

ISSN 1561-8323 (Print)

ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 530.12

<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-668-673>

Поступило в редакцию 15.10.2018

Received 15.10.2018

С. О. Комаров, А. К. Горбачевич, А. Н. Тарасенко*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь.***КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА,
ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ***(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)*

Аннотация. Для точечного источника электромагнитного излучения, движущегося в гравитационном поле вращающейся черной дыры, описываемой метрикой Керра, разработан метод вычисления красного смещения как функции времени удаленного наблюдателя. В отличие от широко представленных в литературе способов, граничная задача для траектории луча решена не численным подбором параметров, а на основе приближенных аналитических выражений для изотропных геодезических в метрике Керра. Предложенный метод проиллюстрирован на примере модельной задачи с параметрами, соответствующими реальным звездам, движущимся в непосредственной близости сверхмассивной черной дыры, находящейся в центре нашей Галактики. На этом же примере показана эффективность и хорошая точность данного метода.

Ключевые слова: метрика Керра, релятивистское красное смещение, гравитационное линзирование, геодезические

Для цитирования. Комаров, С. О. Красное смещение излучения точечного источника, движущегося в поле вращающейся черной дыры / С. О. Комаров, А. К. Горбачевич, А. Н. Тарасенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 668–673. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-668-673>

Stanislav O. Komarov, Alexander K. Gorbatsievich, Alexander N. Tarasenko*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus***REDSHIFT OF RADIATION OF A POINT-LIKE SOURCE MOVING IN THE EXTERNAL KERR FIELD***(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)*

Abstract. The method of calculation of redshift of light from a point-like source that moves in the gravitational field of the Kerr black hole as a function of time of observation is developed. The widely presented in literature methods for solving the boundary problem are based on a numerical selection of parameters of geodesics. In contrast, the proposed method is based on approximate analytical expressions for isotropic geodesics in the Kerr metric. The proposed method is illustrated by the example of a model problem with parameters corresponding to real stars moving in the immediate vicinity of a super-massive black hole located in the Center of our Galaxy. The same example shows the efficiency and good accuracy of this method.

Keywords: Kerr metric, relativistic redshift, gravitational lensing, geodesics

For citation: Komarov S. O., Gorbatsievich A. K., Tarasenko A. N. Redshift of radiation of a point-like source moving in the external Kerr field. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 668–673 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-668-673>

Введение. На протяжении десятков лет проводились исследования движения звезд в окрестности центра нашей Галактики, в результате которых было установлено, что в этой области находится сверхмассивная черная дыра массой $m_{\text{ВН}} \approx 4 \cdot 10^6 m_{\text{С}}$ [1; 2]; $m_{\text{С}}$ – масса Солнца. Одним из крупнейших скоплений звезд в непосредственной окрестности этой черной дыры является S-кластер [3]. Наблюдения за звездами из этого кластера в силу их близости к черной дыре позволяют проверять различные теории гравитации для сильных гравитационных полей [4; 5].

В рамках общей теории относительности, наиболее общее гравитационное поле вращающейся черной дыры описывается метрикой Керра, а одним из параметров, доступных для измерений и дающих информацию о движении звезд, является красное смещение. Метод расчета красного смещения электромагнитного излучения звезды, движущейся в гравитационном поле Керра, как функции времени наблюдения, разработан в настоящей работе.

Красное смещение. В приближении геометрической оптики [6], мировые линии света $x^i = x^i(\lambda)$ являются изотропными геодезическими: $k^i_{;j}k^j = 0$, $k_i k^i = 0$, где $k^i = dx^i / d\lambda$ – волновой 4-вектор; λ – аффинный параметр. Две задачи: о вычислении красного смещения и вычислении интервалов времени между приходящими импульсами пульсара, могут быть сведены к одной, если учесть соотношение [7]

$$t_{TOA}^{(N)} = t_{TOA}^{(N-1)} + T_P(1+z),$$

где $t_{TOA}^{(N)}$ – время прихода N -го импульса в системе отсчета наблюдателя; T_P – период испускания импульсов в системе отсчета источника, а z – красное смещение: $z = (k_{si}u_s^i) / (k_{oj}u_o^j) - 1$, где k_{si} и k_{oj} – волновой 4-вектор в точке испускания и в точке приема сигнала соответственно, а u_s^i и u_o^j – векторы 4-скорости источника и приемника соответственно.

Для описания движения звезды мы будем рассматривать ее как пробную точечную массу, мировая линия которой представляет собой времениподобную геодезическую. Для вычисления красного смещения в некоторый момент времени необходимо найти изотропную геодезическую, пересекающую как мировую линию источника, так и мировую линию наблюдателя. Таким образом, поиск этой изотропной геодезической сводится к решению граничной задачи.

