ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 539.12 Поступило в редакцию 08.08.2018
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-661-667 Received 08.08.2018

В. В. Кисель[1], В. А. Плетюхов[2], Е. М. Овсиюк[3], Я. А. Войнова[4], О. В. Веко[4], В. М. Редьков[4]

[1]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь
[2]Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Республика Беларусь
[3]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Республика Беларусь
[4]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ФЕРМИОН С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Аннотация. В рамках формализма Гельфанда–Яглома развита теория частицы со спином 1/2 и тремя массовыми параметрами. Модель основана на использовании расширенного набора представлений группы Лоренца, 20-компонентная волновая функция состоит из биспинора и вектор-биспинора. Из волновой функции строятся три вспомогательных биспинора, выведена система уравнений для этих биспиноров. При отсутствии внешних полей система имеет вид трех несвязанных уравнений дираковского типа с различными массами M_1, M_2, M_3. При наличии внешнего электромагнитного поля уравнения для трех биспиноров зацепляются друг с другом. Выполнено обобщение на случай искривленных моделей пространства. Если скалярная кривизна пространства отлична от нуля, то между тремя биспинорными компонентами возникают дополнительные геометрические члены взаимодействия. Показано, что модель фермиона с тремя массовыми параметрами допускает ограничение к случаю майорановских частиц.

Ключевые слова: уравнение Дирака, обобщенные волновые уравнения, три массовых параметра, электромагнитное поле, искривленное пространство–время, нейтральная майорановская частица

Для цитирования. Фермион с тремя массовыми параметрами: взаимодействие с внешними полями / В. В. Кисель [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 661–667. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-661-667

Vasiliy V. Kisel[1], Vladimir A. Pletyukhov[2], Elena M. Ovsiyuk[3], Yanina A. Voynova[4], Olga V. Veko[4], Viktor M. Red'kov[4]

[1]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus
[2]Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Republic of Belarus
[3]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Republic of Belarus
[4]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

FERMION WITH THREE MASS PARAMETERS: INTERACTION WITH EXTERNAL FIELDS

(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)

Abstract. In the article, using the Gelfand–Yaglom general approach, a new 20-component wave equation for spin 1/2 fermion that is characterized by three mass parameters is derived. Based on the 20-component wave function three auxiliary bispinors are determined, in the absence of an external field, these bispinors obey three separate Dirac-like equations with different masses M_1, M_2, M_3. In the presence of external electromagnetic fields, the main equation is not split into the separated equations; instead quite definite mixing of three Dirac-like equations arises. The model is extended to the curved space-time background. If the scalar space curvature differs from zero, then additional terms of geometrical interaction occur between three bispinor components. The model for fermion with three mass parameters allows for the restriction to the case of the neutral Majorana particle.

Keywords: Dirac equation, generalized wave equation, three mass parameters, electromagnetic field, curved space-time, neutral Majorana particle

For citation: Kisel V. V., Pletyukhov V. A., Ovsiyuk E. M., Voynova Ya. A., Veko O. V., Red'kov V. M. Fermion with three mass parameters: interaction with external fields. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 661–667 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-661-667

В контексте существования трех типов нейтрино с разными массами и похожими физическими свойствами представляет интерес исследование возможности строить обобщенные уравнения с несколькими значениями спина, с несколькими значениями массовых параметров и некоторыми дополнительными внутренними характеристиками частиц [1–9]. В данной работе будет введена и исследована модель фермиона с единственным значением спина $s = 1/2$ и тремя массовыми параметрами, при этом речь не идет о трех отдельных уравнениях Дирака. Имеется в виду единая физическая система с соответствующим обобщенным волновым уравнением, строящимся в рамках теории релятивистских волновых уравнений с расширенными наборами представлений группы Лоренца. Ранее в [10] была построена более простая модель частицы со спином 1/2 и двумя массовыми параметрами.

