

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.6  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530>

Поступило в редакцию 23.05.2018  
Received 23.05.2018

**П. И. Соболевский, С. В. Баханович**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

## **ПЛОТНЫЕ ПОКРЫТИЯ ОБЛАСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ГЕКСАГОНАЛЬНЫМИ ТАЙЛАМИ**

*(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)*

**Аннотация.** Исследованы аспекты применения гексагонального тайлинга к алгоритмам с двумерной областью вычислений. Предложено формальное определение параметризованного гексагонального тайлинга. Получены необходимые и достаточные условия плотного покрытия области вычислений гексагональными тайлами.

**Ключевые слова:** тайлинг, гексагональный тайлинг, тайл, оптимизация программ, суперкомпьютер

**Для цитирования.** Соболевский, П. И. Плотные покрытия области вычислений гексагональными тайлами / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 5. – С. 525–530. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530>

**Pavel I. Sobolevsky, Sergei V. Bakhanovich**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

## **DENSE COVERAGE OF THE COMPUTATIONAL DOMAIN BY HEXAGONAL TILES**

*(Communicated by Corresponding Member Leonid A. Yanovich)*

**Abstract.** The hexagonal tiling in application to algorithms with a two-dimensional computational domain is investigated. A formal definition of a parametrized hexagonal tiling is proposed. Necessary and sufficient conditions for a dense coverage of the computational domain by hexagonal tiles are obtained.

**Keywords:** tiling, hexagonal tiling, tile, code optimization, supercomputer

**For citation:** Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V. Dense coverage of the computational domain by hexagonal tiles. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 5, pp. 525–530 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530>

**Введение.** Производительность последовательных и параллельных программ зависит от ряда факторов. Важное значение имеет то, насколько при разработке программ учитываются особенности архитектуры вычислительных систем. Одним из ключевых объектов внимания здесь является память компьютера, а точнее то, насколько рационально используется ее иерархическая структура. При разработке параллельных программ для суперкомпьютеров с распределенной памятью появляется еще один важный аспект – коммуникационная среда. В данном случае возникает задача минимизации накладных расходов на коммуникации при выполнении параллельных программ.

Для решения задач эффективного использования многоуровневой памяти и оптимизации обменов данными при разработке программных продуктов на практике широко используется техника тайлинга [1–4]. Суть тайлинга состоит в увеличении зернистости алгоритма: множество операций алгоритма разбивается на группы-тайлы, каждый тайл рассматривается как зерно вычислений или макрооперация. Как правило, техника тайлинга применяется к алгоритмам, заданным в виде гнезд циклов. В результате ее применения гнезда циклов программы преобразуются к гнездам циклов, содержащим большее (как правило, двукратное) количество вложенных циклов. Множество циклов можно условно разделить на две группы: глобальные циклы, задающие порядок выполнения макроопераций, и локальные циклы, описывающие порядок выполнения операций в рамках одного тайла.

Традиционно, техника тайлинга основана на использовании тайлов в форме  $n$ -мерных параллелепипедов. Техника постоянно развивается и одним из перспективных направлений ее развития является идея использования тайлов гексагональной формы [5]. Применение гексагональных тайлов дает возможность для ряда параллельных алгоритмов оптимизировать коммуникации более эффективно, чем это позволяет сделать классический тайлинг. Перспективность гексагонального тайлинга делает актуальной задачу разработки данной техники. Особую актуальность имеет решение этой задачи в рамках формализованного подхода – в виде строгого математического аппарата. Поскольку тайлинг – это преобразование алгоритма, то математический подход автоматически гарантирует его корректность. Кроме того, формализация обеспечивает большую вариативность тайлинга и, что не менее важно, дает возможность его интеграции в компиляторы последовательных и параллельных программ.