Метрика Керра. В координатах Бойера–Лидквиста $\{r, \theta, \varphi, t\}$, метрика Керра, как известно, имеет следующий вид:

$$ds^2 = -\rho^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2} c^2 dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \left[d\varphi - \left(\frac{2aMr}{\Sigma^2} \right) c dt \right]^2 \sin^2 \theta + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$; $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$; $\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2(r^2 + a^2 - 2Mr) \sin^2 \theta$; a – параметр Керра (удельный момент импульса источника), а $M = Gm / c^2$ – масса источника в геометрических единицах. Уравнения геодезической в случае метрики Керра могут быть приведены к виду, допускающему разделение переменных [8; 9]:

$$dr / d\tau_M = \pm \sqrt{R(r)}, \quad d \cos \theta / d\tau_M = \pm \sqrt{\Theta(\cos \theta)}, \tag{1}$$

$$d\varphi / d\tau_M = \Phi(r, \cos \theta), \quad dt / d\tau_M = T(r, \cos \theta). \tag{2}$$

Явные выражения для функций $R(r)$, $\Theta(\cos \theta)$, $\Phi(r, \cos \theta)$, $T(r, \cos \theta)$ приведены в [9], $\tau_M = \int_0^\tau d\tau / (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$ – так называемый временной параметр Мино. Для получения времениподобной геодезической, описывающей движение источника, систему уравнений (1)–(2) решим численно. Для записи изотропных же геодезических, описывающих распространение света, нам необходимо аналитическое решение, приведенное в [8; 9]. В рамках рассматриваемой модели, приближение $a / r_p \ll 1$, где r_p – минимальное значение координаты r луча, является оправданным с физической точки зрения, чем мы и воспользуемся в дальнейшем, записывая решения системы (1)–(2) в линейном приближении по этому параметру. Найдем точный аналитический вид зависимости $\tau_M(\theta)$ из (1). Получим из (1) (здесь $1 / u = r$):

$$\frac{du}{d\tau_M} = -a^2 \eta u^4 + 2[\eta + (\xi - a)^2] u^3 + (a^2 - \xi^2 - \eta) u^2 + 1, \tag{3}$$

где $\xi = L / E$, $\eta = Q / E^2$. В нашем приближении можно пренебречь слагаемым $-a^2 \eta u^4$ в правой части (3). В дальнейшем подробно рассмотрим лишь те решения, для которых $\eta > 0$ и существует перигеум. Тогда из (3) и найденной функции $\tau_M(\theta)$ следует

$$\frac{1}{r_s A_u} = 1 + 2 \sin\left(\varepsilon_u - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3} \cos(\varepsilon_u) \times$$

$$\times sn^2 \left\{ \frac{i \sqrt{\cos\left(\varepsilon_u - \frac{\pi}{3}\right)}}{\sqrt{2\sqrt{3} \cos \varepsilon}} \left[F \left[\arccos \left(\frac{a \cos \theta_s}{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta}} \right), K_\theta \right] - \right. \right. \quad (4)$$

$$\left. \left. - F \left[\arccos \left(\frac{a \cos \theta_o}{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta}} \right), K_\theta \right], K_u \right\}.$$

Здесь $\{r_s, \theta_s, \varphi_s\}$ и $\{r_o, \theta_o, \varphi_o\}$ – пространственные координаты источника и наблюдателя соответственно. Кроме того, здесь введены следующие обозначения:

$$A_u = -\frac{1}{6} \frac{a^2 - \xi^2 - \eta}{\eta + (\xi - a)^2}, \quad \varepsilon = \pi - \arcsin[2a\sqrt{-\eta} / (a^2 - \xi^2 - \eta)],$$

$$\varepsilon_u = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arcsin \left[1 + \frac{54(\eta + (\xi - a)^2)^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} \right], \quad \text{при } \frac{54(\eta + (\xi - a)^2)^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} > -2,$$

$$\varepsilon_u = -\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \arcsin \left(1 + \frac{54(\eta + (\xi - a)^2)^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} \right), \quad \text{при } \frac{54(\eta + (\xi - a)^2)^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} < -2.$$

Аналогичные формулы без труда могут быть получены и для $\eta < 0$, и для траекторий, не имеющих перигентра. Погрешность вычисления обратного радиуса Δu_s по формуле (4) для случая $\xi^2 + \eta \gg a^2$ удовлетворяет условию $|\Delta u_s| < \frac{4\eta a^2}{\xi^2 + \eta - a^2} \frac{1}{r_p^3}$. Тогда из (2):

$$\frac{1}{E} \frac{d\varphi}{d\tau_M} = \frac{\xi}{1 - \cos^2 \theta} + \frac{2ra}{r^2 - 2r} - \frac{\xi a^2}{r^2 - 2r} - \frac{2ra^3}{(r^2 - 2r)^2} + O\left(\frac{a^4}{r^4}\right). \quad (5)$$

