Доклады Национальной академии наук Беларуси
2015 январь–февраль Том 59 № 1

УДК 530.182

М. А. КНЯЗЕВ

ИНВАРИАНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Белорусский национальный технический университет, Минск *Поступило 29.12.2014*

Одним из наиболее распространенных и хорошо изученных нелинейных уравнений в частных производных является уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) [1]. Решения этого уравнения, называемые солитонами, локализованы в достаточно малой области пространства, сохраняют форму при взаимодействии, обладают определенной энергией состояния, а также характеризуются отсутствием сингулярностей. Уравнение КдФ относится к так называемым интегрируемым нелинейным уравнениям, т. е. для него можно построить не только односолитонное решение, но и многосолитонные решения, описывающие связанные состояния. Хотя реализация в системе многосолитонного состояния (в частности, самого простого из них – двухсолитонного) менее вероятна, чем реализация односолитонного состояния, тем не менее, двухсолитонные состояния играют значительную роль при изучении существенно нелинейных систем.

Среди современных космологических моделей теория инфляционного расширения вселенной является одной из самых распространенных [2]. Поскольку уравнения Фридмана, используемые в инфляционной теории, также являются нелинейными, и между многими нелинейными уравнениями и их решениями существуют определенные взаимные связи, представляет интерес поиск таких связей и между решениями уравнений Фридмана и уравнением Кортевега–де Фриза.

Будем рассматривать (1 + 1)-мерное уравнение КдФ в виде

$$u_t + \frac{3}{u_0} u u_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где u_0 – некоторая константа. Для односолитонного решения этого уравнения

$$u(x,\ t) = -\frac{\lambda^2}{2}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\lambda}{2}(x - \lambda^2 t)\right], \tag{2}$$

где λ – некоторая константа, вышеупомянутая взаимосвязь установлена в работе [3] с использованием производной Шварца [4]. В данной работе рассмотрена инфляционная модель, содержащая только одно скалярное поле. Плотность возмущений исследована в наименьшем порядке для приближения медленного скатывания. Принималось, что скалярное инфляционное поле изменяется монотонно со временем так, что производная по времени от этого поля больше нуля. Было показано, что скорости и амплитуды односолитонного решения уравнения КдФ связаны с такими космологическими параметрами, как индекс спектра плотности возмущений и плотность энергии во вселенной.

Если ввести новую переменную $\varphi = x - \lambda^2 t$, то уравнение КдФ можно представить в виде нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Если теперь записать решение этого нелинейного уравнения в виде $u = u_0(\lambda^2 - 4y^2)$, где функция $y = y(\varphi)$ – частное решение уравнения Риккати, то эта функция, в свою очередь, будет удовлетворять некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка, левая часть которого представляет собой производную Шварца.

Представляет интерес изучить, как могут быть связаны космологические параметры инфляционной модели со следующим (двухсолитонным) решением уравнения КдФ. Очевидно, что для двухсолитонного решения вследствие нелинейности задачи эта связь окажется более сложной. Однако даже переход от уравнения КдФ к обыкновенному дифференциальному уравнению и последующее построение уравнений для новых функций, определяющих решение этого обыкновенного дифференциального уравнения, не удается осуществить простым обобщением результатов, полученных в [3]. В связи с этим в качестве первого этапа работы необходимо построить соответствующие уравнения связи.

Для простоты изложения можно рассмотреть двухсолитонное решение в одном из двух предельных случаев [5]: для момента времени, значительно отстоящего в прошлое от момента времени взаимодействия солитонных составляющих решения

$$u(x,\ t) = -2\lambda_1^3 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 - \Delta) - 2\lambda_2^3 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 + \Delta),$$

где $\Delta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$, $\gamma_1 = \lambda_1 x - 4\lambda_1^3 t + \delta_1$, $\gamma_2 = \lambda_2 x - 4\lambda_2^3 t + \delta_2$, $\delta_i = \dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{m_i(0)}{2\lambda_i}\left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)\right]$, здесь параметры λ_1 и λ_2 имеют тот же смысл, что и параметр λ в соотношении (2), а $m_i(0)$ – нормировочные константы, появляющиеся в результате решения задачи рассеяния; или для момента времени, значительно отстоящего в будущее от момента взаимодействия солитонных составляющих решения

$$u(x,\ t) = -2\lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 + \Delta) - 2\lambda_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 - \Delta).$$

В обоих случаях функцию $u(x,\ t)$ можно представить как

$$u(x,\ t) = u_1(x - 4\lambda_1^3 t) + u_2(x - 4\lambda_2^3 t). \tag{3}$$

Введем две новые независимые переменные $\varphi_1 = x - 4\lambda_1^3 t$ и $\varphi_2 = x - 4\lambda_2^3 t$, причем, поскольку различие между ними заключается только в значениях параметров λ_1 и λ_2, то дифференцирование по этим переменным будем обозначать штрихом, учитывая при вычислении производных очевидное различие в коэффициентах.

Если подставить соотношение (3) в уравнение (1) и потребовать выполнения условия

$$(u_1 u_2)' = 0, \tag{4}$$

то можно получить два несвязанных между собой уравнения для функций u_1 и u_2, аналогичных уравнению, построенному в работе [3] для функции u, определенной соотношением (2). Более интересным представляется случай, когда условие (4) не выполняется. В этом случае для функций u_1 и u_2 получаем систему уравнений

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \tag{5}$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0. \tag{6}$$

Введем две новые функции при помощи соотношений

$$u_1 = u_0(\lambda_1^2 - a_1 y_1^2), \quad u_2 = u_0(\lambda_2^2 - a_2 y_2^2),$$

тогда, исходя из системы уравнений (5), (6), для этих новых функций можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\frac{(y_1^2)'''}{(y_1^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \tag{7}$$

$$\frac{(y_2^2)'''}{(y_2^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2. \tag{8}$$

Каждое из построенных уравнений существенно отличается от полученного в работе [3] уравнения, содержащего производную Шварца. Используя явный вид производной Шварца

$$S[y(\varphi)] = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2,$$

можно из системы уравнений (7), (8) получить следующее уравнение связи между функциями y_1 и y_2:

$$\frac{4}{3}S[y_2] - \frac{1}{3}\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_2''}{y_2} = \frac{4}{3}S[y_1] - \frac{1}{3}\frac{y_1''}{y_1'} - \frac{y_1''}{y_1}. \tag{9}$$

Полученное выражение (9) представляет собой некоторое инвариантное соотношение, которому удовлетворяют обе составляющие рассмотренного двухсолитонного решения уравнения КдФ.

Построение в явном виде решения системы (7), (8) является достаточно сложной и нетривиальной задачей. В то же время используя уравнение (9), можно описать некоторые свойства функций y_1 и y_2, а также для некоторых частных случаев получить явные соотношения между ними.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
2. *Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., 1990.
3. *Lidsey J. E.* Cosmology and Korteweg–de Vries equation // http://xxx.lanl.gov (arXiv: astro-phys/1205.5641).
4. *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. New York, 1976.
5. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М., 1983.

M. A. KNYAZEV

maknyazev@bntu.by

INVARIANCE FOR THE COMPONENTS OF THE TWO-SOLITON SOLUTION TO THE KORTEWEG–DE VRIES EQUATION

Summary

The condition of invariance for the components of the two-soliton solution to the Korteweg–de Vries equation is constructed.