При разработке техники гексагонального тайлинга возникает целый спектр задач, и первой из них является задача плотного покрытия тайлами области вычислений алгоритма. Данная работа посвящена решению этой задачи в рамках формализованного подхода. В работе предложено формальное определение параметризованного гексагонального тайлинга. Основным результатом работы является необходимое и достаточное условие существования плотных покрытий области вычислений гексагональными тайлами. Полученные результаты являются развитием техники классического тайлинга, представленной в [4], на случай гексагонального тайлинга.

**Гексагональный тайлинг.** Будем предполагать, что область вычислений алгоритма (индексное множество)  $V$  – выпуклый многоугольник, состоящий из точек  $J(J_1, J_2) \in Z^2$  с целочисленными координатами.

Основу теории гексагонального тайлинга составляет покрытие пространства  $Z^2$ , в том числе области вычислений  $V$ , гексагональными тайлами – выпуклыми шестиугольниками с вершинами  $J^{(i)} \in Z^2, 1 \leq i \leq 6$  (нумерация вершин по часовой стрелке). В рамках формализованного подхода гексагональный тайл можно определить как множество точек целочисленного пространства  $Z^2$

$$T_6 = \left\{ J \in Z^2 \mid \bar{0} \leq H^{(1)}(J - J^{(1)}) \leq H^{(1)}(J^{(4)} - J^{(1)}) = \bar{R}^{(1)} - \bar{1}, \right. \\ \left. \bar{0} \leq H^{(2)}(J - J^{(2)}) \leq H^{(2)}(J^{(5)} - J^{(2)}) = \bar{R}^{(2)} - \bar{1} \right\}, \tag{1}$$

которое образовано пересечением двух параллелограммов, заданных унимодулярными матрица-

ми  $H^{(k)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(k)} & 0 \\ h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_1^{(k)} \\ \bar{h}_2^{(k)} \end{pmatrix} \in Z^{2 \times 2}, |h_{11}^{(k)}| = |h_{22}^{(k)}| = 1, k = 1, 2$ , и векторами  $\bar{R}^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}) \in Z^2$ ,

$r_1^{(k)} \geq 1, r_2^{(k)} \geq 1, k = 1, 2$ . Вариант гексагонального тайла, определяемого таким образом, изображен на рис. 1.

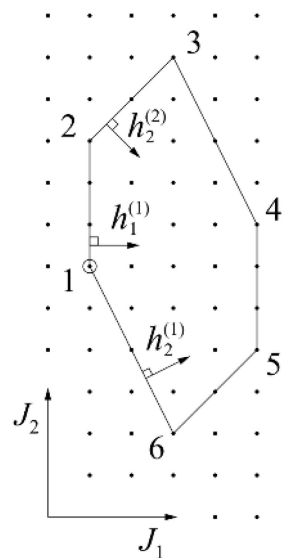


Рис. 1. Гексагональный тайл  $T_6$   
Fig. 1. Hexagonal tile  $T_6$

Матрицы  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$  составлены построчно из нормальных векторов прямых, на которых расположены стороны параллелограммов. Векторы  $\bar{R}^{(1)}$  и  $\bar{R}^{(2)}$  определяют размеры параллелограммов, в то время как матрицы  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$  задают их форму и ориентацию на плоскости. Точки  $J^{(1)}$  и  $J^{(2)}$  являются точками привязки параллелограммов к плоскости и связаны соотношением  $J^{(2)} = J^{(1)} + (0, \omega_0)$ , где  $\omega_0 \in Z$  – параметр, определяющий смещение параллелограмма с матрицей  $H^{(2)}$  относительно параллелограмма с матрицей  $H^{(1)}$  вдоль прямой с нормальным вектором  $\bar{h}_1^{(1)}$ . Значение параметра  $\omega_0$  влияет на соотношение между длинами параллельных сторон получаемого шестиугольника-тайла. С точки зрения гексагонального тайлинга, противоположащие параллельные стороны тайла должны быть равны. Значение параметра  $\omega_0$ , при котором шестиугольник  $T_6$  удовлетворяет этому условию, определяется через параметры  $H^{(k)}$  и  $\bar{R}^{(k)}$ . Это значение будет приведено позже.