Нам достаточно сохранить в правой части (5) первые два слагаемых. Получим решение

$$\varphi_s = \frac{a\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\cos\left(\varepsilon_u - \frac{\pi}{3}\right)(\xi^2 + \eta - a^2)}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1 - A_u \left(2 + 4 \sin\left(\varepsilon_u - \frac{2\pi}{3}\right) \right)} \pi \left[\Xi(\theta_s), \frac{4\sqrt{3} \cos \varepsilon_u}{\frac{1}{A_u} - 2 - 4 \sin\left(\varepsilon_u - \frac{2\pi}{3}\right)}, K_u \right] - F[\Xi(\theta_s), K_u] \right) + \quad (16)$$

$$+ \frac{a^2 \xi}{\left(a^2 - \cos^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \sqrt{\cos \varepsilon (a^2 - \xi^2 - \eta)}} \pi \left[\arccos \left(\frac{a \cos \theta_s}{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta}} \right), \frac{\xi^2 + \eta - a^2}{\xi^2 + \eta + a^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}, K_\theta \right].$$

Здесь использовано следующее обозначение $\Xi(\theta_s) = \arcsin \sqrt{\frac{u(\theta_s) / A_u - 1 - 2 \sin(\varepsilon_u - 2\pi/3)}{2\sqrt{3} \cos \varepsilon_u}}$.

Погрешность в данном выражении можно оценить как $\Delta \varphi_s / \varphi_s < a^2 / r_p^2$. Из оценок следует, что приближение может оказаться неверным лишь для траекторий луча, очень близко подходящих к черной дыре, а также для значений $\xi \approx a$.

Описанная ранее граничная задача сводится к решению следующей системы уравнений относительно прицельных параметров луча ξ и η :

$$\frac{1}{r_s(\tilde{\theta}, \xi, \eta)} = \frac{1}{\tilde{r}}, \quad \varphi_s(\tilde{\theta}, \xi, \eta) = \tilde{\varphi}.$$

Здесь $\{\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$ – пространственные координаты источника в рассматриваемый момент времени. Используя полученные значения прицельных параметров, найдем компоненты волнового вектора, необходимые для вычисления красного смещения.

До сих пор данная задача решалась [4; 5] посредством составления таблиц соответствия прицельных параметров и положения источника. В нашей работе использованы аналитические выражения (4) и (6), благодаря чему решение граничной задачи свелось не к поиску значения в таблице, что может привести к большой погрешности, а к решению системы уравнений. Чтобы оценить то, каким образом выполненные приближения в функциях φ_s и r_s скажутся на конечном результате (т. е. вычисленной величине красного смещения), поступим следующим образом.

Проинтегрируем численно точные уравнения для изотропной геодезической в метрике Керра (1), (2), в обратном направлении (т. е. от наблюдателя к источнику), используя заданные величины прицельных параметров $\xi = L/E$ и $\eta = Q/E^2$, где L, E – интегралы движения вдоль изотропной геодезической, связанные с аксиальной симметрией и стационарностью метрики Керра соответственно, а интеграл движения Q (постоянная Картера) связан с существованием тензора Киллинга в метрике Керра [8]. Для произвольного значения τ_M получим значения координат источника $\{r_s, \theta_s, \varphi_s\}$. Результаты численного решения граничной задачи представлены в таблице.

Результы сравнения вычисленных прицельных параметров и их точных значений для некоторых траекторий ($a = 0,9$)

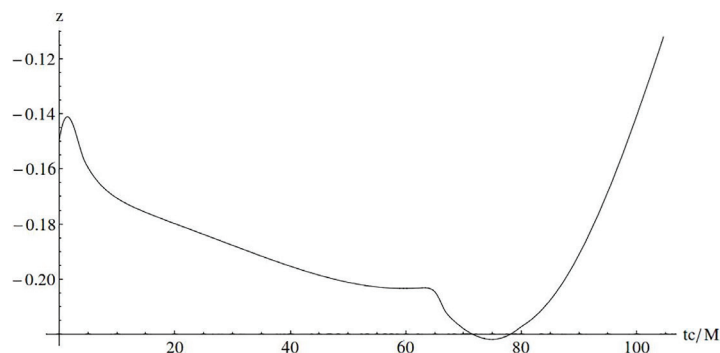
The results of the comparison of calculated impact parameters and the exact values of it for the certain trajectory ($a = 0,9$)

