ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.958
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-531-539

Поступило в редакцию 11.06.2018
Received 11.06.2018

Академик В. И. Корзюк[1], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА С КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. В данной работе рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях. При решении данной задачи возникают эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Для полученных интегральных уравнений доказано существование единственного решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости данных. С помощью метода характеристик показывается, что для гладкости решения исходной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования заданных функций при их достаточной гладкости. Метод характеристик сводится к разбиению всей области решения на подобласти, в каждой из которых строятся решения подзадач с использованием начальных и граничных условий. Полученные решения затем склеиваются в общих точках, порождая условия склейки, которые и являются условиями согласования.

Данный подход позволяет строить как точные решения, так и приближенные. Точные решения могут быть найдены в том случае, если удается разрешить эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры. В противном случае можно найти приближенное решение задачи либо в аналитическом, либо в численном виде. При этом при построении приближенного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при использовании численных методов решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Гордона–Фока, метод характеристик, косые производные, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 5. – С. 531–539. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-531-539

Viktor I. Korzyuk[1], Ivan I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION TO THE MIXED PROBLEMS FOR THE KLEIN–GORDON–FOCK-TYPE EQUATION WITH CURVE DERIVATIVES IN BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. The mixed problem for one-dimensional Klein–Gordon–Fock-type equation with curve derivatives in boundary conditions is considered in half-strip. The solution of this problem is reduced to solving the second type Volterra integral equations. Theorems of existence and uniqueness of the solution in the class of the twice continuously differentiable functions were proven for these equations when initial functions are smooth enough. It is proven that fulfillment of the matching conditions on the given functions is necessary and sufficient for the existence of the unique smooth solution when initial functions are smooth enough. The method of characteristics is used for the problem analysis. This method is reduced to the splitting the original area of the definition to the subdomains. The solution of the subproblem can be constructed in each subdomain with the help of the initial and boundary conditions. Then obtained solutions are glued in common points, and received glued conditions are the matching conditions.

This approach can be used in constructing as analytical solution, in case when solution of the integral equation can be found in explicit way, so for approximate solution. Moreover, approximate solutions can be constructed in numerical and analytical form. When numeric solution is constructed, then matching conditions are essential and they need to be considered while developing numerical methods.

Keywords: Klein–Gordon–Fock-type equation, characteristics method, curve derivatives, classical solution, mixed problem, matching conditions

For citation: Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problems for the Klein–Gordon–Fock-type equation with curve derivatives in boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2018, vol. 62, no. 5, pp. 531–539 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-531-539

Введение. В данном сообщении рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с косыми производными в граничных условиях. В [1] рассмотрена смешанная задача для уравнения колебания полуограниченной струны, а в нашем сообщении изучена смешанная задача для уравнения Клейна–Гордона–Фока, в которой на обеих боковых границах полуполосы граничные условия содержат косые производные первого порядка. Для исследования поставленной задачи применяется хорошо зарекомендовавший себя метод характеристик, который использовался при изучении смешанных задач для волнового уравнения [2], а также первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока [3].

Постановка задачи. В области $Q = \{(t, x) \mid t \in (0; \infty), x \in (0; l)\}$ задается гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lv = L^{(0)}v - \lambda(t, x)v = \partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v - \lambda(t, x)v = f(t, x). \tag{1}$$

К (1) присоединяются начальные

$$v(0, x) = \varphi(x),\ \partial_t v(0, x) = \psi(x),\ x \in [0; l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} &B^{(0)}v = r_1^{(0)}(t)\partial_t v(t, 0) + r_2^{(0)}(t)\partial_x v(t, 0) + r_3^{(0)}(t)v(t, 0) = \widetilde{\mu^{(0)}}(t),\ t \in [0; \infty),\\ &B^{(l)}v = r_1^{(l)}(t)\partial_t v(t, l) + r_2^{(l)}(t)\partial_x v(t, l) + r_3^{(l)}(t)v(t, l) = \widetilde{\mu^{(l)}}(t),\ t \in [0; \infty). \end{aligned} \tag{3}$$

Условия вида (3) называются граничными условиями с косыми производными [1; 4, с. 403].

Частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение в области Q

$$\partial_t^2 w - a^2 \partial_x^2 w - \lambda(t, x)w = f(t, x) \tag{4}$$

с однородными начальными условиями

$$w(0, x) = 0, \partial_t w(0, x) = 0, \quad x \in [0; l]. \tag{5}$$

В [5] построено частное решение $w \in C^2(\overline{Q})$ задачи (4), (5), если функции λ и f из класса $C^1(\overline{Q})$. Таким образом, как показано в [5; 6], решение задачи (1)–(3) сводится к решению задачи для однородного уравнения $Lu = 0$, т. е. задачи

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t, x)u = 0, \tag{6}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &r_1^{(0)}(t)\partial_t u(t, 0) + r_2^{(0)}(t)\partial_x u(t, 0) + r_3^{(0)}(t)u(t, 0) &= \mu^{(0)}(t), t \in [0; \infty),\\ &r_1^{(l)}(t)\partial_t u(t, l) + r_2^{(l)}(t)\partial_x u(t, l) + r_3^{(l)}(t)u(t,l) &= \mu^{(l)}(t), t \in [0; \infty), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\mu^{(i)}(t) = \widetilde{\mu^{(i)}}(t) - B^{(i)}w,\ i \in \{0, l\}$, где w – частное решение неоднородного уравнения (4).

Общее решение однородного уравнения. Решение задачи (6)–(8) в области Q сводится к решению локальных подзадач. Область Q с помощью прямых $t = kl / a$ разбивается на подобласти $Q^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, по алгоритму, описанному в [5], а именно: $Q^{(k)} = \{(t, x) \mid x \in (0; l), t \in (kl / a; (k+1)l / a)\}$. В свою очередь каждая из областей $Q^{(k)}$ с помощью характеристик $x + at = (k + 1)l$, $x - at = -kl$ разбивается на подобласти $Q^{(k,j)}$, $j = \overline{1, 4}$. Для областей $Q^{(k)}$ рассмотрим задачу (6)–(8) относительно $u^{(k)}$. В [5; 6] найдено общее решение (6), которое представимо в виде

$$u^{(k)}(t,x)=\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\mathcal{L}u^{(k)})(y,z)dzdy+p^{(k)}(x-at)+g^{(k)}(x+at),\ (t,x)\in Q^{(k)}, \tag{9}$$

где $p^{(k)}, g^{(k)}$ – произвольные достаточно гладкие функции, а оператор $\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)=$ $(-(2a)^{-2}\lambda u^{(k)})((2a)^{-1}(z-y),\ 0{,}5(z+y))$. Для интегрального уравнения (9) справедлива теорема о существовании единственного решения из класса $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ [5].

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q})$. *Решение уравнения (9) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ *тогда и только тогда, когда* $p^{(k)}\in C^2([-(k+1)l;-(k-1)l])$, $g^{(k)}\in C^2([kl;(k+2)l])$, $k=0,1,\ldots$.

Решение задачи (6)–(8) u в области Q определяется формулой $u(t,x)=u^{(k)}(t,x),\ (t,x)\in Q^{(k)}$. Данное решение должно быть из класса $C^2(\overline{Q})$. Поэтому решения в областях $Q^{(k)}$ будем строить так, чтобы решения в точках соприкосновения склеивались непрерывно дифференцируемо до второго порядка включительно.

Задача (6)–(8) на $\overline{Q^{(k)}}$. Рассмотрим условия типа Коши в области $Q^{(k)}$

$$u^{(k)}(t,x)|_{t=kl/a}=\varphi^{(k)}(x),\quad x\in[0;l],\ \partial_t u^{(k)}(t,x)|_{t=kl/a}=\psi^{(k)}(x),\quad x\in[0;l], \tag{10}$$

где $\varphi^{(k)}(x)=u^{(k-1)}(kl/a,x)$, $\psi^{(k)}(x)=\partial_t u^{(k-1)}(kl/a,x)$.