Таким образом, матрицы  $H^{(k)}$  и векторы  $\bar{R}^{(k)}, k = 1, 2$ , являются параметрами, определяющими форму и размеры гексагонального тайла.

Определив конфигурацию тайлов, далее необходимо осуществить покрытие ими пространства  $Z^2$  и, тем самым, области вычислений  $V$ . Покрытие тайлами осуществляется с полным сохранением конфигурации тайлов, при этом каждый тайл получает свой уникальный идентификатор (индекс)  $J^{\text{gl}} \in Z^2$ . Данный идентификатор необходим для определения глобальных зависимостей между тайлами, для установления отношения соседства между ними и, в целом, для установления порядка выполнения тайлов, как макроопераций, при конечном преобразовании алгоритма.

По аналогии с традиционным тайлингом введем понятие начальной вершины тайла [4]. В данном случае начальной вершиной гексагонального тайла будем называть точку  $J^{(1)}$ . Начальная вершина фактически является точкой привязки тайла к плоскости (в пространстве  $Z^2$ ). Тогда, с формальной точки зрения, покрытие пространства  $Z^2$  тайлами вида (1) можно задать аффинной функцией вида

$$J^{(1)}(J^{\text{gl}}) = J^{\bar{0}} + PJ^{\text{gl}}, \quad J^{\text{gl}} \in Z^2. \quad (2)$$

Функция вида (2) устанавливает соответствие между идентификаторами тайлов и их начальными вершинами. Другими словами, данная функция для каждого тайла определяет точку его привязки в пространстве  $Z^2$ . Функция, задающая покрытие, характеризуется двумя параметрами  $J^{\bar{0}} \in Z^2$  и  $P \in Z^{2 \times 2}$ . Точка  $J^{\bar{0}}$  по существу является начальной вершиной «нулевого» тайла ( $J^{\text{gl}} = \bar{0}$ ). Невырожденная матрица  $P$  является ключевым параметром, поскольку определяет положение тайлов относительно друг друга. Именно от выбора этой матрицы зависит плотность укладки. Таким образом, тайлы вида (1) вместе с аффинной функцией (2), при выбранных параметрах  $H^{(k)}$ ,  $\vec{R}^{(k)}$ ,  $J^{\bar{0}}$  и  $P$ , определяют гексагональный тайлинг в пространстве  $Z^2$ .

Для упрощения дальнейших формулировок и обеспечения их корректности примем параметры тайлинга в следующем виде:

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_{21}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_{21}^{(2)} & -1 \end{pmatrix}, \quad R^{(k)} = \begin{pmatrix} r_1^{(1)} & 0 \\ 0 & r_2^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$h_{21}^{(1)} \geq 0, \quad h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)} \geq 1, \quad \omega_0 = 0,5(r_2^{(1)} + r_2^{(2)} - (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})(r_1^{(1)} - 1)) - 1, \quad 0 < \omega_0 < r_2^{(1)} - 1.$$

В этом случае множество точек гексагонального тайла может быть представлено в виде

$$T_6(J^{\text{gl}}) = \left\{ J \in Z^2 \mid J_1^{(1)}(J^{\text{gl}}) \leq J_1 \leq J_1^{(1)}(J^{\text{gl}}) + r_1^{(1)} - 1, \right. \\ \left. J_2^{(1)}(J^{\text{gl}}) + \max(h_{21}^{(1)}(J_1^{(1)}(J^{\text{gl}}) - J_1), \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - h_{21}^{(2)}(J_1^{(1)}(J^{\text{gl}}) - J_1)) \leq J_2 \leq \right. \\ \left. \leq J_2^{(1)}(J^{\text{gl}}) + \min(r_2^{(1)} - 1 + h_{21}^{(1)}(J_1^{(1)}(J^{\text{gl}}) - J_1), \omega_0 - h_{21}^{(2)}(J_1^{(1)}(J^{\text{gl}}) - J_1)) \right\}. \quad (4)$$