Координаты источника Source coordinates $\{r_s, \theta_s, \varphi_s\}$	Вычисленные прицельные параметры Calculated impact parameters	
	ξ	η
Траектория луча света не проходит перисцентр. $\theta_0 = 1,45$, точные значения прицельных параметров: $\xi = 5, \eta = 2$ The trajectory of light does not pass the pericenter. $\theta_0 = 1.45$, the exact values of impact parameters: $\xi = 5, \eta = 2$		
{10,4, 0,59, 1,51}	4,986	2,0003
{25,2, 1,50, 1,20}	4,998	1,9998
{125, 1,46, 0,04}	4,9999	1,99999
$\theta_0 = 1,55$, точные значения прицельных параметров: $\xi = 6, \eta = 3$ $\theta_0 = 1.55$, the exact values of impact parameters: $\xi = 6, \eta = 3$		
{20,3, 1,64, 0,30}	5,996	3,0001
{33,5, 1,60, 1,81}	5,999	3,00001
{50,1, 1,58, 0,12}	5,999	3,00000
Траектория луча света проходит перисцентр. $\theta_0 = 1,45$, точные значения прицельных параметров: $\xi = 5, \eta = 2$ The trajectory of light pass the pericenter. $\theta_0 = 1.45$, the exact values of impact parameters: $\xi = 5, \eta = 2$		
{14,5, 1,50, 4,07}	5,3	3,05
{49,5, 1,44, 4,33}	5,35	2,82
{3846, 1,41, 4,43}	5,4	2,73
$\theta_0 = 1,55$, точные значения прицельных параметров: $\xi = 6, \eta = 3$ $\theta_0 = 1.55$, the exact values of impact parameters: $\xi = 6, \eta = 3$		
{24,8, 1,44, 3,85}	6,28	4,07
{1250, 1,38, 4,09}	6,36	3,81

Зная погрешность в вычислении прицельных параметров $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$, погрешность вычисленного красного смещения Δz можно оценить по формуле

$$\Delta z \approx (\Delta\xi + \Delta\eta / \sqrt{\xi^2 + \eta})z. \tag{7}$$

Из численных примеров (таблица) и (7) следует, что предложенный в данной работе метод позволяет вычислять красное смещение с хорошей точностью при рассмотрении траекторий света 0-го порядка (им соответствуют примеры, когда $\varphi_s < \pi$), определяющих излучение с наибольшей интенсивностью [10]. Результаты вычислений красного смещения для рассмотренной модели приведены на рисунке.



Красное смещение как функция времени наблюдения. Параметры модельной двойной системы в единицах ее полной массы ($c = 1$): энергия $E = 0,984$, момент импульса $L = 4,9M$, постоянная Картера $Q = 3,0M^2$. Параметр Керра $a = 0,1M$
 Redshift as a function of time of observation. Parameters of the model binary system per unit mass are ($c = 1$): energy $E = 0.984$, angular momentum $L = 4.9M$, Carter constant $Q = 3.0M^2$. Kerr parameter $a = 0.1M$

Заключение. Предложенный в работе метод позволяет вычислить красное смещение излучения звезды, движущейся в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Из рассмотренных примеров (таблица, рисунок) следует, что на величину красного смещения влияют как параметры черной дыры, так и траектория источника. В отличие от случая статической (не вращающейся) черной дыры [11], функция красного смещения для вращающейся черной дыры имеет более сложный характерный вид.