Релятивистская система уравнений для фермиона с тремя массовыми параметрами основана на использовании 20-компонентной волновой функции, включающей биспинор Ψ_0 и вектор-биспинор Ψ_μ. Опуская технические детали формулировки соответствующей теории в рамках формализма Гельфанда–Яглома, будем исходить из записи свободного уравнения (в отсутствии внешних полей) в спин-тензорной форме

$$\begin{gathered}
c_1\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_3}{\sqrt{6}}(\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-4(\partial_\mu\Psi_\mu))+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0,\\
c_2\hat{\partial}\Psi_0-i\frac{4c_4}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+(\partial_\mu\Psi_\mu)\right)+M\Psi_0=0,\\
-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}}\left(\partial_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right)+\\
+i\frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}}\left(\partial_\lambda\Psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\Psi_0\right)+M\left(\Psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right)=0,
\end{gathered}\tag{1}$$

числовые параметры $c_1,\ c_2$ – вещественные, а $c_3,\ c_4$ – комплексные, величины $f, g\in\{\pm1\}$; используется сокращенное обозначение для свертки оператора дифференцирования по координатам с матрицами Дирака $\hat{\partial}=\gamma_\mu\partial_\mu$. Физический смысл параметров станет понятным ниже.

После ряда математических преобразований систему уравнений (1) можно привести к виду, когда в ней в качестве неизвестных функций входят только три биспинора: $(\gamma_\mu\Psi_\mu), \Psi_0, (\partial_\mu\Psi_\mu)$:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\left\{c_1c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})+fc_2|c_3|^2-\frac{g}{\sqrt{6}}c_3|c_4|^2\right\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\\
-ig\frac{c_3c_4^*}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-\frac{4c_3}{M\sqrt{6}}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0,\\
\frac{i}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{c_2^2+g|c_4|^2}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-\\
-i\frac{4c_4}{M\sqrt{6}}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0,\\
+\frac{M}{4}\frac{1}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\{\sqrt{6}fc_2c_3^*-g|c_4|^2-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})\}\hat{\partial}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\\
-igM\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{c_4^*}{c_2}\hat{\partial}\Psi_0-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{\partial}(\partial_\mu\Psi_\mu)+M(\partial_\mu\Psi_\mu)=0.
\end{gathered}\tag{2}$$

В матричной форме систему (2) можно представить так:

$$K\hat{\partial}\begin{vmatrix}\gamma_\mu\Psi_\mu\\ \Psi_0\\ \partial_\mu\Psi_\mu\end{vmatrix}=M\begin{vmatrix}\gamma_\mu\Psi_\mu\\ \Psi_0\\ \partial_\mu\Psi_\mu\end{vmatrix}. \tag{3}$$

Трехмерную числовую матрицу K из (3) можно диагонализировать, соответствующее характеристическое уравнение дает кубическое уравнение для возможных диагональных элементов

$$\lambda^3-\lambda^2(c_1+c_2)+\lambda(c_1c_2-f\,|\,c_3\,|^2-g\,|\,c_4\,|^2)+(fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2)=0. \tag{4}$$

Таким образом, матрица K приводима к диагональному виду

$$K=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & R_1\\ A_2 & B_2 & R_2\\ A_3 & B_3 & R_3\end{vmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{vmatrix},$$

при этом система уравнений (2), (3) трансформируется в три несвязанных уравнения дираковского типа с различными массами:

$$M_1=\frac{M}{\lambda_1},\quad M_2=\frac{M}{\lambda_2},\quad M_3=\frac{M}{\lambda_3}.$$

Диагонализация проводится линейным преобразованием S над волновой функцией:

$$\Psi'=S\Psi,\quad SKS^{-1}=\widehat{K}'=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{vmatrix},\quad S=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Матрица S из (5) подчиняется уравнению

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & R_1\\ A_2 & B_2 & R_2\\ A_3 & B_3 & R_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix},$$