Выпишем найденные в [3] функции $p^{(k)}(z),\ z\in[-kl;\ -(k-1)l]$ и $g^{(k)}(y),\ y\in[kl;\ (k+1)l]$,

$$p^{(k)}(z)=\frac{1}{2}(\varphi^{(k)}(z+kl)-\Psi^{(k)}(z+kl)-C)+\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl}\int\limits_{z}^{\eta-2kl}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{11}$$

$$g^{(k)}(y)=\frac{1}{2}(\varphi^{(k)}(y-kl)+\Psi^{(k)}(y-kl)+C)+\int\limits_{(k+1)l}^{y}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{12}$$

где $\Psi^{(k)}(y)=\dfrac{1}{a}\int\limits_{l}^{y}\psi^{(k)}(z)dz$; C – произвольная константа.

Исходя из формул (9), (11), (12) выпишем представление решения задачи в области $Q^{(k,1)}$

$$u^{(k)}(t,x)=\int\limits_{x+at-2kl}^{x-at}\int\limits_{y+2kl}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi+\frac{1}{2}(\varphi^{(k)}(x-at+kl)+\varphi^{(k)}(x+at-kl))+$$
$$+\frac{1}{2}(\Psi^{(k)}(x+at-kl)-\Psi^{(k)}(x-at+kl)).$$

С помощью первого из условий (8) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции $p^{(k)}$ в области $Q^{(k,2)}$:

$$\theta(\xi)dp^{(k)}(\xi)+r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)p^{(k)}(\xi)=Z^{(k)}(\xi)-\frac{C}{2}r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right),$$

где функция

$$Z^{(k)}(\xi)=\mu^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)-\theta(\xi)\int\limits_{(k+1)l}^{-\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,z)dz-\left(r_2^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)+ar_1^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{-kl}^{\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(y,-\xi)dy+dg^{(k)}(-\xi)\right)-r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)\left(\int\limits_{-kl}^{\xi}\int\limits_{(k+1)l}^{-\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{g^{(k)}}(-\xi)\right)$$

не содержит ни неизвестной функции $p^{(k)}$, ни свободной постоянной C, а $\widetilde{g^{(k)}}(y)=g^{(k)}(y)-C/2$, $\theta(\xi)=r_2^{(0)}(-\xi/a)-ar_1^{(0)}(-\xi/a)$. Функция $\theta(\xi)$ определяет наклон косой производной в первом из условий (8). Если $\theta(\xi)=0$, то это равносильно тому, что направление производной совпадает с характеристическим.

Решение в области $Q^{(k,2)}$ можно определить по (9), где функции $p^{(k)}(\xi)$ определяются в зависимости от функции $\theta(\xi)$

$$p^{(k)}(\xi)=e^{-\int\limits_{-kl}^{\xi}\frac{r_3^{(0)}(-\xi_1/a)}{\theta(\xi_1)}d\xi_1}\left(C_p+\int\limits_{-kl}^{\xi}\frac{Z^{(k)}(\xi_1)}{\theta(\xi_1)}e^{\int\limits_{-kl}^{\xi_1}\frac{r_3^{(0)}(-\xi_2/a)}{\theta(\xi_2)}d\xi_2}d\xi_1\right)-\frac{C}{2},\quad \theta(\xi)\neq 0,\quad (13)$$

$$\begin{gathered}p^{(k)}(\xi)=\frac{\mu^{(0)}(-\xi/a)}{r_3^{(0)}(-\xi/a)}-\frac{2ar_1^{(0)}(-\xi/a)}{r_3^{(0)}(-\xi/a)}\left(\int\limits_{-kl}^{\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(y,-\xi)dy+dg^{(k)}(-\xi)\right)-\\ -\int\limits_{-kl}^{\xi}\int\limits_{(k+1)l}^{-\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy-\frac{C}{2}-\widetilde{g^{(k)}}(-\xi),\ \ \theta(\xi)\equiv 0,\end{gathered}\quad (14)$$

где C_p – некоторая константа.

