ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.977 Поступило в редакцию 04.04.2018
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-519-524 Received 04.04.2018

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ТРАЕКТОРИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной динамической системы с линейными терминальными ограничениями. Строятся асимптотические приближения к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в этой задаче.

Ключевые слова: малый параметр, квазилинейная система, квадратичный функционал, оптимальное управление, обратная связь, асимптотические приближения

Для цитирования. Калинин, А. И. Асимптотический метод минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной динамической системы / А. И. Калинин, Л. И. Лавринович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 5. – С. 519–524. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-519-524

Anatoly I. Kalinin, Leonid I. Lavrinovich

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ASYMPTOTIC MINIMIZATION METHOD OF THE INTEGRAL QUADRATIC FUNCTIONAL ON THE TRAJECTORIES OF A QUASILINEAR DYNAMICAL SYSTEM

(Communicated by Corresponding Member Valentine V. Gorokhovik)

Abstract. The problem of minimizing the integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear dynamical system with linear terminal constraints is under consideration. Asymptotic approximations to the optimal open-loop and optimal feedback controls for this problem are constructed.

Keywords: small parameter, quasilinear system, quadratic functional, optimal control, feedback, asymptotic approximations

For citation: Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Asymptotic minimization method of the integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear dynamical system. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 5, pp. 519–524 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-519-524

Введение. Динамические системы, содержащие малые параметры при нелинейностях, принято называть квазилинейными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами [1–5]. Интерес к квазилинейным задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных систем.

В сообщении рассматривается задача оптимального управления квазилинейной системой с интегральным квадратичным критерием качества при наличии линейных терминальных ограничений на траектории. Ее можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами. Целью работы является построение асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению рассмотренной задачи.

Постановка задачи. В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)=(u_1(t),\dots,u_r(t))$, $t\in T=[t_*,t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}=A(t)x+\mu f(x,t)+B(t)u,\ \ x(t_*)=x_*, \tag{1}$$

$$Hx(t^*)=g,\ \ J(u)=\frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}(x^{\mathrm{T}}Q(t)x+u^{\mathrm{T}}P(t)u)\,dt\to\min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр; t_*, t^* – заданные моменты времени $(t_*<t^*)$; x – n-вектор; g – m-вектор $(m\le n)$. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры, при этом среди терминальных ограничений нет «лишних», т. е. $\operatorname{rank} H=m$. В критерии качества $Q(t)$ – неотрицательно-определенная, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрические матрицы для всех $t\in T$. В дальнейшем для определенности будем считать управления непрерывными справа в любой момент времени.

П р е д п о л о ж е н и е 1. *Элементы матриц* $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x\in R^n$, $t\in T$, *принадлежат классу* C^p, $p\ge 1$.

О п р е д е л е н и е 1. *Управление* $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in T$, *с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка* $(N=0,1,2,\dots)$ *в задаче (1), (2), если оно отклоняется по критерию качества от оптимального управления на величину* $O(\mu^{N+1})$, *а порожденная им траектория* $x(t,\mu)$, $t\in T$, *удовлетворяет терминальному ограничению с точностью того же порядка малости.*

О п р е д е л е н и е 2. *Вектор-функцию* $u^{(N)}(x,t,\mu)$ *назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния* (x_*,t_*), $t_*<t^*$, *имеет место* $u^{(N)}(x_*,t_*,\mu)=u^{(N)}(t_*,\mu)$, *где* $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in T$, *– асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2).*

Настоящее сообщение посвящено построению асимптотически субоптимальных управлений и обратных связей в задаче (1), (2).

Базовая задача. Вычисления при построении асимптотических приближений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu=0$ и в отличие от нее является задачей оптимизации линейной системы.

П р е д п о л о ж е н и е 2. *Динамическая система в базовой задаче является управляемой на отрезке* $[\tau,t^*]$ *относительно подпространства* $Hx=0$ *при любом* $\tau\in[t_*,t^*)$ *[6].*

Заметим, что это предположение для стационарной динамической системы эквивалентно требованию $\operatorname{rank}(HB,HAB,\dots,HA^{n-1}B)=m.$

При выполнении предположения 2 в базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение [7], которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [8] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t\in T$, – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такой m-вектор множителей Лагранжа λ_0, что выполняется условие

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t)B(t)u^0(t)-\frac{1}{2}u^{0\mathrm{T}}(t)P(t)u^0(t)=\max_{u\in R^r}\left(\psi^{0\mathrm{T}}(t)B(t)u-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right),\ \ t\in T,$$

где $\psi^0(t)$, $t\in T$, – решение сопряженной системы $\dot{\psi}=-A^{\mathrm{T}}(t)\psi+Q(t)x^0(t)$, $\psi(t^*)=H^{\mathrm{T}}\lambda_0$. Отсюда непосредственно получаем $u^0(t)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t)$, $t\in T$.

