ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.958 Поступило в редакцию 10.09.2018
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13 Received 10.09.2018

Академик В. И. Корзюк[1], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА С НЕОДНОРОДНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОГЛАСОВАНИЯ

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока в полуполосе в случае, когда выполняются неоднородные условия согласования. С помощью метода характеристик доказывается, что выполнение однородных условий согласования является не только достаточным, но и необходимым для существования единственного классического решения, определенного на всей полуполосе. В случае, когда выполнены неоднородные условия согласования, строится эквивалентная задача сопряжения, в которой условия сопряжения задаются на характеристиках. Построенные неоднородные условия согласования однозначно определяют величину разрывов решения или его производных на характеристиках, причем данные разрывы сохраняются с ростом аргумента по времени.

При решении данной задачи возникают эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Для полученных интегральных уравнений доказано существование единственного решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости данных. Названный подход позволяет строить как точные решения, так и приближенные. Точные решения могут быть найдены в том случае, если удается разрешить эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры. В противном случае можно найти приближенное решение задачи либо в аналитическом, либо в численном виде. При этом при построении приближенного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при использовании численных методов решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Гордона–Фока, условия сопряжения, метод характеристик

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 1. – С. 7–13. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13

Academician Viktor I. Korzyuk[1], Ivan I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION FOR THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE KLEIN–GORDON–FOCK TYPE EQUATION WITH INHOMOGENEOUS MATCHING CONDITIONS

Abstract. The first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock type equation in the half strip is considered in the case when inhomogeneous matching conditions are fulfilled. The method of characteristics is used to prove that the fulfillment of the homogeneous matching conditions is not only sufficient but also a necessity for the existence of a unique smooth enough classical solution defined in the whole half strip. The equivalent conjugation problem is formulated when inhomogeneous conditions are fulfilled where conjugation conditions are set on the characteristics. Constructed inhomogeneous conditions uniquely define gaps of the solution or its derivatives on characteristics and given gaps are remained while the time-argument increases.

The solution of the problem is reduced to solving the second-type Volterra-integral equations. Theorems of existence and uniqueness of the solution in the class of the twice continuously differentiable functions were proven for these equations when the initial functions are smooth enough. This approach can be used in constructing as analytical solution, when the solution of the integral equation can be found explicitly, so for the approximate solution. Moreover, approximate solutions can be constructed in numerical and analytical form. When the numerical solution is constructed, the matching conditions are essential and they need to be considered while developing numerical methods.

Keywords: Klein–Gordon–Fock equation, conjugation conditions, method of characteristics

For citation: Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution for the first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock type equation with inhomogeneous matching conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 1, pp. 7–13 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13

Введение. В работе [1] с помощью метода характеристик исследовалась первая смешанная задача для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе. В результате было доказано, что выполнение условий согласования является достаточным для существования единственного классического решения, определенного в полуполосе. Однако в [2, с. 13–20] рассмотрен случай неоднородных условий согласования для первой смешанной задачи для волнового уравнения и приведено доказательство того, что выполнение условий согласования является не только достаточным, но и необходимым для существования единственного классического решения. Более того, в результате была поставлена корректная задача сопряжения, а также доказано существование и единственность классического решения первой смешанной задачи при выполнении неоднородных условий согласования.

В данной работе будет использован подход, описанный в [2, с. 13–20], для изучения неоднородных условий согласования в первой смешанной задаче для уравнения Клейна–Гордона–Фока. Кроме того, будет доказано, что выполнение условий согласования является не только достаточным, но и необходимым условием для существования единственного классического решения поставленной задачи.

