего уравнения (4) достаточно будет представить в кратком виде

$$\frac{d^2}{dx^2}f+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+c}\right)\frac{df}{dx}+$$
$$+\left[-\frac{2\nu}{x}+\frac{4\varepsilon^2}{x^2}+\frac{D}{x+c}+\frac{A}{(x+1)}+\frac{A'}{(x-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{(x-1)^2}+\frac{E'}{(x+1)^3}-\frac{E'}{(x-1)^3}+\frac{E}{(x+1)^4}+\frac{E}{(x-1)^4}\right]f=0.$$

Решения фробениусовского типа строим на основе подстановки

$$f(x)=x^{\gamma}(x-1)^{\alpha}\exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right)(x+1)^{\alpha'}\exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right)F(x).$$

Накладывая уже известные ограничения на параметры (см. (5*a*)–(5*e*)), находим уравнение для функции $F(x)$. Приводим его краткую запись, достаточную для последующих вычислений,

$$F''+\left(\frac{n}{x}+\frac{n_1}{x-1}+\frac{n_2}{(x-1)^2}+\frac{n_3}{x+1}+\frac{n_4}{(x+1)^2}+\frac{n_5}{x+c}\right)F'+$$
$$+\left(\frac{m}{x}+\frac{m_1}{x-1}+\frac{m_2}{(x-1)^2}+\frac{m_3}{x+1}+\frac{m_4}{(x+1)^2}+\frac{m_5}{x+c}\right)F=0.$$

Его решения строятся в виде степенных рядов с 7-членными рекуррентными соотношениями

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Действуя по методу Пуанкаре–Перрона [8; 9], получаем алгебраическое уравнение, корни R которого позволяют найти возможные радиусы сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}}, \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{|R|}, \quad (1+cR)R(R^2-1)^2 = 0;$$

корни равны $R=0,\ R=\pm 1,\ R=-c^{-1}$; следовательно, возможны радиусы сходимости $R_{\text{conv}}=1,\ c>1,\ \infty$. Минимальный радиус сходимости $R_{\text{conv}}=1$ покрывает всю физическую область изменения переменной $x\in(0,1),\ r\in(1,\infty)$.

Теперь обратимся собственно к описанию туннельного эффекта на барьере Шварцшильда. Исходя из общей структуры решений Фробениуса

$$f(x) = x^{\gamma}(x-1)^{\alpha}\exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right)(x+1)^{\alpha'}\exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right)F(x),$$

$$\beta=\pm i\Gamma, \quad \alpha=\pm i\Sigma, \quad \Gamma=\frac{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}{2}, \quad \Sigma=\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}},$$

$$\beta'=\pm i\Gamma, \quad \alpha'=\pm i\Sigma, \quad \Gamma=\frac{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}{2}, \quad \Sigma=\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}},$$

$$\gamma=\pm 2i\varepsilon,$$

можем построить 8 решений (разбиваем их в две группы по 4 и в пары сопряженных друг другу):

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= e^{+2i\varepsilon\ln x}e^{+i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}e^{-i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{+i\Gamma}{x+1}}(R_1(x)+iI_1(x)),\\
g_2(x) &= e^{-2i\varepsilon\ln x}e^{-i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{-i\Gamma}{x-1}}e^{+i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}(R_1(x)-iI_1(x));\\
g_3(x) &= e^{+2i\varepsilon\ln x}\ e^{-i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{-i\Gamma}{x-1}}\ e^{+i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}\ (R_3(x)+iI_3(x)),\\
g_4(x) &= e^{-2i\varepsilon\ln x}\ e^{+i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}\ e^{-i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{+i\Gamma}{x+1}}\ (R_3(x)-iI_3(x));
\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}
g_5(x) &= e^{+2i\varepsilon\ln x}e^{+i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}e^{+i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}(R_5(x)+iI_5(x)),\\
g_6(x) &= e^{-2i\varepsilon\ln x}e^{-i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{-i\Gamma/2}{x-1}}e^{-i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{+i\Gamma/2}{x+1}}(R_5(x)-iI_5(x));\\
g_7(x) &= e^{+2i\varepsilon\ln x}e^{-i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{-i\Gamma/2}{x-1}}e^{-i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{+i\Gamma/2}{x+1}}(R_7(x)+iI_7(x)),\\
g_8(x) &= e^{-2i\varepsilon\ln x}e^{+i\Sigma\ln(x-1)}e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}e^{+i\Sigma\ln(x+1)}e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}(R_7(x)-iI_7(x)).
\end{aligned} \tag{6b}$$

Отметим, что в многозначной функции используем только одну ветвь с $n=0$:

$$e^{\pm i\Sigma\ln(x-1)} = e^{\pm i\Sigma[\ln|x-1|+i(\pi+2\pi n)]} = e^{\mp\Sigma(\pi+2\pi n)}e^{\pm i\Sigma\ln|x-1|}.$$

Символами $R(x),\ I(x)$ в (6*a*) и (6*b*) обозначены вещественная и мнимая части сходящихся рядов, эти функции зависят от значений квантовых чисел $\varepsilon,\ \nu=j+1/2$.

