ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.216.73
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405

Поступило в редакцию 22.06.2018
Received 22.06.2018

М. М. Васьковский, И. В. Качан

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматриваются n-мерные стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3, и сносом. Получены асимптотические разложения математических ожиданий вида $P_t g(x) = Eg(X_t^x)$ для достаточно малых t, где через X_t^x обозначается решение указанного уравнения с начальным значением x, а $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – достаточно гладкая функция.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, потраекторный интеграл, производная Губинелли, стохастическое дифференциальное уравнение, асимптотическое разложение

Для цитирования. Васьковский, М. М. Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М. М. Васьковский, И. В. Качан // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 4. – С. 398–405. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405

Maxim M. Vaskouski, Ilya V. Kachan

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY MULTIVARIATE FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)

Abstract. In this article, n-dimensional stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions with the Hurst indices greater than 1/3 and a drift term are considered. We have obtained an expansion of expectations $P_t g(x) = Eg(X_t^x)$ for small t, where X_t^x denotes the solution of the mentioned equation with an initial value x, and $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a sufficiently smooth function.

Keywords: multivariate fractional Brownian motion, rough paths theory, Gubinelli’s derivative, stochastic differential equation, asymptotic expansions

For citation: Vaskouski M. M., Kachan I. V. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions. *Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 4, pp. 398–405 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = f(X_t)dB_t, t \in [0, T], \tag{1}$$

в котором $f = (f_0, ..., f_d)$, $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, d$, – достаточно гладкие функции с ограниченными производными; $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^T$, $B_t^{(0)} = t$, $B_t^{(i)}$, $i = 0, \ldots, d$, – независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i \in (1/3, 1)$, $H_0 = 1$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Цель настоящей работы состоит в получении асимптотических разложений для математических ожиданий вида $P_t g(x) = Eg(X_t^x)$ для достаточно малых t. Асимптотические формулы для операторов P_t, связанных с уравнением (1), были получены в работах [1] и [2] в случае, когда $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$. Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют охватить случай различных индексов Харста $H_i > 1/3$ и уравнений (1) со сносом.

Для любых банаховых пространств U_1, U_2, U будем обозначать через $C_b^k(U_1, U_2)$ пространство функций $\varphi : U_1 \to U_2$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно, а через $C^\alpha([0, T], U)$ – пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Для обозначения норм в указанных пространствах будем использовать символы $\|\cdot\|_{C_b^k}$ и $\|\cdot\|_\alpha$ соответственно, кроме того, через $\|\cdot\|_\infty$ будем обозначать максимум-норму. Выделим также класс $C_2^\alpha([0,T]^2, U_2)$ функций двух переменных $R(s, t) = R_{s,t}$, принимающих значения в U_2, для которых существует константа C такая, что $| R_{s,t} | \leq C\,|t - s|^\alpha$ для всех $(s, t) \in [0, T]^2$. Наименьшую такую константу также будем обозначать через $\| R \|_\alpha = \sup_{s,\, t\in[0,\, T],\; s\neq t} \dfrac{| R_{s,t} |_{U_2}}{| t-s |^\alpha}$. Отметим, что для функции Z класса $C^\alpha([0, T], U_1)$ можно определить приращения $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$, $(s, t) \in [0, T]^2$, принадлежащие пространству $C_2^\alpha([0,T], U_1)$. Поэтому мы будем также использовать обозначение $Z_{s,t}$ для соответствующих приращений функции одной переменной Z_t.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и удовлетворяющий почти наверное интегральному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_s^t f(X_r)dB_r, \quad t \in [0, T],$$

в котором интеграл в правой части понимается как потраекторный (определение потраекторного интеграла и ряда связанных с ним определений приведено в [2–4]). Решение X_t с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ будем называть единственным (почти наверное), если для любого другого решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $P(X_t = Y_t \ \forall t \in [0, T]) = 1$.