Л е м м а 1. *Пусть дана задача (6)–(8) на множестве* $\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,2)}}$, *где* $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q})$. *Кроме того, пусть* $\theta(\xi)\equiv 0$, $\varphi^{(k)}\in C^3([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^2([0;l])$, *функции* $\mu^{(0)}\in C^2([0;+\infty))$, $r_i^{(0)}\in C^2([0;+\infty))$, $i=\overline{1,3}$. *Тогда решение задачи (6)–(8) принадлежит классу* $C^2\left(\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,2)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(0)-r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)(ad\varphi^{(k)}(0)+\psi^{(k)}(0))=0,$$

$$\begin{gathered}r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)+(ad^2\varphi^{(k)}(0)+d\psi^{(k)}(0))\right)-\\ -\frac{1}{a}r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\left(d\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)\right)\left(d\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-\psi^{(k)}(0)+\left(d\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}\right)=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-ar_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)^{-1}\left(\frac{2}{a^2}\partial_t\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)+\frac{2}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\psi^{(k)}(0)+d^3\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}d^2\psi^{(k)}(0)\right)-\\ -d^2\varphi^{(k)}(0)-\frac{1}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)\left(2\left(d\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+1\right)+\frac{1}{a^2}\left(d^2\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-\\ -2\left(d^2\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(0)\right)\left(d\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-\frac{1}{a}\left(d\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)\right)\left(d^2\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}=0.\end{gathered}$$

Л е м м а 2. *Рассмотрим задачу (6)–(8) на множестве* $\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,2)}}$, *где* $\lambda(t,x)\in C^2(\overline{Q})$. *Пусть функция* $\theta(\xi)\neq 0,\forall\xi\in[-(k+1)l,kl]$, $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$, $\mu^{(0)}\in C^1([0;+\infty))$, $r_i^{(0)}\in C^1([0;+\infty))$, $i=\overline{1,3}$. *Тогда решение задачи (6)–(8) принадлежит классу* $C^2\left(\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,2)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(0)-r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)d\varphi^{(k)}(0)-r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\psi^{(k)}(0)=0,\quad (15)$$

$$\left(r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)\times$$
$$\times\left(d\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)\right)-(\theta(-kl))^2\frac{1}{a}\left(d\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}- \tag{16}$$
$$-\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\varphi^{(k)}(0)\left(-\frac{1}{a}(\theta(-kl))^2\left(d\frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)^2\right)+$$
$$+\left(ad^2\varphi^{(k)}(0)r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(0)r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)\theta(-kl)-\frac{1}{2a^2}\theta(-kl)\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)=0,$$

а также условие на выбор константы в (13) $C_p=\dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{2}-\dfrac{1}{2a}\int\limits_l^0\psi^{(k)}(\xi)\,d\xi+\int_{(k+1)l}^{kl}d\eta\int_{-kl}^{\eta-2kl}\times$ $\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\xi.$

Для доказательства данных лемм требуется приравнять значения функции $p^{(k)}(\xi)$, определенной по (13), (14), в точке $\xi=-kl$ к значению функции $p^{(k)}(\xi)$, найденной по (11) в точке $\xi=-kl$.

Л е м м а 3. *Пусть функция* $\theta(\xi)\to 0$. *Тогда функция* $p^{(k)}(\xi)$, *определенная по (13), стремится к функции* $p^{(k)}(\xi)$, *определенной по (14), тогда и только тогда, когда* $r_3^{(0)}(\xi)(r_2^{(0)}(\xi)-ar_1^{(0)}(\xi))>0$, *в противном случае* $p^{(k)}(\xi)\to\infty$.

Доказательство данной леммы приведено в [1].

З а м е ч а н и е 1. *Если выполняется тождество* $(r_1^{(0)}(\xi))^2+(r_2^{(0)}(\xi))^2\equiv 0$, *то требования к функциям* $\varphi^{(k)}$ *и* $\psi^{(k)}$ *в лемме 1 можно ослабить:* $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$.

Исследование граничного условия на правой границе во многом повторяет исследование граничного условия на левой границе. Из второго условия в (8) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции $g^{(k)}$ в области $Q^{(k,3)}$:

$$\rho(\eta)dg(\eta)+r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)g(\eta)=Y^{(k)}(\eta)+\frac{C}{2}r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right),$$

где

$$Y^{(k)}(\eta)=\mu^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)-r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)\left(\int\limits_{-kl}^{2l-\eta}\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{p^{(k)}}(2l-\eta)\right)-$$
$$-\rho(\eta)\int\limits_{-kl}^{2l-\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(y,\eta)dy-\left(r_2^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)-ar_1^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)\right)\left(\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(2l-\eta,z)dz+dp^{(k)}(2l-\eta)\right).$$

Здесь $\widetilde{p^{(k)}}(z)=p^{(k)}(z)+C/2$ и $\rho(\eta)=r_2^{(l)}((\eta-l)/a)+ar_1^{(l)}((\eta-l)/a)$. Функция $\rho(\eta)$ определяет наклон косой производной во втором из условий (8).

