ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.955:519.622 Поступило в редакцию 11.05.2018
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-391-397 Received 11.05.2018

П. П. Забрейко, С. В. Пономарева

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Изучается вопрос о разрешимости аналога задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля с нелинейным ограничением на правую часть в определенных пространствах функций. Приводятся условия разрешимости рассматриваемой задачи в данных функциональных пространствах, а также условия существования единственного решения. При исследовании используются метод сведения задачи к уравнению Вольтерра второго рода, принцип Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве и принцип Банаха–Каччиопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве.

Ключевые слова: задача Коши, дробная производная Римана–Лиувилля, принцип Шаудера

Для цитирования. Забрейко, П. П. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля / П. П. Забрейко, С. В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-391-397

Petr P. Zabreiko, Svetlana V. Ponomareva

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR EQUATIONS WITH RIEMANN–LIOUVILLE'S FRACTIONAL DERIVATIVES

(Communicated by Corresponding Member Valentine V. Gorokhovik)

Abstract. In this article we study the solvability of the analogue of the Cauchy problem for ordinary differential equations with Riemann–Liouville's fractional derivatives with a nonlinear restriction on the right-hand side of functions in certain spaces. The conditions for solvability of the problem under consideration in given function spaces, as well as the conditions for existence of a unique solution are given. The study uses the method of reducing the problem to the second-kind Volterra equation, the Schauder principle of a fixed point in a Banach space, and the Banach-Cachoppoli principle of a fixed point in a complete metric space.

Keywords: Cauchy problem, fractional Riemann–Liouville derivative, Schauder principle

For citation: Zabreiko P. P., Ponomareva S. V. Solvability of the Cauchy problem for equations with Riemann–Liouville's fractional derivatives. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-391-397

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) \qquad (0 \le t \le T) \tag{1}$$

с дробной производной Римана–Лиувилля D^{α} порядка α, $0 < \alpha < 1$. Напомним, что дробная производная Римана–Лиувилля определяется равенством

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}. \qquad (2)$$

Относительно нелинейности $f(s,u)$ будем предполагать, что она непрерывна по совокупности переменных на множестве $(0,T]\times(-\infty,\infty)$.

Как и в случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, производная Римана–Лиувилля $D^{\alpha}x(t)$ исходную функцию $x(t)$ определяет неоднозначно. В самом деле, равенство $D^{\alpha}x(t)=0$ эквивалентно равенству

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}=0,$$

откуда

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}=\xi \qquad (\xi\in R).$$

В свою очередь, из последнего равенства вытекает, что функция $x(t)$ определяется равенством

$$x(t)=\xi t^{\alpha-1}.$$

Из этих рассуждений, известного определения интеграла дробного порядка Римана–Лиувилля

$$I^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}},$$

а также формулы композиции дробного интеграла и производной [1, с. 24] следует, что при отыскании решений дифференциального уравнения (1) естественно искать решения уравнения (1), удовлетворяющие дополнительному условию

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\alpha}x(t)=\xi. \qquad (3)$$

Отметим также, что задача Коши (1)–(3) может быть записана в эквивалентной форме (см., напр., [1, с. 28]):

$$\begin{cases}D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t)),\\ D^{\alpha-1}x(0+)=\xi.\end{cases}$$

Здесь $D^{\alpha-1}x(0+)\equiv I^{1-\alpha}x(0+)=\lim\limits_{t\to 0+}I^{1-\alpha}x(t).$

Отыскание таких решений сводится к решению интегрального уравнения

$$x(t)=\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds. \qquad (4)$$

Таким образом, отыскание решений дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (3), сводится к отысканию неподвижных точек оператора

$$Ax(t)=\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds \qquad (5)$$

в подходящем пространстве функций, определенных на отрезке $[0,T]$.

При ненулевых $\xi\in R$ естественно ожидать, что неподвижные точки оператора (5) или, что то же самое, решения уравнения (4), имеют особенность в нуле типа $t^{\alpha-1}$. Этот факт означает, что уравнение (4) и оператор (5) естественно рассматривать в пространстве $C_{1-\alpha}[0,T]$ определенных на отрезке $[0,T]$ и непрерывных на $(0,T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел

$$x(*) = \lim_{t\to 0}\frac{x(t)}{t^{\alpha-1}}.$$

С нормой

$$\|x\|_{\alpha-1} = \sup_{0<t\le T} t^{1-\alpha}\,|\,x(t)\,| \tag{6}$$

это пространство является банаховым.