откуда получаем три линейные однородные системы

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=\lambda_1a_1, a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=\lambda_1a_2, a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3=\lambda_1a_3;$$
$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=\lambda_2b_1, b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3=\lambda_2b_2, b_1R_1+b_2R_2+b_3R_3=\lambda_2b_3;$$
$$r_1A_1+r_2A_2+r_3A_3=\lambda_3r_1, r_1B_1+r_2B_2+r_3B_3=\lambda_3r_2, r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3=\lambda_3r_3.$$

Их решения однотипны и имеют следующий явный вид:

$$a_2=a_1\frac{-igc_3c_4^*(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})\lambda_1}{\lambda_1c_2(\lambda_1-c_2)+(\lambda_1-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_1(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$a_3=-\frac{4a_1}{\sqrt6M}\frac{c_3(\lambda_1-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_1c_2(\lambda_1-c_2)+(\lambda_1-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_1(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$b_2=b_1\frac{-igc_3c_4^*(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})\lambda_2}{\lambda_2c_2(\lambda_2-c_2)+(\lambda_2-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$b_3=-\frac{4b_1}{\sqrt6M}\frac{c_3(\lambda_2-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_2c_2(\lambda_2-c_2)+(\lambda_2-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_2(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$r_2=r_1\frac{-igc_3c_4^*(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})\lambda_3}{\lambda_3c_2(\lambda_3-c_2)+(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})g\,|\,c_4\,|^2},$$

$$r_3=-\frac{4r_1}{\sqrt6M}\frac{c_3(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2}{\lambda_3c_2(\lambda_3-c_2)+(\lambda_3-c_2)[fc_2\,|\,c_3\,|^2+gc_1\,|\,c_4\,|^2]-\lambda_3(c_1+\frac{c_3}{\sqrt6})g\,|\,c_4\,|^2}.$$

Проанализируем значения корней λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения (4). Можно показать, что вещественные положительные значения корней возможны, если $c_1 > 0, c_2 > 0, f = -1, g = -1$. С использованием обозначений

$$|c_4|^2 = a^2, |c_3|^2 = b^2, \quad \Gamma = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3}$$

для этих положительных корней применима такая параметризация:

$$M_3 = \frac{M}{\lambda_3} = \frac{\mu}{\cos\alpha}, \quad \mu = \frac{M}{(c_1 + c_2)}, \quad M_{1,2} = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) \pm \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}}.$$

Существуют особые случаи. Например,

$$a \to 0, \quad b \to 0 \quad \Rightarrow M_3 = \frac{\mu}{\cos\alpha}, \quad M_1 \to \infty, \quad M_2 = \frac{\mu}{1 - \cos^2\alpha},$$

есть и другие.

Таким образом, в случае свободной частицы исходное уравнение можно привести к виду трех раздельных уравнений дираковского типа с массами M_1, M_2, M_3 для трех специальных комбинаций биспиноров:

$$\Phi_1 = a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3(\partial_\mu \Psi_\mu), \quad (\hat{\partial} + M_1)\Phi_1 = 0, \quad M_1 = M/\lambda_1;$$

$$\Phi_2 = b_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + b_2 \Psi_0 + b_3(\partial_\mu \Psi_\mu), \quad (\hat{\partial} + M_2)\Phi_2 = 0, \quad M_2 = M/\lambda_2;$$

$$\Phi_3 = r_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + r_2 \Psi_0 + r_3(\partial_\mu \Psi_\mu), \quad (\hat{\partial} + M_3)\Phi_3 = 0, \quad M_3 = M/\lambda_3.$$

Теперь рассмотрим эту модель, когда присутствует внешнее электромагнитное поле. Следует вернуться к системе (1) и удлинить производную стандартным способом: $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$. Так, получаем

$$c_2 \widehat{D} \Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M \Psi_0 = 0, \tag{6a}$$

$$\left(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \right) \widehat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0, \tag{6b}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \right] (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ &+\frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \right] \Psi_0 - \frac{M}{4} \widehat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{6c}$$