Путем тривиального обобщения теоремы 8.4 [3] может быть получено условие существования и единственности решения X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$: достаточно, чтобы функция f принадлежала пространству $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Более того, если имеют место включения $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $\varphi \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, то, как показано в [5], почти наверное справедлив следующий аналог формулы Ито:

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_s) + \int_s^t D\varphi(X_r) f(X_r) dB_r, \quad s, t \in [0, T]. \tag{2}$$

Далее будем придерживаться следующих обозначений:

$$\Delta^k[0, t] = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k : 0 \leq t_1 < \ldots < t_k \leq t\}, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \ldots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_k = (i_1, \ldots, i_k) \in \{0, \ldots, d\}^k,$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{i,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \ldots D_f^{(i_k)},$$

$$P_t g(x) = Eg(X_t^x), \quad t \geq 0.$$

В дальнейшем для краткости мы будем опускать индекс x у решения X_t^x.

Т е о р е м а. *Пусть функции f, g принадлежат пространствам $C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ соответственно, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H \in (1/3, 1/2]$ такого, что $H < \min_{i=0,\ldots,d} H_i$, справедливо следующее равенство*

$$P_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0,\ldots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|} (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathrm{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \ t \in [0, T], \tag{3}$$

в котором $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \ldots + H_{i_k}$ – сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \ldots, B^{(i_k)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя $N+1$ раз формулу Ито (2), получим

$$g(X_t)=g(x)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{I_k\in\{0,\dots,d\}^k}(D_f^{(I_k)}g)(x)\int_{\Delta^k[0,t]}dB^{(I_k)}+ \\ +\sum_{I_{N+1}\in\{0,\dots,d\}^{N+1}}\int_0^t\int_0^{t_{N+1}}\dots\int_0^{t_2}(D_f^{(I_{N+1})}g)(X_{t_1})dB_{t_1}^{(i_1)}\dots dB_{t_N}^{(i_N)}dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}. \tag{4}$$

Введем обозначение $\varphi_{I_{N+1}}(x)=(D_f^{(I_{N+1})}g)(x)$ и преобразуем последнее слагаемое в (4). Воспользуемся свойством самоподобия дробного броуновского движения: процесс $\widehat{B}_u^{(i_j|c)}=c^{H_{i_j}}B_{u/c}^{(i_j)}$ также является дробным броуновским движением с индексом Харста H_{i_j} для любого $c>0$, $j=\overline{1,\,N+1}$, $i_j\neq 0$. Следовательно, при фиксированном $t\in[0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^{t_{N+1}}\dots\int_0^{t_2}\varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1})dB_{t_1}^{(i_1)}\dots dB_{t_N}^{(i_N)}dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}=\\ &=\int_0^1 dB_{tt_{N+1}}^{(i_{N+1})}\int_0^{t_{N+1}}dB_{tt_N}^{(i_N)}\dots\int_0^{t_2}\varphi_{I_{N+1}}(X_{tt_1})dB_{tt_1}^{(i_1)}\overset{\mathcal{L}}{=}\\ &\overset{\mathcal{L}}{=}\int_0^1 d\widehat{B}_{tt_{N+1}}^{(i_{N+1}|t)}\int_0^{t_{N+1}}d\widehat{B}_{tt_N}^{(i_N|t)}\dots\int_0^{t_2}\varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{tt_1}^{(t)})d\widehat{B}_{tt_1}^{(i_1|t)}=\\ &=t^{H_{i_1}+\dots+H_{i_{N+1}}}\int_0^1 dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}\int_0^{t_{N+1}}dB_{t_N}^{(i_N)}\dots\int_0^{t_2}\varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{tt_1}^{(t)})dB_{t_1}^{(i_1)},\end{aligned} \tag{5}$$

где знак $\overset{\mathcal{L}}{=}$ означает совпадение распределений, а $\widehat{X}_\tau^{(t)}$ – решение уравнения

$$d\widehat{X}_\tau^{(t)}=f(\widehat{X}_\tau^{(t)})d\widehat{B}_\tau^{(t)},\quad \tau\in[0,T]$$