Помимо нормы (6) нам понадобятся эквивалентные ей нормы

$$\|x\|_u = \sup_{0<t\le T} t^{1-\alpha}u(t)\,|\,x(t)\,|,$$

где $u(t)$ – заданная непрерывная положительная функция со значениями в некотором отрезке $[m_-, m_+]\subset(0,\infty)$.

Опишем простейшие условия, при которых оператор (5) действует в пространстве $C_{1-\alpha}$. Предположим, что нелинейность $f(t,u)$ удовлетворяет неравенству

$$|\,f(t,u)\,|\le \mu(t)+\nu(t)|\,u\,| \qquad (0<t\le T,\ -\infty<u<\infty), \tag{7}$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции со свойствами, которые будут описаны ниже. Тогда при $x\in C_{1-\alpha}$ выполняется неравенство

$$|\,f(t,x(t))\,|\le \mu(t)+\nu(t)\,|\,x(t)\,| \quad (0<t\le T).$$

Отсюда

$$|\,Ax(t)\,|\le \frac{|\,\xi\,|\,t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(\mu(s)+\nu(s)\,|\,x(s)\,|)\,ds \quad (0<t\le T)$$

и, далее,

$$|\,Ax(t)\,|\le \frac{|\,\xi\,|\,t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)\,|\,x(s)\,|\,ds=$$

$$=h_\xi(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)s^{1-\alpha}\,|\,x(s)\,|\,ds,$$

где

$$h_\xi(t)=\frac{|\,\xi\,|\,t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$|\,Ax(t)\,|\le h_\xi(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)\,ds\,\|x\|_{1-\alpha}.$$

Из этого неравенства вытекает, что оператор A будет действовать в пространстве $C_{1-\alpha}$, если

$$\tilde{\mu}(t)=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds\in C_{1-\alpha},\quad \tilde{\nu}(t)=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)\,ds\in C_{1-\alpha}, \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$\int_0^t t^{1-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds,\ \int_0^t t^{1-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)\,ds\in C. \tag{9}$$

Примерами таких функций могут служить функции

$$\mu(t)=t^{-\beta}\quad (0\le\beta<1),\qquad \nu(t)=t^{-\gamma}\quad (0\le\gamma<\alpha).$$

Л е м м а 1. *Пусть нелинейность* $f(t,u)$ *удовлетворяет неравенству (7), причем функции* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ *удовлетворяют условию (9).*

Тогда оператор (5) действует в пространстве $C_{1-\alpha}$ *и ограничен:*

$$\|Ax\|_{1-\alpha} \le \|h_{\xi}(t)\|_{1-\alpha} + \|\tilde{\nu}(t)\|_{0} \, \|x\|_{1-\alpha};$$

более того, этот оператор и вполне непрерывен.

Действие и ограниченность оператора (5) показана выше. Его непрерывность следует из непрерывности оператора суперпозиции $fx(t) = f(t, x(t))$, которая вытекает [2] из непрерывности нелинейности $f(s,u)$. Компактность этого оператора вытекает из компактности оператора I^{α} [2; 3].

Напомним принцип Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве: Если A – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X, оставляющий инвариантным ограниченное замкнутое выпуклое множество $V \subset X$, то он имеет в V по крайней мере одну неподвижную точку (т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в V по крайней мере одно решение x_*: $x_* = Ax_*$).

Для применения данного принципа нас будут интересовать ограниченные замкнутые и выпуклые множества $V \subset C_{1-\alpha}$

$$V = \{x(t) \in C_{1-\alpha} : \ |x(t)| \le t^{\alpha-1} v(t)\} \qquad (v(t) \in C).$$

Ограниченность, замкнутость и выпуклость этих множеств очевидна. Выясним, для каких $v(t)$ соответствующее множество V инвариантно для A: $AV \subseteq V$.