Уравнение (6c) содержит оператор второго порядка D^2. Используя первое и второе уравнения, можно исключить этот оператор из третьего уравнения. Используя введенные ранее обозначения A_i, B_i, R_i, $i = 1, 2, 3$, получаем систему уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} &A_1 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_1 + B_1 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_2 + R_1 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_3 + M\, \overline{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} \Sigma\, \overline{\Phi}_1 - \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} \Sigma\, \overline{\Phi}_2 = 0, \\ &A_2 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_1 + B_2 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_2 + R_2 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_3 + M\, \Phi_2 + \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} \Sigma\, \overline{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} \Sigma\, \overline{\Phi}_2 = 0, \\ &A_3 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_1 + B_3 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_2 + R_3 \widehat{D}\, \overline{\Phi}_3 + M\, \overline{\Phi}_3 + \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*\, \Sigma\, \overline{\Phi}_1 - i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^* \Sigma\, \overline{\Phi}_2 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\overline{\Phi}_1 = \gamma_\mu \Psi_\mu, \quad \overline{\Phi}_2 = \Psi_0, \quad \overline{\Phi}_3 = D_\mu \Psi_\mu, \quad (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} = \Sigma.$$

Система уравнений (7) отличается от аналогичной системы (3) в свободном случае присутствием дополнительных слагаемых, зависящих от тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Из уравнений (7) по уже известной методике диагонализации выводим систему уравнений для трех новых функций:

$$\Phi_1 = a_1\bar{\Phi}_1 + a_2\bar{\Phi}_2 + a_3\bar{\Phi}_3, \quad \Phi_2 = b_1\bar{\Phi}_1 + b_2\bar{\Phi}_2 + b_3\bar{\Phi}_3, \quad \Phi_3 = r_1\bar{\Phi}_1 + r_2\bar{\Phi}_2 + r_3\bar{\Phi}_3,$$

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \hat{D}\Phi_1 + M\Phi_1 + \left(a_1 \frac{4}{3}\frac{f\,|c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3}\frac{fc_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* \right)\Sigma\,\bar{\Phi}_1 + \\
+\left(-a_1 \frac{4i}{3}\frac{gc_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3}\frac{g\,|c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^* \right)\Sigma\,\bar{\Phi}_2 = 0, \\
\lambda_1 \hat{D}\,\bar{\Phi}_2 + M\Phi_2 + \left(b_1 \frac{4}{3}\frac{f\,|c_3|^2}{M} + b_2 \frac{4i}{3}\frac{fc_3^* c_4}{M} + b_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* \right)\Sigma\,\bar{\Phi}_1 + \\
+\left(-b_1 \frac{4i}{3}\frac{gc_3 c_4^*}{M} + b_2 \frac{4}{3}\frac{g\,|c_4|^2}{M} - b_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^* \right)\Sigma\,\bar{\Phi}_2 = 0, \\
\lambda_1 \hat{D}\,\Phi_3 + M\Phi_3 + \left(r_1 \frac{4}{3}\frac{f\,|c_3|^2}{M} + r_2 \frac{4i}{3}\frac{fc_3^* c_4}{M} + r_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* \right)\Sigma\,\bar{\Phi}_1 + \\
+\left(-r_1 \frac{4i}{3}\frac{gc_3 c_4^*}{M} + r_2 \frac{4}{3}\frac{g\,|c_4|^2}{M} - r_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^* \right)\Sigma\,\bar{\Phi}_2 = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

После алгебраических преобразований систему уравнений (8) приводим к форме

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \hat{D}\,\Phi_1(x) + M\Phi_1 + \frac{4c_2c_3}{3M}\lambda_1(\lambda_1 - c_2)\Sigma(x)\left[fc_3^*\bar{\Phi}_1 - igc_4^*\bar{\Phi}_2) \right] = 0, \\
\lambda_2 \hat{D}\,\Phi_2 + M\Phi_2 + \frac{4c_2c_3}{3M}\lambda_2(\lambda_2 - c_2)\Sigma(x)\left[fc_3^*\,\bar{\Phi}_1 - igc_4^*\bar{\Phi}_2 \right] = 0, \\
\lambda_3 \hat{D}\,\Phi_3 + M\Phi_3 + \frac{4c_2c_3}{3M}\lambda_3(\lambda_3 - c_2)\Sigma(x)\left[fc_3^*\,\bar{\Phi}_1 - igc_4^*\bar{\Phi}_2 \right] = 0.
\end{gathered}$$