Найдем асимптотическое поведение решений $g_1,\ g_3$ и $g_2,\ g_4$ (помня о суммах сходящихся рядов):

$x\to 0\ (r_*\to-\infty)$,

$$g_1 = e^{-\Sigma\pi}e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = e^{+\Sigma\pi}e^{-i\varepsilon r_*},$$
$$g_3 = e^{+\Sigma\pi}e^{+i\Sigma r_*}, \quad g_4 = e^{-\Sigma\pi}e^{-i\varepsilon r_*};$$

$x\to +1\ (r_*\to+\infty)$,

$$g_1 = [e^{-i\Sigma\ln 2}e^{+i\Gamma/2}(R_1+iI_1)]e^{-i2\Gamma r_*}, g_2 = [e^{+i\Sigma\ln 2}e^{-i\Gamma/2}(R_1-iI_1)]e^{+i2\Gamma r_*},$$
$$g_3 = [e^{+i\Sigma\ln 2}e^{-i\Gamma/2}(R_3+iI_3)]e^{+i2\Gamma r_*}, g_4 = [e^{-i\Sigma ln 2}e^{+i\Gamma/2}(R_3-iI_3)]e^{-i2\Gamma r_*}.$$

Комбинируем эти функции так:

$$H_+ = \frac{g_3 + g_1}{2}, \quad H_- = \frac{g_3 - g_1}{2}, \quad F_+ = \frac{g_2 + g_4}{2}, \quad F_- = \frac{g_2 - g_4}{2};$$

их поведение слева ($r_* \to -\infty$) задается соотношениями

$$H_+ = \cosh \Sigma\pi e^{+i\varepsilon r_*}, \quad H_- = \sinh \Sigma\pi e^{+i\varepsilon r_*},$$
$$F_+ = \cosh \Sigma\pi e^{-i\varepsilon r_*}, \quad F_- = \sinh \Sigma\pi e^{-i\varepsilon r_*};$$

поведение справа ($r_* \to +\infty$) такое:

$$H_\pm = \frac{1}{2}[e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}(R_3 + iI_3)]e^{+i2\Gamma r_*} \pm \frac{1}{2}[e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2}(R_1 + iI_1)]e^{-i2\Gamma r_*},$$
$$F_\pm = \frac{1}{2}[e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}(R_1 - iI_1)]e^{+i2\Gamma r_*} \pm \frac{1}{2}[e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2}(R_3 - iI_3)]e^{-i2\Gamma r_*}.$$

Наибольший интерес представляют решения F_+ и F_-:

$$F_+, \quad \cosh \Sigma\pi e^{-i2\Gamma r_*} <\!\!-\!\!-\!\!> A^* e^{-i2\Gamma r_*} + B^* e^{+i2\Gamma r_*},$$
$$F_-, \quad \sinh \Sigma\pi e^{-i2\Gamma r_*} <\!\!-\!\!-\!\!> A^* e^{-i2\Gamma r_*} - B^* e^{+i2\Gamma r_*};$$

они описывают ситуацию, когда частица падает справа на гравитационный барьер, при этом частично отражаясь и частично проходя сквозь него. Физическая информация об эффекте туннелирования в процессе

$$\frac{C_\pm}{A^*} e^{-i\varepsilon r_*} <\!- - - \quad e^{-i2\Gamma r_*} \pm \frac{B^*}{A^*} e^{+i2\Gamma r_*}$$

содержится в коэффициентах отражения R и прохождения D:

$$D = \left| \frac{C_\pm}{A^*} \right|^2, \quad R = 1 - D = \left| \frac{B^*}{A^*} \right|^2.$$

Аналогично, можем использовать решения $g_5, ..., g_8$, их асимптотики задаются соотношениями

$$g_5 = e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}(R_5 + iI_5) e^{-i2\Gamma r_*}, \quad g_8 = e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}(R_7 - iI_7) e^{-i\varepsilon r_*},$$
$$x \to 0, \quad g_5 = e^{-\Sigma\pi} e^{i\varepsilon r_*}, \quad g_8 = e^{+\Sigma\pi} e^{-i2\Gamma r_*};$$

$$g_6 = e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2}(R_5 - iI_5) e^{+i2\Gamma r_*}, \quad g_7 = e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2}(R_7 + iI_7) e^{+i2\Gamma r_*},$$
$$x \to 1, \quad g_6 = e^{+\Sigma\pi} e^{-i2\Gamma r_*}, \quad g_7 = e^{-\Sigma\pi} e^{+i2\Gamma r_*}.$$