Список использованных источников

1. Genzel, R. The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster / R. Genzel, F. Eisenhauer, S. Gillessen // *Rev. Mod. Phys.* – 2010. – Vol. 82, N 4. – P. 3121–3195. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.3121>
2. Morris, M. R. The environment of the Galaxy's central black hole / M. R. Morris. – 2003. – P. 95–122. <https://doi.org/10.1887/0750308370/b1153c4>
3. An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center / S. Gillessen [et al.] // *Astrophys. J.* – 2017. – Vol. 837, N 1. – 19 p. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa5c41>
4. Zhang, F. On testing the Kerr metric of the massive black hole in the Galactic Center via stellar orbital motion: full general relativistic treatment / F. Zhang, Y. Lu, Q. Yu // *Astrophys. J.* – 2015. – Vol. 809, N 2. – 27 p. <https://doi.org/10.1088/0004-637x/809/2/127>
5. General relativistic effects on the orbit of the S2 star with GRAVITY / M. Grould [et al.] // *Astronomy and Astrophysics.* – 2017. – Vol. 608. – A60 (22 p.). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731148>
6. Stephani, H. *Relativity. An introduction to Spetial and General Relativity* / H. Stephani. – Cambridge University Press, 2004. – 3 ed. – 396 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511616532>
7. Zhang, F. Probing the Spinning of the Massive Black Hole in the Galactic Center via Pulsar Timing: A Full Relativistic Treatment / F. Zhang, P. Saha // *Astrophys. J.* – 2017. – Vol. 849, N 1. – 15 p. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa8f47>
8. Чандрасекар, С. Математическая теория черных дыр: в 2 ч. / С. Чандрасекар; пер. с англ. В. А. Березкиной. – М.: Мир, 1986. – Ч. 2. – 355 с.
9. Dexter, J. A fast new public code for computing photon orbits in a Kerr spacetime / J. Dexter, E. Agol // *Astrophys. J.* – 2009. – Vol. 696, N 2. – P. 1616–1629. <https://doi.org/10.1088/0004-637x/696/2/1616>
10. Bisnovatyi-Kogan, G. S. Strong gravitational lensing by schwarzschild black holes / G. S. Binovatyi-Kogan, Yu. O. Tsupko // *Astrophysics.* – 2008. – Vol. 51, N 1. – P. 99–111. <https://doi.org/10.1007/s10511-008-0011-8>
11. Komarov, S. Redshift of a compact binary star in the neighbourhood of a supermassive black hole / S. Komarov, A. Gorbatsievich, A. Tarasenko // *General Relativity and Gravitation.* – 2018. – Vol. 50. – P. 132. <https://doi.org/10.1007/s10714-018-2461-6>

References

1. Genzel R., Eisenhauer F., Gillessen S. The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster. *Reviews of Modern Physics*, 2010, vol. 82, no. 4, pp. 3121–3195. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.3121>

2. Morris, M. R. The environment of the Galaxy's central black hole. 2003, pp. 95–122. <https://doi.org/10.1887/0750308370/b1153c4>
3. Gillessen S., Plewa P. M., Eisenhauer F., Sari R., Waisberg I., Habibi M., Pfuhl O., George E., Dexter J., Fellenberg S. von, Ott T., Genzel R. An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center. *Astrophysical Journal*, 2017, vol. 837, no. 1. 19 p. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa5c41>
4. Zhang F., Lu Y., Yu Q. On testing the Kerr metric of the massive black hole in the Galactic Center via stellar orbital motion: full general relativistic treatment. *Astrophysical Journal*, 2015, vol. 809, no. 2. 27 p. <https://doi.org/10.1088/0004-637x/809/2/127>
5. Grould M., Vincent F. H., Paumard T., Perrin G. General relativistic effects on the orbit of the S2 star with GRAVITY. *Astronomy and Astrophysics*, 2017, vol. 608, A60 (22 p.). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731148>
6. Stephani H. *Relativity. An introduction to Spetial and General Relativity*, 3d ed. Cambridge University Press, 2004. 396 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511616532>
7. Zhang F., Saha P. Probing the Spinning of the Massive Black Hole in the Galactic Center via Pulsar Timing: A Full Relativistic Treatment. *Astrophysical Journal*, 2017, vol. 849, no. 1. 15 p. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa8f47>
8. Chandrasekhar S. *The mathematical theory of black holes*. New York, Oxford University Press, 1983. 355 p.
9. Dexter J., Agol E. A fast new public code for computing photon orbits in a Kerr spacetime. *Astrophysical Journal*, 2009, vol. 696, no. 2, pp. 1616–1629. <https://doi.org/10.1088/0004-637x/696/2/1616>
10. Bisnovatyi-Kogan G. S., Tsupko Yu. O. Strong gravitational lensing by schwarzschild black holes. *Astrophysics*, 2008, vol. 51, no. 1, pp. 99–111. <https://doi.org/10.1007/s10511-008-0011-8>
11. Komarov S., Gorbatsievich A., Tarasenko A. Redshift of a compact binary star in the neighbourhood of a supermassive black hole. *General Relativity and Gravitation*, 2018, vol. 50, pp. 132. <https://doi.org/10.1007/s10714-018-2461-6>

Информация об авторах

Комаров Станислав Олегович – ассистент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: staskomarov@tut.by.

Горбачевич Александр Константинович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: gorbatsievich@bsu.by.

Тарасенко Александр Николаевич. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tarasenk@tut.by.

Information about the authors

Komarov Stanislav Olegovich – Assistant. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: staskomarov@tut.by.

Gorbatsievich Alexander Konstantinovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorbatsievich@bsu.by.

Tarasenko Alexander Nikolaevich. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tarasenk@tut.by.