Асимптотический анализ решения исходной задачи. Пусть $x(t, \nu, \mu)$, $\psi(t, \nu, \mu)$, $t \in T$, – решение начальной задачи

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi,\ x(t_*) = x_*,$$
$$\dot{\psi} = Q(t)x - \left(A(t) + \mu\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right)^{\mathrm{T}}\psi,\ \psi(t_*) = \nu. \tag{3}$$

Рассмотрим систему конечных уравнений

$$Hx(t^*, \nu, \mu) = g,\ \ \psi(t^*, \nu, \mu) - H^{\mathrm{T}}\lambda = 0 \tag{4}$$

относительно переменных ν, λ при достаточно малых μ.

Т е о р е м а. *При выполнении предположений 1, 2 в задаче (1), (2) с достаточно малым (по модулю)* μ *существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью и представимо в виде*

$$u^0(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t, \nu(\mu), \mu),\ \ t \in T. \tag{5}$$

Значение $\nu(\mu)$ *вектора сопряженных переменных в момент* t_* *и m-вектор множителей Лагранжа* $\lambda(\mu)$, *соответствующий в силу принципа максимума оптимальному управлению, удовлетворяют уравнениям (4), причем* $\nu(\mu) \in C^p$, $\nu(0) = \nu_0 = \psi^0(t_*)$, $\lambda(\mu) \in C^p$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

Доказываются сформулированные утверждения путем применения теоремы о неявной функции к системе уравнений (4). Невырожденность матрицы Якоби в данном случае гарантируется предположением 2.

Построение асимптотических приближений. Пусть задано натуральное число N, $N < p$. Поскольку $\nu(\mu)$ принадлежит классу C^p и $\nu(0) = \nu_0$, то имеет место асимптотическое равенство

$$\nu(\mu) = \nu^{(N)}(\mu) + O(\mu^{N+1}),$$

где

$$\nu^{(N)}(\mu) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{N}\mu^k\nu_k, \tag{6}$$

есть полином Тейлора N-й степени. Асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2) представимо в виде (сравни с (5))

$$u^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t, \nu^{(N)}(\mu), \mu),\ \ t \in T. \tag{7}$$

Для его построения нужно найти коэффициенты $\nu_1,\ \ldots,\ \nu_N$ полинома (6), что можно сделать, применяя методику, предложенную в [9]. Следуя этой методике, нужно разложить левые части уравнений (4) по целым степеням μ до порядка N включительно, применяя формализм Пуанкаре к начальной задаче (3), а затем методом неопределенных коэффициентов найти векторы $\nu_1,\ \ldots,\ \nu_N$. Вычисления при этом сводятся к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Вектор-функция $\psi(t, \nu^{(N)}(\mu), \mu)$, $t \in T$, есть решение начальной задачи (3) с $\nu = \nu^{(N)}(\mu)$. Применяя классическую технику Пуанкаре к этой задаче, получаем асимптотическое представление $\psi(t, \nu^{(N)}, \mu) = \psi^{(N)}(t, \mu) + O(\mu^{N+1})$, $t \in T$, где $\psi^{(N)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\psi_k(t)$, $t \in T$, а вектор-функции $\psi_k(t)$, $t \in T$, находятся в результате последовательного решения задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений. Управление

$$\overline{u}^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^{(N)}(t, \mu),\ \ t \in T, \tag{8}$$

наряду с (7) является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1), (2). Поскольку $\psi^{(0)}(t, \mu) = \psi^0(t)$, то $\overline{u}^{(0)}(t, \mu) = u^0(t)$, $t \in T$, т. е. решение базовой задачи является асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Асимптотически субоптимальное управление первого порядка имеет вид

$$\overline{u}^{(1)}(t,\mu)=u^0(t)+\mu P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1(t),\ t\in T,$$