с начальным условием $\widehat{X}_0^{(t)}=x$ (здесь $\widehat{B}_\tau^{(t)}=(\widehat{B}_\tau^{(0|t)},\widehat{B}_\tau^{(1|t)},\dots,\widehat{B}_\tau^{(d|t)})^T$). Аналогично получаем равенство

$$\int_{\Delta^k[0,t]}dB^{(I_k)}\overset{\mathcal{L}}{=}t^{|H_{I_k}|}\int_{\Delta^k[0,1]}dB^{(I_k)}, \tag{6}$$

а посему из (4)–(6) после взятия математического ожидания получим

$$P_tg(x)=g(x)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{I_k\in\{0,\dots,d\}^k}t^{|H_{I_k}|}(D_f^{(I_k)}g)(x)\mathrm{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]}dB^{(I_k)}\right)+\mathcal{R}_{N+1}(t),$$

где

$$\mathcal{R}_{N+1}(t)=\sum_{I_{N+1}\in\{0,\dots,d\}^{N+1}}t^{|H_{I_{N+1}}|}\ \mathrm{E}\int_0^1\int_0^{t_{N+1}}\dots\int_0^{t_2}(D_f^{(I_{N+1})}g)(\widehat{X}_{tt_1}^{(t)})dB_{t_1}^{(i_1)}\dots dB_{t_N}^{(i_N)}dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}.$$

Поскольку справедливо неравенство $|H_{I_{N+1}}|\geq(N+1)H$ для любого I_{N+1}, то при $t<1$ имеем

$$|\mathcal{R}_{N+1}(t)|\leq(d+1)^{N+1}t^{(N+1)H}\times \\ \times\max_{I_{N+1}\in\{0,\dots,d\}^{N+1}}E\left|\int_0^1\int_0^{t_{N+1}}\dots\int_0^{t_2}(D_f^{(I_{N+1})}g)(\widehat{X}_{tt_1}^{(t)})dB_{t_1}^{(i_1)}\dots dB_{t_N}^{(i_N)}dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}\right|.$$

Таким образом, для завершения доказательства формулы (3) осталось установить справедливость неравенства

$$E\left|\int_0^1\int_0^{t_{N+1}}\dots\int_0^{t_2}(D_f^{(I_{N+1})}g)(\widehat{X}_{tt_1}^{(t)})dB_{t_1}^{(i_1)}\dots dB_{t_N}^{(i_N)}dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}\right|<\infty \tag{7}$$

для любых индексов $I_{N+1}=(i_1,\dots,i_{N+1})\in\{0,\dots,d\}^{N+1}$.

Рассмотрим кратные интегралы чуть более общего вида, нежели (7):

$$\mathcal{I}_t^{(k)}=\int_0^t\int_0^{t_{k-1}}\ldots\int_0^{t_1}\varphi(\widehat{X}_{cr}^{(c)})dB_r^{(i_1)}\ldots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})},\quad t\in[0,1],\ c\in(0,1].$$

Для единообразия положим $I_t^{(0)}=\varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)})$.

Л е м м а. *Пусть* φ *имеет непрерывные и ограниченные производные до 2-го порядка включительно. Тогда справедливы неравенства* $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)}-\mathcal{I}_s^{(k-1)}B_{s,t}^{(i)}|\le M_k|t-s|^{2H}$ *для любого* $i=\overline{0,d}$ *и* $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)}|\le\widetilde{M}_k|t-s|^H$, *где* $M_k,\widetilde{M}_k$ *– случайные величины (не зависящие от s, t).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем его индукцией по k.

Рассмотрим $k=1$. Докажем равенство $(\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}))'=c^{H_{i_1}}D\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})(\widehat{X}^{(c)})'_{c\cdot}$. Действительно, имеем следующее соотношение:

$$R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})|i_1}:=\varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)})-\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})-c^{H_{i_1}}D\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})(\widehat{X}^{(c)})'_{cs}B_{s,t}^{(i_1)}=[c^{H_{i_1}}B_{s,t}^{(i_1)}=\widehat{B}_{cs,ct}^{(i_1|c)}]=$$

$$=\varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)})-\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})-D\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}+D\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})R_{cs,ct}^{\widehat{X}^{(c)}|i_1}=$$

$$=\frac{1}{2}D^2\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)}+\theta\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)})\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\otimes\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}+D\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})R_{cs,ct}^{\widehat{X}^{(c)}|i_1}$$