Решение в области $Q^{(k,3)}$ можно определить по (9), где функция $g^{(k)}$ задается следующим образом:

$$g^{(k)}(\eta)=e^{-\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}\frac{r_3^{(l)}((\eta_1-l)/a)}{\rho(\eta_1)}d\eta_1}\times$$
$$\times\left(C_g+\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}\frac{Y^{(k)}(\eta_1)}{\rho(\eta_1)}e^{\int\limits_{(k+1)l}^{\eta_1}\frac{r_3^{(l)}((\eta_2-l)/a)}{\rho(\eta_2)}d\eta_2}d\eta_1\right)+\frac{C}{2},\ \rho(\eta)\neq 0; \tag{17}$$

$$g^{(k)}(\eta)=\frac{\mu^{(l)}((\eta-l)/a)}{r_3^{(l)}((\eta-l)/a)}-\left(\int\limits_{-kl}^{2l-\eta}\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{p^{(k)}}(2l-\eta)\right)-\frac{2ar_1^{(l)}((\eta-l)/a)}{r_3^{(l)}((\eta-l)/a)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(2l-\eta,z)dz+dp^{(k)}(2l-\eta)\right)+\frac{C}{2},\ \rho(\eta)\equiv 0, \tag{18}$$

где C_g – некоторая константа.

Л е м м а 4. *Пусть дана задача (6)–(8) на множестве* $\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,3)}}$, $\lambda(t,x)\in C^2(\overline{Q})$. *Если* $\rho(\eta)\equiv 0$, $\varphi^{(k)}\in C^3([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\mu^{(l)}\in C^2([0;+\infty))$, $r_i^{(l)}\in C^2([0;+\infty))$, $i=\overline{1,3}$, *то решение задачи (6)–(8) принадлежит классу* $C^2\left(\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,3)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(l)-ar_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(d\varphi^{(k)}(l)-\frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right)=0,$$

$$r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi^{(k)}(l)+a\left(d^2\varphi^{(k)}(l)-\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(l)\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{a}r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\left(d\varphi^{(k)}(l)-\frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right)\left(d\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+\psi^{(k)}(l)-\left(d\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}\right)=0,$$

$$a\left(r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)^{-1}r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(-\frac{2}{a^2}\partial_t\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi^{(k)}(l)-\frac{2}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\psi^{(k)}(l)-d^3\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}d^2\psi^{(k)}(l)\right)-$$
$$-\frac{1}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi^{(k)}(l)\left(-2\left(d\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+1\right)+\frac{1}{a^2}\left(d^2\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-d^2\varphi^{(k)}(l)+$$
$$+2\left(d\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}\left(d^2\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(l)\right)+\frac{1}{a}\left(-d\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right)\left(d^2\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}=0.$$

Л е м м а 5. *Пусть дана задача (6)–(8) на множестве* $\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,3)}}$, $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q})$. *Если* $\rho(\eta)\neq 0,\forall\eta\in[(k+1)l,(k+2)l]$, $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$, $\mu^{(l)}\in C^1([0;+\infty))$, $r_i^{(l)}\in C^1([0;+\infty))$, $i=\overline{1,3}$, *то решение задачи (6)–(8) принадлежит классу* $C^2\left(\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,3)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)(\varphi^{(k)}(l))-r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)d\varphi^{(k)}(l)-r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\psi(l)=0, \tag{19}$$

$$\left(r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)+r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)\left(d\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right)+$$
$$+\frac{1}{a}(\rho((k+1)l))^2\left(d\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)+$$
$$+\varphi^{(k)}(l)\left(-\frac{1}{a}(\rho((k+1)l))^2\left(d\frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)^2\right)- \tag{20}$$
$$-\left(ad^2\varphi^{(k)}(l)r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(l)r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)\rho((k+1)l)=0,$$

а также условие на выбор константы $C_g=\varphi^{(k)}(l)/2$.