где $\psi_1(t),\ t\in T,$ есть результат решения задачи Коши для системы

$$\dot{x}_1=A(t)x_1+B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1+f(x^0(t),t),\ \dot{\psi}_1=Q(t)x_1-A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1-\frac{\partial h}{\partial x}(x^0(t),\psi^0(t),t) \tag{9}$$

с начальными условиями $x_1(t_*)=0,\ \psi_1(t_*)=\nu_1,$ в которой $h(x,\psi,t)=\psi^{\mathrm{T}}f(x,t).$

Поскольку в силу (8)

$$\overline{u}^{(N)}(t_*,\mu)=P^{-1}(t_*)B^{\mathrm{T}}(t_*)\psi^{(N)}(t_*,\mu)=P^{-1}(t_*)B^{\mathrm{T}}(t_*)\sum_{k=0}^{N}\mu^k\nu_k, \tag{10}$$

то для построения асимптотически субоптимальных обратных связей нужно указать зависимость коэффициентов полиномов (6) от начального состояния (x_*,t_*) динамической системы в задаче (1), (2). Это можно сделать, проанализировав невырожденные системы линейных алгебраических уравнений, полученные для нахождения векторов $\nu_0,\ \nu_1,\dots,\ \nu_N$ методом неопределенных коэффициентов. Такой анализ, в частности, показывает, что

$$\nu_0=\nu_0(x_*,t_*)=F_{22}^{-1}(t_*)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)(H(F_{12}(t_*)K(t_*)-F_{11}(t_*))x_*+g)-K(t_*)x_*. \tag{11}$$

Здесь $K(t)=F_{22}^{-1}(t)F_{21}(t),\ M(t)=HF_{12}(t)F_{22}^{-1}(t)H^{\mathrm{T}},\ t\in T,$ а матрица

$$F(t)=\begin{pmatrix}F_{11}(t) & F_{12}(t)\\ F_{21}(t) & F_{22}(t)\end{pmatrix},\ t\in T,$$

с блоками размеров $n\times n$ есть решение начальной задачи $\dot{F}=-F\overline{A}(t),\ F(t^*)=E_{2n},$ в которой

$$\overline{A}(t)=\begin{pmatrix}A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\\ Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t)\end{pmatrix}.$$

Заметим, что с другой стороны, матричная функция $K(t),\ t\in T,$ есть решение дифференциального уравнения Риккати $\dot{K}=-KA(t)-A^{\mathrm{T}}(t)K+KB(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K-Q(t),\ K(t^*)=0.$

Поскольку $\overline{u}^0(t_*,\mu)=P^{-1}(t_*)B^{\mathrm{T}}(t_*)\nu_0(x_*,t_*),$ а $\overline{u}^0(t,\mu),\ t\in T,$ есть асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в задаче (1), (2), то согласно определению 2 вектор-функция

$$u^0(x,t)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\nu_0(x,t), \tag{12}$$

где $\nu_0(x,t)$ задается формулой (11), будет асимптотически субоптимальной обратной связью нулевого порядка в исходной задаче.

Анализируя систему линейных алгебраических уравнений для компонент вектора $\nu_1,$ получаем

$$\nu_1(x_*,t_*)=-F_{22}^{-1}(t_*)(H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)H(F_{12}(t_*)F_{22}^{-1}(t_*)\psi_1^0(t^*,x_*,t_*)-x_1^0(t^*,x_*,t_*))-\psi_1^0(t^*,x_*,t_*)), \tag{13}$$

где $x_1^0(t,x_*,t_*),\ \psi_1^0(t,x_*,t_*),\ t\in T,$ – решение задачи Коши для системы (9) с начальными условиями $x_1(t_*)=0,\ \psi_1(t_*)=0,$ в которой $x^0(t)=x^0(t,x_*,t_*),\ \psi^0(t)=\psi^0(t,x_*,t_*),\ t\in T,$ – траектории прямой и сопряженных систем, соответствующих оптимальному управлению в базовой задаче. При вычислении значений этих функций можно воспользоваться формулой Коши.

Из (10) следует, что асимптотически субоптимальная обратная связь первого порядка в задаче (1), (2) представима в виде $\overline{u}^{(1)}(x,t,\mu)=u^{(0)}(x,t)+\mu u^{(1)}(x,t),$ где $u^{(0)}(x,t)$ задается (11), (12), а для вычисления значений вектор-функции $u^{(1)}(x,t)=-P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\nu_1(x,t)$ используется (13).