для некоторого $\theta\in(0,1)$ ввиду разложения в ряд Тейлора. Здесь $R_{cs,ct}^{\widehat{X}^{(c)}|i_1}=\widehat{X}_{u,v}^{(c)}-(\widehat{X}^{(c)})'_u\widehat{B}_{u,v}^{(i_1|c)}$ – остаток для $\widehat{X}^{(c)}$; из теоремы 8.4 [3] следует, что $\|R^{\widehat{X}^{(c)}|i_1}\|_{2H}\le\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}<\infty$. Легко установить справедливость соотношения

$$\left|R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})|i_1}\right|\le\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2|ct-cs|^{2H}+\|D\varphi\|_\infty\left\|R^{\widehat{X}^{(c)}|i_1}\right\|_{2H}|ct-cs|^{2H}=$$

$$=c^{2H}\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2+\|D\varphi\|_\infty\left\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\right\|_{2H}\right)|t-s|^{2H}.$$

Из него следуют неравенства $\left\|R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})|i_1}\right\|_{2H}\le\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2+\|D\varphi\|_\infty\left\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\right\|_{2H}<\infty.$

Далее, поскольку $\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})'=c^{H_{i_1}}D\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})(\widehat{X}^{(c)})'_{c\cdot}=c^{H_{i_1}}D\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})f(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})$, то

$$\left|(\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})')_{s,t}\right|=c^{H_{i_1}}|(D\varphi f)(\widehat{X}_{ct}^{(c)})-(D\varphi f)(\widehat{X}_{cs}^{(c)})|=$$

$$=c^{H_{i_1}}\left|D(D\varphi f)(\widehat{X}_{cs}^{(c)}+\tilde{\theta}\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)})\right|\left|\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\right|=$$

$$=c^{H_{i_1}+H}(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H|t-s|^H.$$

Отсюда следуют оценки $\|\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})'\|_H\le(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H<\infty$.

Принимая во внимание неравенство теоремы 4.10 [3], будем иметь соотношение

$$\left|\int_s^t\varphi(\widehat{X}_{c\cdot r}^{(c)})dB_r^{(i_1)}-\varphi(\widehat{X}_{c\cdot s}^{(c)})B_{s,t}^{(i_1)}\right|\le c^{H_{i_1}}\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H}|t-s|^{2H}+$$

$$+C\left(\|B^{(i_1)}\|_H\|R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})|i_1}\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H}\|\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)})'\|_H\right)|t-s|^{3H}\le M_1|t-s|^{2H},$$

$$M_1=(C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H+\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty)\|\mathbb{B}\|_{2H}+$$

$$+C\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2+\|D\varphi\|_\infty\left\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\right\|_{2H}\right)\|B\|_H.$$

Итак, получили необходимое неравенство $|\mathcal{I}_{s,t}^{(1)} - \mathcal{I}_s^{(0)} B_{s,t}^{(i_1)}| \le M_1 |t-s|^{2H}$, как и утверждалось. Из доказанного следует справедливость соотношения

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(1)}| \le |\mathcal{I}_s^{(0)}| \, |B_{s,t}^{(i_1)}| + M_1 |t-s|^{2H} \le$$
$$\le (\|\varphi\|_\infty \|B\|_H + M_1) |t-s|^H =: \widetilde{M}_1 |t-s|^H .$$

Легко видеть, что случайные величины $M_1, \widetilde{M}_1$ не зависят от s, t и i_1.