Представление тайла (4) в отличие от определения (2) из всех вершин содержит только начальную. Каждая вершина  $J^{(k)}(J^{\text{gl}})$  шестиугольника  $T_6(J^{\text{gl}})$  может быть получена из начальной вершины путем ее сдвига на вектор  $\vec{\lambda}^{(k)} = \lambda_1^{(k)}(0, 1) + \lambda_2^{(k)}(1, -h_{21}^{(1)})$ :

$$J^{(k)}(J^{\text{gl}}) = J^{(1)}(J^{\text{gl}}) + \lambda_1^{(k)}(0, 1) + \lambda_2^{(k)}(1, -h_{21}^{(1)}), \quad k = 2, 3, 4, 5, 6, \\ \lambda_1^{(2)} = \omega_0, \quad \lambda_2^{(2)} = 0, \quad \lambda_1^{(3)} = r_2^{(1)} - 1, \quad \lambda_2^{(3)} = (r_2^{(1)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}), \\ \lambda_1^{(4)} = r_2^{(1)} - 1, \quad \lambda_2^{(4)} = r_1^{(1)} - 1, \quad \lambda_1^{(5)} = r_2^{(1)} - \omega_0 - 1, \quad \lambda_2^{(5)} = r_1^{(1)} - 1, \\ \lambda_1^{(6)} = 0, \quad \lambda_2^{(6)} = (r_2^{(2)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}).$$

Из данного представления следует, что координаты всех вершин гексагональных тайлов в покрытии будут иметь целочисленные координаты, если  $(r_2^{(i)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})$ ,  $i = 1, 2$ , – целые числа.

В рамках данного определения тайлинга далее предлагается формализованное решение задачи плотного покрытия тайлами области вычислений алгоритма.

**Плотные покрытия.** Пусть конфигурация гексагональных тайлов задана параметрами вида (3). Решение задачи плотного покрытия заключается в нахождении матрицы  $P$ , которая будет обеспечивать посредством отображения вида (2) плотную укладку тайлов на плоскости. Для решения этой задачи необходимо ввести ряд определений. Прежде всего – формальное определение плотного покрытия.

**О п р е д е л е н и е 1.** *Покрытие пространства  $Z^2$ , а следовательно, и области вычислений  $V \subset Z^2$ , непересекающимися тайлами, будем называть плотным, если для любой точки  $J \in Z^2$  существует единственный тайл в покрытии, которому эта точка принадлежит.*

Формализованное решение задачи плотной укладки непосредственно зависит от выбора направлений идентификации тайлов индексами  $J^{\text{gl}}$ . Направления идентификации тайлов, в свою очередь, определяют порядок выполнения операций конечного алгоритма на уровне макроопераций. Выбор направлений будем осуществлять с использованием понятия соседства на множестве тайлов.

Зафиксируем векторы  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)}$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)}$  с координатами, по модулю не превосходящими единицы, и такие, что  $\bar{\xi}_2^{(2)} = \bar{\xi}_1^{(1)} - \bar{\xi}_2^{(1)}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** *Соседними к заданному тайлу  $T_6(J^{\text{gl}})$  будем называть тайлы  $T_6(J^{\text{gl}} + \bar{\xi}_1^{(1)})$ ,  $T_6(J^{\text{gl}} + \bar{\xi}_2^{(1)})$  и  $T_6(J^{\text{gl}} + \bar{\xi}_2^{(2)})$ , начальные вершины которых удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} \bar{h}_1^{(1)}(J^{(1)}(J^{\text{gl}} + \bar{\xi}_1^{(1)}) - J^{(1)}(J^{\text{gl}})) &= r_1^{(1)}, \\ \bar{h}_2^{(1)}(J^{(1)}(J^{\text{gl}} + \bar{\xi}_2^{(1)}) - J^{(1)}(J^{\text{gl}})) &= r_2^{(1)}, \\ \bar{h}_2^{(2)}(J^{(1)}(J^{\text{gl}} + \bar{\xi}_2^{(2)}) - J^{(1)}(J^{\text{gl}})) &= r_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Данное определение фактически устанавливает, что соседними к текущему тайлу  $T_6(J^{\text{gl}})$  являются ближайшие тайлы по направлениям  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)}$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)}$  на множестве индексов тайлов. При этом направления, определяющие соседние тайлы, связаны с нормальными векторами прямых, на которых лежат стороны тайла. В плотных покрытиях соседние тайлы являются граничными к текущему в направлениях  $\bar{h}_1^{(1)}$ ,  $\bar{h}_2^{(1)}$  и  $\bar{h}_2^{(2)}$ .