В задаче оптимального управления с закрепленным правым концом траектории, которая является частным случаем задачи (1), (2) $(H = E_n, g = 0)$ формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей упрощаются. Обратная связь нулевого порядка, как легко убедиться, принимает вид $u^{(0)}(x,t) = -P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)F_{12}^{-1}(t)F_{11}(t)x$ [10]. Относительная управляемость в данном случает означает полную управляемость [1].

Значительно проще строятся асимптотически субоптимальные обратные связи в задаче (1), (2) и случае, когда $Q(t) = 0,\ t \in T$. В этом случае $F_{21}(t) = K(t) = 0,\ F_{11}(t) = F_0(t),\ F_{22}^{-1}(t) = F_0^{\mathrm{T}}(t)$, $M(t) = C(t),\ t \in T$. Матричная функция $F_0(t)$ является решением начальной задачи $\dot{F}_0 = -F_0 A(t)$, $F_0(t^*) = E_n$, а

$$C(t) = \int_t^{t^*} L(\tau)B(\tau)P^{-1}(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)L^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau,\ t \in T,$$

где $L(t),\ t \in T,$ – решение начальной задачи $\dot{L} = -LA(t),\ L(t^*) = H$. Тогда (13) для асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка принимает вид

$$u^0(x,t) = -P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)L^{\mathrm{T}}(t)C^{-1}(t)(L(t) - g).$$

Заключение. В сообщении предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в рассмотренной задаче. При их использовании вычисления сводятся к решению линейно-квадратичной задачи оптимального управления, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Список использованных источников

1. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

2. Киселев, Ю. Н. Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для систем управления, близкой к линейным / Ю. Н. Киселев // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 182, № 1. – С. 31–34.

3. Falb, P. L. Some successive approximation methods on control and oscillation theory / P. L. Falb, J. L. Jong. – New York, London: Academic Press, 1969. – 355 p. https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6152-1

4. Черноусько, Ф. Л. Управления колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

5. Калинин, А. И. Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления / А. И. Калинин // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 104–114.

6. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971.

7. Мордухович, Б. Ш. Существование оптимальных управлений / Б. Ш. Мордухович // Соврем. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 6. – С. 207–271.

8. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.] – М.: Наука, 1983. – 392 с.

9. Калинин, А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А. И. Калинин. – Минск: Экоперспектива, 2000. – 183 с.

10. Калинин, А. И. Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы / А. И. Калинин, Л. И. Лавринович // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 2. – С. 3–12.

References

1. Krasovskii N. N. *Theory of Control of Motion*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p. (in Russian).

2. Kiselev Yu. N. An asymptotic solution of the problem of time-optimal control systems which are close to linear ones. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1968, vol. 182, no. 1, pp. 31–34 (in Russian).

3. Falb P. L., Jong J. L. *Some Successive Approximation Methods on Control and Oscillation Theory*. New York, London, Academic Press, 1969. 355 p. https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6152-1

4. Chernous’ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N. *Control of Oscillations*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 384 p. (in Russian).

5. Kalinin A. I. Asymptotics of the Solutions of Perturbed Optimal Control Problems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 75–84.

6. Gabasov R., Kirillova F. M. *Qualitative theory of optimal processes*. Moscow, Nauka Publ., 1971. (in Russian).

7. Mordukhovich B. Sh. Existence of Optimal Controls. *Sovremennye Problemy Matematiki* [*Modern problems of mathematics*]. Moscow, VINITI, 1976, vol. 6, pp. 207–271 (in Russian).

8. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Moscow, New York, Gordon and Breach, 1986. 392 p.

9. Kalinin A. I. *Asymptotic Methods for Optimization of Disturbed Dynamical Systems.* Minsk, Ekoperspektiva Publ., 2000. 183 p. (in Russian).

10. Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Application of the perturbation method for the minimization of an integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear system. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 2, pp. 149–158. https://doi.org/10.1134/s1064230714020117

Информация об авторах

Калинин Анатолий Иосифович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kalininai@bsu.by.

Лавринович Леонид Иванович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lavrinovich@bsu.by.

Information about the authors

Kalinin Anatoliy Iosiphovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kalininai@bsu.by.

Lavrinovich Leonid Ivanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lavrinovich@bsu.by.