Рассмотрим теперь $k = 2$. Используя неравенство теоремы 4.10 [3], оценку для $\mathcal{I}^{(1)}$ и рекуррентное соотношение $\mathcal{I}_t^{(k)} = \int_0^t \mathcal{I}_r^{(k-1)} dB_r^{(i_k)}$, $(\mathcal{I}^{(1)})' = \mathcal{I}^{(0)}$, получим неравенства

$$\left|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}\right| \le \left|(\mathcal{I}^{(1)})'_s \mathbb{B}_{s,t}^{(i_2)}\right| +$$
$$+ C(\|B^{(i_2)}\|_H \|(\mathcal{I}^{(1)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(1)})'_s B_{s,t}^{(i_2)}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H} \|(\mathcal{I}^{(1)})'\|_H) |t-s|^{3H} \le$$
$$\le \|\varphi\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^{2H} + C(M_1 \|B\|_H + \|\mathbb{B}\|_{2H} \, c^{H i_1} \|D\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H) |t-s|^{2H} \le M_2 |t-s|^{2H},$$
$$M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C \|D\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H) \|\mathbb{B}\|_{2H} + C M_1 \|B\|_H .$$

Оценка же на $\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H$ была получена с помощью формулы конечных приращений

$$\mathcal{I}_{s,t}^{(0)} = \varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)}) - \varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)}) = D\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta(\widehat{X}_{ct}^{(c)} - \widehat{X}_{cs}^{(c)}))(\widehat{X}_{ct}^{(c)} - \widehat{X}_{cs}^{(c)}).$$

Как и в случае $k = 1$, отсюда получаем соотношения $|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| \le (\widetilde{M}_1 \|B\|_H + M_2) |t-s|^H = \widetilde{M}_2 |t-s|^H$, поскольку ввиду $\mathcal{I}_s^{(1)} = \mathcal{I}_{0,s}^{(1)}$, $s^H < 1$:

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - |\mathcal{I}_{0,s}^{(1)}| \, |B_{s,t}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_H \|B\|_H |t-s|^H .$$

Легко видеть, что случайные величины $M_2, \widetilde{M}_2$ не зависят от s, t и i_2.

Предположим, что утверждение выполнено для всех натуральных чисел, меньших k, и докажем его для $k + 1$. По предположению индукции из теоремы 4.10 [3] будут следовать неравенства

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \le$$
$$\le C(\|B^{(i_{k+1})}\|_H \|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_H) |t-s|^{3H} \le$$
$$\le C(M_k \|B\|_H + \widetilde{M}_{k-1} \|\mathbb{B}\|_{2H}) |t-s|^{2H} .$$

В то же время справедливы соотношения

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - |\mathcal{I}_{0,s}^{(k-1)}| \, |\mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - \widetilde{M}_{k-1} \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^{2H} .$$

Таким образом, устанавливаем оценку

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \le M_{k+1} |t-s|^{2H},$$

где $M_{k+1} = (C+1) \|\mathbb{B}\|_{2H} \widetilde{M}_{k-1} + C \|B\|_H M_k$. Осталось заметить, что из справедливых неравенств

$$M_{k+1} |t-s|^H \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - |\mathcal{I}_{0,s}^{(k)}| \, |B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - \widetilde{M}_k \|B\|_H |t-s|^H$$

окончательно следует оценка

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| \le (M_{k+1} + \widetilde{M}_k \|B\|_H) |t-s|^H =: \widetilde{M}_{k+1} |t-s|^H .$$

Легко видеть, что случайные величины $M_{k+1}, \widetilde{M}_{k+1}$ не зависят от s, t и i_{k+1}. Лемма доказана.

Вернемся к оценке интегралов $\mathcal{I}_k$. Из леммы, в частности, следуют соотношения

$$(\mathcal{I}^{(k)})' = \mathcal{I}^{(k-1)},\ R_{s,t}^{\mathcal{I}^{(k)}} = \mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B_{s,t}^{(i)},\ \| R_{s,t}^{\mathcal{I}^{(k)}} \|_{2H} \le M_k,\ \| \mathcal{I}^{(k)} \|_H \le \widetilde{M}_k,$$

а также $\| \mathcal{I}^{(k)} \|_\infty \le \widetilde{M}_k$, поскольку $\max_{t\in[0,1]} | \mathcal{I}_t^{(k)} | = \max_{t\in[0,1]} | \mathcal{I}_{0,t}^{(k)} |$.