Разнообразие связей направлений  $\bar{\xi}_j^{(i)}$  с нормальными  $\bar{h}_j^{(i)}$  порождает множество вариантов идентификации тайлов. В то же время решение задачи плотной укладки зависит от конкретного ее выбора. Поэтому далее выберем и зафиксируем один из вариантов идентификации:  $\bar{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)} = e_2$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)} = e_1$ , где  $e_1$  и  $e_2$  – единичные векторы в пространстве  $Z^2$ . Таким образом, соседними тайлами, лежащими в покрытии в направлениях  $\bar{h}_1^{(1)}$ ,  $\bar{h}_2^{(1)}$  и  $\bar{h}_2^{(2)}$ , будем полагать ближайшие тайлы, находящиеся в направлениях  $e_1 + e_2$ ,  $e_2$  и  $e_1$  на множестве индексов  $J^{\text{gl}}$ . С учетом вида функции покрытия (2), условия (5) при таком выборе векторов  $\bar{\xi}_j^{(i)}$  приводят в совокупности к системе уравнений вида

$$\begin{cases} \bar{h}_1^{(1)} P(e_1 + e_2) = r_1^{(1)}, \\ \bar{h}_2^{(1)} P e_2 = r_2^{(1)}, \\ \bar{h}_2^{(2)} P e_1 = r_2^{(2)}, \end{cases}$$

решением которой является матрица  $P$  в параметризованном виде

$$P = \begin{pmatrix} p & r_1^{(1)} - p \\ h_{21}^{(2)} p - r_2^{(2)} & r_2^{(1)} - h_{21}^{(1)}(r_1^{(1)} - p) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Параметризованность матрицы  $P$  вида (6) приводит к наличию множества вариантов укладки тайлов с заданным отношением соседства. Варианты упаковок приведены на рис. 2.