Дальше, выражая функции $\bar{\Phi}_i$ через функции Φ_j, устанавливаем окончательный вид уравнений:

$$\begin{gathered}
\hat{D}\Phi_1(x) + M_1\Phi_1(x) + Y_1\,\Sigma(x)\Phi(x) = 0, \\
\hat{D}\Phi_2(x) + M_2\Phi_2(x) + Y_2\Sigma(x)\Phi(x) = 0, \\
\hat{D}\Phi_3(x) + M_3\Phi_3(x) + Y_3\Sigma(x)\Phi(x) = 0,
\end{gathered}$$

где использованы обозначения

$$\begin{gathered}
Y_i = \frac{4c_3}{3M}c_2(\lambda_i - c_2), \quad \Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x), \\
L_1 = \frac{-L\,|c_4|^2 - L\,|c_3|^2 + c_2{}^2 - c_2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}{Lc_2c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \\
L_2 = \frac{-L\,|c_4|^2 - L\,|c_3|^2 + c_2{}^2 - c_2(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3\lambda_1}{Lc_2c_3(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\
L_3 = \frac{-L\,|c_4|^2 - L\,|c_3|^2 + c_2{}^2 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2}{Lc_2c_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.
\end{gathered}$$

Обобщим эту модель на случай риманова пространства–времени. Для этого нужно сделать несколько изменений. Вместо *ict*-метрики в пространстве Минковского, в случае риманова пространства используем метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$. Нужно выполнить замену $M --> iM$. Удлиненные производные заменяются на более общие [11]:

$$D_\alpha(x) = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \quad \widehat{D} = \gamma^\alpha(x) D_\alpha(x),$$

где $\Gamma_\alpha(x)$ – биспинорная связность и $\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e^\alpha_{(a)}(x)$. При обобщении уравнений нужно учитывать тождества [11]

$$\begin{gathered}\gamma^\rho(x) D_\beta = D_\beta \gamma^\rho(x),\\ D_\sigma(x) g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) D_\sigma(x), \ \widehat{D}\widehat{D} = -\Sigma(x),\\ D^2 = D^\alpha D_\alpha, \quad \Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{R(x)}{4},\end{gathered} \tag{9}$$

$R(x)$ – скаляр Риччи.

Проведенный анализ остается в основном тем же самым. Общековариантная система уравнений для фермиона с тремя массовыми параметрами представляется так:

$$i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y_1\,\Sigma(x)\Phi(x) = 0,$$

$$i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y_2\,\Sigma(x)\Phi(x) = 0,$$

$$i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y_3\,\Sigma(x)\Phi(x) = 0,$$

где использованы прежние обозначения

$$Y_i = \frac{4c_3}{3M} c_2(\lambda_i - c_2), \quad \Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x).$$

Отметим, что поскольку в величине $\Sigma(x)$ (см. (9)) присутствует скаляр Риччи $R(x)$, то даже в отсутствие электромагнитного поля обобщенная система уравнений зацепляет три биспинора в единую систему при условии, что $R(x) \neq 0$:

$$\begin{gathered}i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)]\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y_1\frac{R(x)}{4}\Phi(x) = 0,\\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)]\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y_2\frac{R(x)}{4}\Phi(x) = 0,\\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)]\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y_3\frac{R(x)}{4}\Phi(x) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

В заключение специально отметим, что поскольку в любом майорановском базисе выполняются равенства

$$[i\gamma^\alpha(x))^* = i\gamma^\alpha(x), \quad \Gamma^*_\alpha(x) = \Gamma_\alpha(x),$$

то система (10) допускает ограничение к случаю вещественных (и чисто мнимых) биспиноров Φ_i, т. е. к случаю майорановской частицы с тремя массовыми параметрами.