Очевидная индукция по k показывает, что величины

$$M_k = M_k(\| B \|_H, \| \mathbb{B} \|_{2H}, \| \widehat{X}^{(c)} \|_H, \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}),\ \widetilde{M}_k = \widetilde{M}_k(\| B \|_H, \| \mathbb{B} \|_{2H}, \| \widehat{X}^{(c)} \|_H, \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H})$$

являются многочленами с постоянными положительными коэффициентами, причем нормы $\| B \|_H$, $\| \mathbb{B} \|_{2H}$, $\| \widehat{X}^{(c)} \|_H$, $\| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}$ входят в одночлены в степенях не выше k, k, 2, 1 соответственно. Пусть $\tilde{\gamma}_k$ – максимальный коэффициент многочлена $\widetilde{M}_k(\| B \|_H, \| \mathbb{B} \|_{2H}, \| \widehat{X}^{(c)} \|_H, \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H})$ и пусть

$$E(\| B \|_H^{i_1} \| \mathbb{B} \|_{2H}^{i_2} \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{j_1} \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{j_2}) = \max_{\substack{i,i'=\overline{0,k},\\ j=0,1,2,\, j'=0,1}} E(\| B \|_H^{i} \| \mathbb{B} \|_{2H}^{i'} \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{j} \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{j'}).$$

Взяв супремум и математическое ожидание от обеих частей неравенства $| \mathcal{I}_{s,t}^{(k)} | \le \widetilde{M}_k | t-s |^H$, получим оценку

$$\sup_{0\le s<t\le 1} E | \mathcal{I}_{s,t}^{(k)} | \le E\widetilde{M}_k \le 2k^2 \tilde{\gamma}_k\ E(\| B \|_H^{i_1} \| \mathbb{B} \|_{2H}^{i_2} \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{j_1} \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{j_2}).$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует справедливость неравенства

$$E(\| B \|_H^{i_1} \| \mathbb{B} \|_{2H}^{i_2} \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{j_1} \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{j_2}) \le$$
$$\le (E \| B \|_H^{4i_1}\ E \| \mathbb{B} \|_{2H}^{4i_2}\ E \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{4j_1}\ E \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{4j_2})^{1/4}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$E \sup_{0\le s<t\le 1} \left| \int_s^t \int_0^{t_{k-1}} \ldots \int_0^{t_1} \varphi(\widehat{X}_{cr}^{(c)}) dB_r^{(i_1)} \ldots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})} dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \right| \le$$
$$\le 2k^2 \tilde{\gamma}_k\ (E \| B \|_H^{4i_1}\ E \| \mathbb{B} \|_{2H}^{4i_2}\ E \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{4j_1}\ E \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{4j_2})^{1/4}. \quad (8)$$

Согласно [6], любой момент порядка $p \ge 1$ случайной величины $\| B \|_H$ конечен; в частности, конечен момент $E \| B \|_H^{4i_1}$. То же верно и для случайной величины $\| \mathbb{B} \|_{2H}$ (см. [3, теорема 10.5]), т. е., в частности, $E \| \mathbb{B} \|_{2H}^{4i_2} < \infty$.

Из доказательства предложения 8.3 [3] следует, что существуют универсальные положительные постоянные c_1, c_2, такие, что выполняются неравенства

$$\| \widehat{X}^{(c)} \|_H \le c_1 \left(\| \widehat{B}^{(c)} \|_H + \| \widehat{\mathbb{B}}^{(c)} \|_{2H}^{1/2} + \| \widehat{B} \|_H^{1/H} + \| \widehat{\mathbb{B}}^{(c)} \|_{2H}^{1/(2H)} \right), \quad (9)$$

$$\| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H} \le c_2 \left(\| \widehat{B}^{(c)} \|_H^2 + \| \widehat{\mathbb{B}}^{(c)} \|_{2H} + \| \widehat{B}^{(c)} \|_H^{1+\frac{1}{H}} + \| \widehat{\mathbb{B}}^{(c)} \|_{2H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2H}} \right). \quad (10)$$