Пусть нелинейность $f(t,u)$ снова удовлетворяет неравенству (7):

$$|f(t,u)| \le \mu(t) + \nu(t)|u| \qquad (0 < t \le T, \ -\infty < u < \infty),$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции, для которых выполняется условие (9). Тогда при $x \in C_{1-\alpha}$ и $|x(t)| \le t^{\alpha-1} v(t)$ выполняется неравенство

$$|f(t, x(t))| \le \mu(t) + t^{\alpha-1}\nu(t) v(t) \quad (0 < t \le T).$$

Отсюда

$$|Ax(t)| \le \frac{|\xi| t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\mu(s) + s^{\alpha-1}\nu(s) v(s))\, ds \quad (0 < t \le T)$$

и, далее,

$$|Ax(t)| \le \frac{|\xi| t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} \nu(s) v(s)\, ds.$$

Из полученного неравенства вытекает, что оператор A оставляет множество V инвариантным, если для функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$\frac{|\xi| t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} \nu(s) v(s)\, ds \le t^{\alpha-1} v(t).$$

Будем искать такую функцию, как решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$v(t) = t^{1-\alpha} h_{\xi}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{1-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) v(s)\, ds \quad (0 \le t \le T) \tag{10}$$

в пространстве C непрерывных функций.

Л е м м а 2. *Пусть* $f(t,u)$ *удовлетворяет неравенству (7), функции* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ *удовлетворяют условиям (8). Тогда оператор A, определенный формулой (5), будет оставлять инвариантным множество V, определенное функцией* $v(t)$ $(AV \subseteq V)$, *где* $v(t)$ *– решение интегрального уравнения (10).*

Из этой леммы и принципа Шаудера вытекает

Т е о р е м а 1. *Пусть для правой части* $f(t,u)$ *уравнения (1) выполняется ограничение (7). Тогда задача Коши (1)–(3) при любом* $\xi \in R$ *имеет хотя бы одно решение* $x(t) \in C_{1-\alpha}$.

Напомним принцип Банаха–Каччопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве: Если A – действующий в полном метрическом пространстве (M,ρ) оператор, удовлетворяющий условию Липшица $\rho(Ax_1, Ax_2) \le k\rho(x_1, x_2)$ ($x_1, x_2 \in M$) с постоянной $k<1$, то он имеет в M единственную неподвижную точку (т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в M единственное решение x_*: $x_* = Ax_*$) и это решение является пределом последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$ ($n = 0,1,2,...$) при любом $x_0 \in M$.

В качестве метрического пространства ниже рассматривается пространство (M,ρ), в котором $M = V$ (V – построенное выше инвариантное для A множество), а метрика ρ определяется ниже.

Пусть теперь функция $f(s,u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(s,u_1) - f(s,u_2)| \le \lambda(s)|u_1 - u_2| \qquad (0 < s \le T,\ -\infty < u_1, u_2 < \infty) \tag{11}$$

с некоторой неотрицательной функцией $\lambda(s)$. Пусть $w(t)$ – непрерывная положительная функция на $(0,T]$ и

$$\|x\|_w = \max_{0<t\le T} t^{1-\alpha} w(t)|x(t)|$$

– норма на пространстве $C_{1-\alpha}$ (этой нормой определяется метрика ρ).

Тогда

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))\big|ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)|x_1(s) - x_2(s)|ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)s^{\alpha-1}w(s)^{-1}s^{1-\alpha}w(s)|x_1(s) - x_2(s)|ds,$$

откуда, по определению нормы $\|\cdot\|_w$,

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_w \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^t t^{1-\alpha}w(t)(t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)s^{\alpha-1}w(s)^{-1}\,ds\right\|\|x_1(t) - x_2(t)\|_w \tag{12}$$

(норма интегрального выражения П берется в смысле пространства C). Положим $\omega(t) = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}w(t)}$. Тогда интегральное выражение П можно переписать в виде

$$\Pi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega^{-1}(t)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)\omega(s)\,ds.$$

Будем предполагать, что функция $\lambda(t)$ такова, что интегральный оператор Вольтерра

$$J_\lambda^\alpha x(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)x(s)\,ds \tag{13}$$