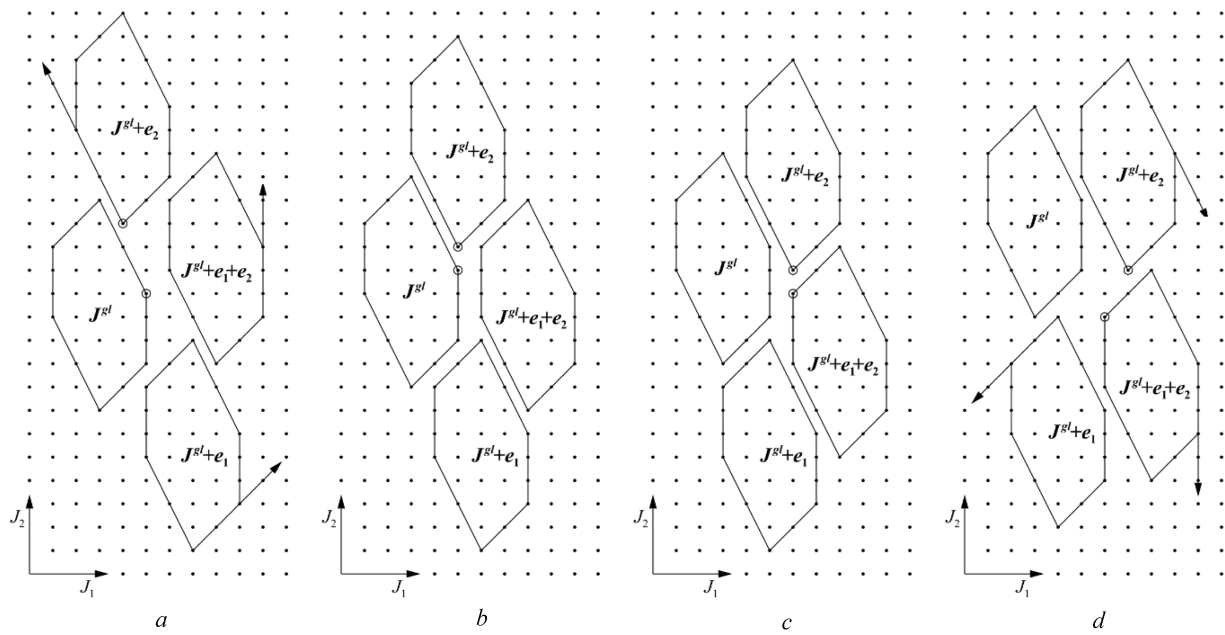


Рис. 2. Варианты покрытий гексагональными тайлами: *a* – неплотная укладка ( $p > p_1$ ); *b* – плотная укладка ( $p = p_1$ ); *c* – плотная укладка ( $p = p_0$ ); *d* – неплотная укладка ( $p < p_0$ )

Fig. 2. Options for coatings with hexagonal tiles: *a* – loose laying ( $p > p_1$ ); *b* – dense laying ( $p = p_1$ ); *c* – dense laying ( $p = p_0$ ); *d* – loose laying ( $p < p_0$ )

Множество вариантов покрытий для тайлов с целочисленными координатами вершин включает в себя только два варианта плотной укладки (рис. 2, *b, c*). Значения параметра  $p$ , соответствующие этим укладкам, будем обозначать  $p_0$  и  $p_1$ . С учетом выполнения условия (5) варианты упаковок идентифицируются дополнительными условиями на вершины соседних тайлов:  $J_1^{(4)}(J^{gl}) = J_1^{(6)}(J^{gl} + e_2)$  (1-й вариант, рис. 2, *b*) или  $J_1^{(4)}(J^{gl} + e_1 + e_2) = J_1^{(6)}(J^{gl} + e_2)$  (2-й вариант, рис. 2, *c*). Эти дополнительные условия и дают, соответственно, значения  $p_1$  и  $p_0$  параметра  $p$ .

Анализ функции укладки (2) с матрицей  $P$  вида (6) на предмет перемещения начальных вершин тайлов при изменении параметра  $p$  показывает, что при увеличении значения параметра  $p$  соседние тайлы  $T_6(J^{gl} + e_1 + e_2)$ ,  $T_6(J^{gl} + e_2)$  и  $T_6(J^{gl} + e_1)$  смещаются относительно тайла  $T_6(J^{gl})$  в направлениях, ортогональных нормальям  $\bar{h}_1^{(1)}$ ,  $\bar{h}_2^{(1)}$  и  $\bar{h}_2^{(2)}$  соответственно. В этом случае при  $p > p_1$  между тайлами появляются точки пространства  $Z^2$ , не принадлежащие ни одному тайлу, причем их количество растет с увеличением параметра  $p$ . Данный случай изображен на рис. 2, *a*; стрелки при соседних тайлах показывают направления их перемещения.

При уменьшении значения параметра  $p$  наблюдается аналогичная предыдущему случаю ситуация: соседние тайлы перемещаются в обратных, коллинеарных направлениях, что, при  $p < p_0$  приводит к появлению точек  $J$ , не принадлежащих ни одному из тайлов (рис. 2, *d*).

Таким образом, на основе вышеизложенных фактов имеет место следующее утверждение.