Введем комбинации из этих функций

$$\overline{H}_\pm = g_5 \pm g_8, \quad \overline{F}_\pm = g_6 \pm g_7;$$

наиболее интересными являются функции $\overline{F}_+$ и $\overline{F}_-$ со следующим асимптотическим поведением:

$$\overline{F}_\pm : e^{-\Sigma\pi} e^{+i\varepsilon r_*} \pm e^{+\Sigma\pi} e^{-i\varepsilon r_*} <\!\!-\!\!-\!\!> e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}[(R_5 - iI_5) \pm (R_7 + iI_7)] e^{+i2\Gamma r_*}.$$

Они описывают ситуацию, когда частица падает на барьер слева, частично отражаясь от него и проходя сквозь него. Соответствующие коэффициенты отражения $\overline{R}$ и прохождения $\overline{D}$ задаются равенствами

$$\overline{A} e^{+i\varepsilon r_*} \pm \overline{B} e^{-i\varepsilon r_*} - - > \overline{C}_\pm e^{+i2\Gamma r_*}, \quad \overline{D} = \left| \frac{\overline{C}_\pm}{\overline{A}} \right|^2, \quad \overline{R} = \left| \frac{\overline{B}}{\overline{A}} \right|^2.$$

Отмечаем, что согласно развитой методике, результаты анализа процесса туннелирования существенно зависят от того, с какой стороны частицы двигаются к барьеру: слева или справа. Математическая структура полученных асимптотических формул является точной, однако неизвестны аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных рядов. Эта часть исследования должна базироваться на численном суммировании рядов.

Список использованных источников

1. Regge, T. Stability of a Schwarzschild Singularity / T. Regge, J. A. Wheeler // Physical Review. – 1957. – Vol. 108, N 4. – P. 1063–1069. https://doi.org/10.1103/physrev.108.1063

2. Schwarzschild, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. – Sitzung vom 3. Februar 1916. – S. 189–196.

3. Chandrasekhar, S. The Mathematical Theory of Black Holes / S. Chandrasekhar // General Relativity and Gravitation. – Oxford: Oxford University Press, 1983. – 646 p.

4. Smoller, J. Asymptotic Behavior of Massless Dirac Waves in Schwarzschild Geometry / J. Smoller, Chunjing Xie // Annales Henri Poincare. – 2012. – Vol. 13, N 4. – P. 943–989. https://doi.org/10.1007/s00023-011-0145-9

5. To Analysis of the Dirac and Majorana Particle Solutions in Schwarzschild Field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex System. – 2017. – Vol. 20, N 1. – P. 56–72.

6. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.

7. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.

8. Ronveaux, A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. – 354 p.

9. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2000. – 312 p.

References

1. Regge T., Wheeler J. A. Stability of a Schwarzschild Singularity. *Physical Review*, 1957, vol. 108, no. 4, pp. 1063–1069. https://doi.org/10.1103/physrev.108.1063

2. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Sitzung vom 3. Februar 1916*. pp. 189–196 (in German).

3. Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford, Oxford University Press, 1983. 646 p.

4. Smoller J., Xie Chunjing. Asymptotic Behavior of Massless Dirac Waves in Schwarzschild Geometry. *Annales Henri Poincare*, 2012, vol. 13, no. 4, pp. 943–989. https://doi.org/10.1007/s00023-011-0145-9

5. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Rusak Yu. A., Chichurin A. V., Red'kov V. M. To Analysis of the Dirac and Majorana Particle Solutions in Schwarzschild Field. *Nonlinear Phenomena in Complex System*, 2017, vol. 20, no 1, pp. 56–72.

6. Red'kov V. M. *Field particles in Riemannian space and the Lorentz group*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2009. 496 p. (in Russian).

7. Red'kov V. M. *Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2011. 496 p. (in Russian).

8. Ronveaux A. *Heun's Differential Equations*. Oxford, Oxford University Press, 1995. 354 p.

9. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special functions. A unified theory based on singularities*. Oxford, Oxford University Press, 2000. 312 p.

Информация об авторах

Овсиюк Елена Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Войнова Янина Александровна – учитель. Минское суворовское военное училище (ул. М. Богдановича, 29, 220029, Минск, Республика Беларусь). E-mail: voinyuschka@mail.ru.

Редьков Виктор Михайлович – д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by.

Information about the authors

Ovsiyuk Elena Mikhailovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Voynova Yanina Aleksandrovna – Physics teacher. Minsk Suvorov Military School (29, Bogdanovich Str., 220029, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru.

Red'kov Viktor Mikhailovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by.