в пространстве C является вполне непрерывным. (В качестве примера $\lambda(s)$ можно рассмотреть функцию $\lambda(s) = s^{-\gamma}$ с $0 \le \gamma < \alpha$.) Тогда его спектральный радиус равен нулю [4; 5]. Следовательно, при произвольном $k \in (0,1)$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)w(s)\,ds = w(t)$$

имеет решение $w(t) \in C.$ Но тогда

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^t t^{1-\alpha} w(t)(t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) s^{\alpha-1} w(s)^{-1}\, ds \right\| \le k,$$

и неравенство (12) с $w(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}\omega(t)}$ примет вид

$$\left\| Ax_1(t) - Ax_2(t) \right\|_w \le k \left\| x_1(t) - x_2(t) \right\|_w .$$

Иными словами, доказана

Л е м м а 3. *Пусть* $f(t, u)$ *удовлетворяет неравенству (11), функция* $\lambda(t)$ *удовлетворяет условиям (13). Тогда оператор A, определенный формулой (5), будет оставлять инвариантным множество V, определенное функцией* $v(t)$ $(AV \subseteq V)$, *где* $v(t)$ *– решение интегрального уравнения (10) и на нем удовлетворять условию Липшица с постоянной* $k < 1$ *в норме* $\| \cdot \|_w$.

Из этой леммы и принципа Шаудера вытекает

Т е о р е м а 2. *Пусть правая часть* $f(t, u)$ *уравнения (1) удовлетворяет неравенствам (7) и (11), причем операторы (8) и (13) компактны.*

Тогда задача Коши (1)–(3) при любом $\xi \in R$ *имеет единственное решение* $x(t)$, *определенное на* $(0, T]$.

Предыдущие рассуждения по стандартной схеме распространяются на дифференциальные уравнения дробного порядка с функциями, принимающими значения в банаховом пространстве, в частности, на системы уравнений.

Естественно возникает вопрос о возможности подобного рода рассуждений для других (не лиувилевских) производных дробного порядка.

Вопрос о разрешимости задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто рассматривался, например, в [6], где были получены условия существования и единственности решений задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах с так называемыми ухудшающими правыми частями, где был предложен метод исследования разрешимости задачи Коши, основанный на исследовании сходимости метода последовательных приближений в шкалах банаховых пространств.

Список использованных источников

1. Килбас, А. А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка / А. А. Килбас. – Самара, 2009. – 121 с.
2. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1966. – 500 с.
3. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко [и др.]. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
4. Забрейко, П. П. Об интегральных операторах Вольтерра / П. П. Забрейко // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 1. – С. 167–168.
5. Забрейко, П. П. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра / П. П. Забрейко // Литовский мат. сб. – 1967. – № 2. – С. 281–287.
6. Баркова, Е. А. Задача Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков с ухудшающими правыми частями / Е. А. Баркова, П. П. Забрейко // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1132–1134.

References

1. Kilbas A. A. *Theory and applications of fractional differential equations*. Samara, 2009. 121 p. (in Russian).
2. Krasnosel'skiy M. A., Zabreyko P. P., Pustyl'nik Ye. I., Sobolevskiy P. Ye. *Integral operators in spaces of summable functions*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 500 p. (in Russian).
3. Zabreyko P. P., Koshelev A. I., Krasnosel'skiy M. A., Mikhlin S. G., Rakovshchik L. S., Stetsenko V. Ya. *Integral equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 448 p. (in Russian).
4. Zabreyko P. P. Volterra integral operators. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 1, pp. 167–168 (in Russian).

5 Zabreyko P. P. On the spectral radius of Volterra integral operators. *Litovskii matematicheskii sbornik = The Lithuanian Mathematical Collection*, 1967, no. 2, pp. 281–287 (in Russian).

6. Barkova E. A., Zabreiko P. P. The Cauchy problem for fractional differential equations with worsening right-hand sides. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1199–1202. https://doi.org/10.1134/s0012266106080143

Информация об авторах

Забрейко Петр Петрович – доктор физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zabreiko@mail.ru.

Пономарева Светлана Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by.

Information about the authors

Zabreiko Petr Petrovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zabreiko@mail.ru.

Ponomareva Svetlana Vladimirovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by.