Список использованных источников

1. Гинзбург, В. Л. О волновых уравнениях для частиц с переменным спином / В. Л. Гинзбург, Я. А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13. – С. 274.

2. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

3. Bhabha, H. J. An equation for a particle with two mass states and positive charge density / H. J. Bhabha // Philosophical Magazine. – 1952. – Vol. 43 (336). – P. 33–47. https://doi.org/10.1080/14786440108520964

4. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

5. Ginzburg, V. L. On relativistic wave equations with a mass spectrum / V. L. Ginzburg // Acta Phys. Pol. – 1956. – Vol. 15. – P. 163–175.

6. Shimazu, H. A relativistic wave equation for a particle with two mass states of spin 1 and 0 / H. Shimazu // Progress of Theoretical Physics. – 1956. – Vol. 16, N 4. – P. 287–298. https://doi.org/10.1143/ptp.16.287

7. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

8. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

9. Elementary particles with internal structure in external field / V. V. Kisel [et al.]. – USA: Nova Science Publishers, Inc., 2018.

10. Spin 1/2 particle with two mass states: interaction with external fields / V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20, N 4. – P. 404–423.

11. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 486 с.

References

1. Ginzburg V. L., Smorodinskiy Ya. A. On wave equations for particles with variable spin. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1943, vol. 13, pp. 274 (in Russian).

2. Gelfand I. M., Yaglom A. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1948, vol. 18, no. 8, pp. 703–733 (in Russian).

3. Bhabha H. J. An equation for a particle with two mass states and positive charge density. *London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1952, vol. 43, no. 336, pp. 33–47. https://doi.org/10.1080/14786440108520964

4. Fedorov F. I. Generalized relativistic wave equations. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1952, vol. 82, no. 1, pp. 37–40 (in Russian).

5. Ginzburg V. L. On relativistic wave equations with a mass spectrum. *Acta Physica Polonica*, 1956, vol. 15, pp. 163–175.

6. Shimazu H. *A relativistic wave equation for a particle with two mass states of spin 1 and 0. Progress of Theoretical Physics*, 1956, vol. 16, no. 4, pp. 287–298. https://doi.org/10.1143/ptp.16.287

7. Fedorov F. I. *Lorentz group*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 384 p. (in Russian).

8. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and internal degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2015. 328 p. (in Russian).

9. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Balan V., Veko O. V., Red'kov V. M. *Elementary particles with internal structure in external field.* USA, Nova Science Publishers, Inc., 2018.

10. Kisel V. V., Pletyukhov V. A., Gilewsky V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. Spin 1/2 particle with two mass states: interaction with external fields. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 404–423.

11. Red'kov V. M. *Field particles in Riemannian space and the Lorentz group.* Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2009. 496 p. (in Russian).

Информация об авторах

Кисель Василий Васильевич – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: Vasiliy_bspu@mail.ru.

Плетюхов Владимир Анестиевич – д-р физ.-мат. наук, профессор. Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (ул. Космонавтов, 21, 224016, Брест, Республика Беларусь). E-mail: terphys@brsu.brest.by.

Овсиюк Елена Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Войнова Янина Александровна – аспирант. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: voinyuschka@mail.ru.

Веко Ольга Владимировна – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vekoolga@mail.ru.

Редьков Виктор Михайлович – д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@ifanbel.bas-net.by.

Information about the authors

Kisel Vasiliy Vasilievich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Vasiliy_bspu@mail.ru.

Pletyukhov Vladimir Anestievich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Brest State University named after A. S. Pushkin (12, Kosmonavtov Str., 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: terphys@brsu.brest.by.

Ovsiyuk Elena Mikhaylovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str, 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Voynova Yanina Akeksandrovna – Postgraduate student. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Science of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru.

Veko Olga Vladimirovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Science of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vekoolga@mail.ru.

Red'kov Viktor Mikhaylovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Science of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: redkov@ifanbel.bas-net.by.