Для доказательства лемм 4 и 5 требуется приравнять значения функции $g^{(k)}(\eta)$, определенной по формулам (17), (18), в точке $\eta=(k+1)l$ к значению функции $g^{(k)}(\eta)$, найденной по (12) в точке $\eta=(k+1)l$.

Л е м м а 6. *Пусть функция* $\rho(\eta)\to 0$. *Тогда функция* $g^{(k)}(\eta)$, *определенная по (17), стремится к функции* $g^{(k)}(\eta)$, *определенной по (18), тогда и только тогда, когда* $r_3^{(l)}(\eta)(r_2^{(l)}(\eta)+ar_1^{(l)}(\eta))>0$, *в противном случае* $g^{(k)}(\eta)$, *определенная по (17), стремится к бесконечности.*

З а м е ч а н и е 2. *Если выполняется тождество* $(r_1^{(l)}(\eta))^2+(r_2^{(l)}(\eta))^2\equiv 0$, *то требования на функции* $\varphi^{(k)}$ *и* $\psi^{(k)}$ *в лемме 4 можно ослабить:* $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$.

В области $Q^{(k,4)}$ решение автоматически строится по (9), где функция $g^{(k)}$ задается либо по (17), либо по (18), в зависимости от значения $\rho(\xi)$, а функция $p^{(k)}$ задается либо по (13), либо по (14), в зависимости от значения $\theta(\xi)$.

При выполнении условий лемм 1, 2 и 4, 5 решение задачи (6)–(8) существует и единственно в классе $C^2(\overline{Q^{(k)}})$.

Задача в полуполосе. В предыдущем пункте было построено решение задачи (6)–(8) и получены условия согласования для него в каждой отдельной области $Q^{(k)}$. Определим начальные функции $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ из (10) следующим образом:

$$\varphi^{(k)}(x)=u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)=\int\limits_{-(k-1)l}^{x-kl}\int\limits_{kl}^{x+kl}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi+p^{(k-1)}(x-kl)+g^{(k-1)}(x+kl),$$

$$\psi^{(k)}(x)=\partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)=a\int\limits_{-(k-1)l}^{x-kl}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,x+kl)d\xi- \tag{21}$$

$$-a\int\limits_{kl}^{x+kl}\mathcal{L}u^{(k)}(x-kl,\eta)d\eta-adp^{(k-1)}(x-kl)+adg^{(k-1)}(x+kl),\quad x\in[0;l].$$

Введем обозначение $u^{(k,k+1)}(t,x)=u^{(i)}(t,x),\ (t,x)\in\overline{Q^{(i)}},\ i=k,k+1.$

Л е м м а 7. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и 4, 5 в областях* $Q^{(k)}$ *и* $Q^{(k+1)}$. *Функции* $\varphi^{(k+1)}$ *и* $\psi^{(k+1)}$ *определены по (21). Для того чтобы решение* $u^{(k,k+1)}\in C^2\left(\overline{Q^{(k+1)}\bigcup Q^{(k)}}\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $u^{(k)}\in C^{2+i}(Q^{(k)})$, *где* i = 1, *если* $\theta(\xi)\equiv 0$, *но* $(r_1^{(0)}(\xi))^2+(r_2^{(0)}(\xi))^2\neq 0$ *или* $\rho(\eta)\equiv 0$, *но* $(r_1^{(l)}(\eta))^2+(r_2^{(l)}(\eta))^2\neq 0$. *В противном случае* i = 0.

Доказательство данной леммы проводится путем приравнивания значений функций $u^{(k)}$ и $u^{(k+1)}$ на прямой $t = kl / a$, а также их производных до второго порядка включительно.

С л е д с т в и е. *Пусть* $\theta(\xi)\equiv 0$ *и* $(r_1^{(0)}(\xi))^2+(r_2^{(0)}(\xi))^2\neq 0$ *или* $\rho(\eta)\equiv 0$ *и* $(r_1^{(l)}(\eta))^2+(r_2^{(l)}(\eta))^2\neq 0$. *Решение* $u^{(k)}\in C^2(Q^{(k)})$ *тогда и только тогда, когда* $u^{(0)}\in C^{2+k}(Q^{(0)})$.