**У т в е р ж д е н и е.** Пусть параметры гексагонального тайлинга удовлетворяют условиям (3) и условию  $(r_2^{(i)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}) \in Z$ ,  $i = 1, 2$ ; направления идентификации тайлов определяются векторами  $\bar{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)} = e_2$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)} = e_1$ , а покрытие тайлами пространства  $Z^2$  определяется функцией вида (2). Тогда, при сделанных предположениях, укладка тайлов определяется матрицей  $P$  вида (6), причем для того, чтобы укладка была плотной, необходимо и достаточно, чтобы параметр  $p$  принимал значение  $p_0 = (r_2^{(2)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})$  либо  $p_1 = (r_2^{(2)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}) + 1$ .

Таким образом, в соответствии с утверждением, для тайлов с целочисленными координатами вершин существует ровно два варианта плотного покрытия пространства  $Z^2$ . Необходимо отметить, что полученный критерий плотности укладки характерен только для указанного

в утверждении варианта идентификации тайлов. Вид матрицы  $P$  и значения параметра  $p$ , задающие плотное покрытие, индивидуальны для каждого выбора направлений идентификации тайлов.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках подпрограммы «Математические методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020».

**Acknowledgements.** The work is done within the framework of the subprogram “Mathematical Methods” of the State Research Program “Convergence 2020”.

### Список использованных источников

1. Xue, J. *Loop Tiling For Parallelism* / J. Xue. – Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4337-4>
2. Parameterized tiled loops for free / L. Renganarayanan [et al.] // *SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation*. – New York, NY, USA: ASMPress, 2007. – P. 405–414.
3. DynTile: Parametric Tiled Loop Generation for Parallel Execution on Multicore Processors / A. Hartono [et al.] // *24<sup>th</sup> International Parallel and Distributed Processing Symposium (2010 IPDPS Conference)*. – Atlanta, 2010.
4. Bakhanovich, S. V. Parametrized Tiling: Accurate Approximations and Analysis of Global Dependences / S. V. Bakhanovich, P. I. Sobolevsky // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 2014. – Vol. 54, N 11. – P. 1748–1758. <https://doi.org/10.1134/s0965542514110037>
5. The Relation Between Diamond Tiling and Hexagonal Tiling / T. Grosser [et al.] // *First International Workshop on High-Performance Stencil Computations*, January 21, 2014. – Vienna, Austria, 2014.

### References

1. Xue J. *Loop Tiling For Parallelism*. Norwell, MA, USA, Kluwer Academic Publishers, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4337-4>
2. Renganarayanan L., Kim D., Rajopadhye S., Strout M. Parameterized tiled loops for free. *SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation*. New York, NY, USA, ASMPress, 2007, pp. 405–414.
3. Hartono A., Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan P. DynTile: Parametric Tiled Loop Generation for Parallel Execution on Multicore Processors. *24<sup>th</sup> International Parallel and Distributed Processing Symposium (2010 IPDPS Conference)*, Atlanta, 2010.
4. Bakhanovich S. V., Sobolevsky P. I. Parametrized Tiling: Accurate Approximations and Analysis of Global Dependences. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 11, pp. 1748–1758. <https://doi.org/10.1134/s0965542514110037>
5. Grosser T., Verdoolaege S., Cohen A., Sadayappan P. The Relation Between Diamond Tiling and Hexagonal Tiling. *First International Workshop on High-Performance Stencil Computations*, Vienna, Austria, 2014.

### Информация об авторах

*Соболевский Павел Иосифович* – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [sobolevsky@im.bas-net.by](mailto:sobolevsky@im.bas-net.by).

*Баханович Сергей Викторович* – канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [bsv@im.bas-net.by](mailto:bsv@im.bas-net.by).

### Information about the authors

*Sobolevsky Pavel Iosiphovich* – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [sobolevsky@im.bas-net.by](mailto:sobolevsky@im.bas-net.by).

*Bakhanovich Sergei Viktorovich* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [bsv@im.bas-net.by](mailto:bsv@im.bas-net.by).