Таким образом, оценки (9) и (10) означают, что моменты $E \| \widehat{X}^{(c)} \|_H^{4j_1}$, $E \| R^{\widehat{X}^{(c)}} \|_{2H}^{4j_2}$ конечны. Тогда, очевидно, и правая часть (8) конечна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим случай, когда все показатели Харста H_i, $i = 1, \ldots, d$, равны 1/2. В этом случае уравнение (1) можно рассматривать как уравнение Стратоновича. Учитывая связь уравнений Ито и Стратоновича [7, предложение 2.4], данное уравнение можно свести к уравнению Ито

$$dX_t = \tilde{f}_0(X_t)dt + \widehat{f}(X_t)dW_t, \tag{11}$$

где $\widehat{f}$ – матрица, составленная из вектор-столбцов $f_1, \ldots, f_d$; W_t – d-мерное броуновское движение,

$$\tilde{f}_0(X) = f_0(X) - \mathrm{col}(\rho_1(X), \ldots, \rho_n(X)),$$

$$\rho_j(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \widehat{f}_{ji}(X)}{\partial x_k}\widehat{f}_{ki}(X).$$

Так как решение уравнения (11) обладает марковским свойством [8, теорема 7.1.2], то, полагая $N = 2$ в соотношении (3), получим, что семейство операторов P_t является C_0-полугруппой с генератором

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{n}\tilde{f}_{0,j}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{n}f_{k,j}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2.$$

Таким образом, для функции $u(x,t) = P_t g(x)$ получаем обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u.$$

Отметим, что даже для простейшего одномерного уравнения $dX_t = dB_t^{\alpha}$ при $\alpha \in (1/3, 1/2) \cup (1/2, 1)$ решение $X_t = B_t^{\alpha}$ не является семимартингалом, и следовательно, не обладает марковским свойством, которое является ключевым при выводе уравнений Колмогорова [8, теорема 8.1.1].

Список использованных источников

1. Baudoin, F. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions / F. Baudoin, L. Coutin // Stochastic Processes and their Applications. – 2007. – Vol. 117, N 5. – P. 550–574. https://doi.org/10.1016/j.spa.2006.09.004

2. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques. – 2009. – Vol. 45, N 1. – P. 157–174. https://doi.org/10.1214/07-aihp159

3. Friz, P. A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. – Springer, 2014. – 263 p.

4. Gubinelli, M. Controlling rough paths / M. Gubinelli / J. Funct. Anal. – 2004. – Vol. 216, N 1. – P. 86–140. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002

5. Васьковский, М. М. Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3 / М. М. Васьковский, И. В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. – Пенза, 2017. – С. 12–16.

6. Nualart, D. Differential equations driven by fractial Brownian motion / D. Nualart, A. Rascanu // Collectanea Mathematica. – 2002. – Vol. 53, N 1. – P. 55–81.

7. Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. – Минск: БГУ, 2009. – 231 с.

8. Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль; пер. с англ. – М.: Мир, 2003. – 408 с.

References

1. Baudoin F., Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions. *Stochastic Processes and their Applications*, 2007, vol. 117, no. 5, pp. 550–574. https://doi.org/10.1016/j.spa.2006.09.004

2. Neuenkirch A., Nourdin I., Rößler A., Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 157–174. https://doi.org/10.1214/07-aihp159

3. Friz P., Hairer M. *A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures*. Springer International Publishing Switzerland, 2014. 263 p.

4. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002

5. Vaskouski M. M., Kachan I. V. An analogue of the Ito formula for stochastic differential equations with fractional Brownian motions having different Hurst indices greater than 1/3. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem* [*Analytical and numerical methods of modeling of natural-scientific and social problems*]. Penza, 2017, pp. 12–16 (in Russian).

6. Nualart D., Rascanu A. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collectanea Mathematica*, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 55–81.

7. Levakov A. A. *Stochastic Differential Equations*. Minsk, Belarusian State University, 2009. 231 p. (in Russian) .

8. Oksendal B. *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 2003. 379 p.

Информация об авторах

Васьковский Максим Михайлович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vaskovskii@bsu.by.

Качан Илья Вадимович – магистрант, ассистент кафедры. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ilyakachan@gmail.com.

Information about the authors

Vaskouski Maxim Mikhailovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vaskovskii@bsu.by.

Kachan Ilya Vadimovich – Undergraduate, Assistant of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ilyakachan@gmail.com.