Данное следствие требует, чтобы в области Q выполнялись условия согласования на решение $u^{(0)}$ и его производные до порядка 2 + k включительно в точках $(t,x)=(0,0)$, $(t,x)=(0,l)$. Таким образом доказаны теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\theta(\xi)\equiv 0$ *и* $(r_1^{(0)}(\xi))^2+(r_2^{(0)}(\xi))^2\neq 0$ *или* $\rho(\eta)\equiv 0$ *и* $(r_1^{(l)}(\eta))^2+(r_2^{(l)}(\eta))^2\neq 0$. *Функции* $\varphi\in C^\infty([0;l])$, $\psi\in C^\infty([0;l])$, $\mu^{(j)}, r_i^{(j)}\in C^\infty([0;+\infty))$, $j\in\{0,l\}, i=\overline{1,3}$, $\lambda\in C^\infty(\overline{Q})$. *Решение задачи (6)–(8) существует и единственно в классе* $C^\infty(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\left(d^j\left(\left(r_3^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)\right)^{-1}\left(\mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)-2ar_1^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)\left(\frac{1}{2}(d\varphi(-z)+\frac{1}{a}d^2\psi(-z))\right)\right)\right)\right)\Bigg|_{z=0}-$$

$$-\left(d^j\left(\frac{1}{2}(\varphi(-z)+\frac{1}{a}d\psi(-z))-\int\limits_l^{-z}\int\limits_\eta^{z}\mathcal{L}u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\right)\Bigg|_{z=0}=$$

$$=\left(d^j\left(\frac{1}{2}(\varphi(z)-\frac{1}{a}d\psi(z))+\int_l^z\int_z^\eta \mathcal{L}u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\right)\Bigg|_{z=0}, \ j=\overline{0,\infty},$$

$$\left(d^j\left(\mu^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\left(r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}(\varphi(y)-\frac{1}{a}d\psi(y))+\int_l^y\int_0^\eta \mathcal{L}u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\right)\right)\Bigg|_{y=l}-$$

$$-\left(d^j\left(2ar_1^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\left(r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}(d\varphi(y)-\frac{1}{a}d^2\psi(y))\right)\right)\right)\Bigg|_{y=l}=$$

$$=\left(d^j\left(\frac{1}{2}(\varphi(y)+\psi(y))+\int_l^y\int_\eta^0 \mathcal{L}u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\right)\Bigg|_{y=l}, \ j=\overline{0,\infty}.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\theta(\xi)\neq 0$ *и* $\rho(\eta)\neq 0$. *Функции* $\varphi\in C^2([0;l])$, $\psi\in C^1([0;l])$, $\mu^{(j)}, r_i^{(j)}\in C^1([0;+\infty))$, $j\in\{0,l\}$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda\in C^1(\overline{Q})$. *Решение задачи (6)–(8) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (15), (16), (19), (20) и условия выбора константы, описанные в леммах 2, 5.*

З а м е ч а н и е 3. *Пусть выполняются тождества* $(r_1^{(l)}(\eta))^2+(r_2^{(l)}(\eta))^2\equiv 0$ и $(r_1^{(0)}(\xi))^2+(r_2^{(0)}(\xi))^2\equiv 0$, *тогда получаем первую смешанную задачу, которая рассмотрена в [3].*

Заключение. В данном сообщении рассмотрена смешанная задача для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с косыми производными в граничных условиях. Для нее были получены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения при заданной гладкости исходных данных, а также было показано, что при некоторых значениях граничных условий может происходить ухудшение гладкости решения.

Список использованных источников

1. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.

2. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 22–27.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.

4. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – Москва: Наука, 1968. – 576 с.

5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.

6. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.

References

1. Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1212–1215. https://doi.org/10.1134/s0012266109080126

2. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the wave equation with the integral condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 22–27 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. https://doi.org/10.1134/s0012266114080084

4. Mikhlin S. G. *Course of mathematical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 576 p. (in Russian).

5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with the nonlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 52–72 (in Russian).

6. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with nonlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Столярчук Иван Игоревич – магистр физ.-мат. наук, аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Stolyarchuk Ivan Igorevich – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.