Постановка задачи. Задача рассматривается на плоскости двух независимых переменных t, x. На замыкании $\overline{Q}$ области $Q = (0; \infty) \times (0; l)$ задается одномерное уравнение Клейна–Гордона–Фока

$$Lv = L^{(0)}v - \lambda(t, x)v = \partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v - \lambda(t, x)v = f(t, x), \tag{1}$$

где λ и f – функции, заданные на множестве $\overline{Q} = [0; \infty) \times [0; l] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Область Q изображена на рисунке. С помощью прямых $t = \dfrac{kl}{a}$, $k = 0, 1, \dots,$ область Q разбивается на подобласти $Q^{(k)}$, далее с помощью характеристик $x - at = -kl$, $x + at = (k+1)l$, $k = 0, 1, \dots,$ каждая из подобластей $Q^{(k)}$ разбивается на подмножества $Q^{(k,j)}$, такие, что $\overline{Q} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{4} \overline{Q^{(k,j)}}$.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$v(0, x) = \varphi(x), \partial_t v(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \tag{2}$$

$l \in \mathbb{R}, l < \infty,$ и граничные условия

$$v(t, 0) = \widetilde{\mu^{(0)}}(t), \; v(t, l) = \widetilde{\mu^{(l)}}(t), \quad t \in [0; \infty). \tag{3}$$

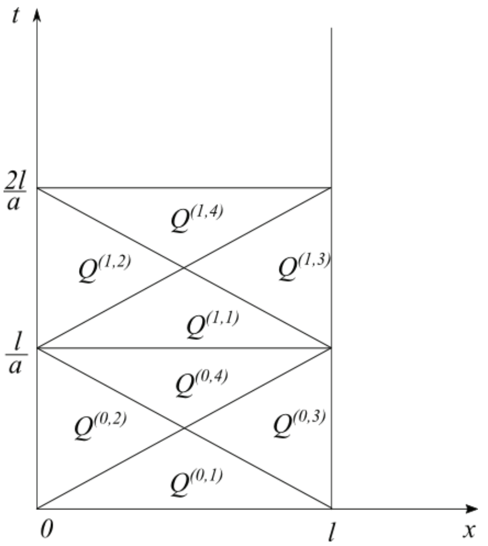
Как показано в [3; 4], задача (1)–(3) сводится к решению задачи для однородного уравнения

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t, x)u = 0, \tag{4}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \tag{5}$$

$$u(t, 0) = \mu^{(0)}(t), u(t, l) = \mu^{(l)}(t), \tag{6}$$

где $\mu^{(i)}(t) = \widetilde{\mu^{(i)}}(t) - w(t, i), i = 0, l.$ Здесь $w(t, i)$ – решение следующей задачи для неоднородного уравнения



Область Q

Domain Q

$$\partial_t^2 w - a^2 \partial_x^2 w - \lambda(t, x) w = f(t, x) \tag{7}$$

с однородными начальными условиями

$$w(0, x) = 0, \partial_t w(0, x) = 0, \quad x \in [0; l]. \tag{8}$$

Существование дважды непрерывно дифференцируемого решения задачи (7), (8) доказывается в [4].

В [1] доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(0)} \in C^2([0; +\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0; +\infty))$, $\varphi \in C^2([0; l])$, $\psi \in C^1([0; l])$. *Для того чтобы решение задачи (4)–(6) существовало и было единственным в классе* $C^2(\overline{Q})$, *достаточно выполнения однородных условий согласования*

$$\mu^{(0)}(0) = \varphi(0), \mu^{(l)}(0) = \varphi(l), \frac{1}{a} d\mu^{(0)}(0) = \frac{1}{a}\psi(0), \frac{1}{a} d\mu^{(l)}(0) = \frac{1}{a}\psi(l),$$
$$\frac{1}{a^2} d^2\mu^{(0)}(0) - d^2\varphi(0) - \frac{1}{a^2}\varphi(0)\lambda(0, 0) = 0, \frac{1}{a^2} d^2\mu^{(l)}(0) - d^2\varphi(l) - \frac{1}{a^2}\varphi(l)\lambda(0, l) = 0. \tag{9}$$

При этом решение u(t, x) задачи (4)–(6) определяется равенством $u(t, x) = u^{(k)}(t, x)$, $(t, x) \in \overline{Q^{(k)}}$, *в котором* $u^{(k)}(t, x)$ *задается формулой*

$$u^{(k)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int\limits_{-kl}^{x-at} \int\limits_{(k+1)l}^{x+at} (\lambda u^{(k)}) \left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right) d\eta d\xi + p^{(k)}(x - at) + g^{(k)}(x + at), \tag{10}$$

где функции $p^{(k)}(x - at)$, $g^{(k)}(x + at)$ *определяются в каждой из подобластей* $Q^{(k, j)}$ *с помощью начальных условий (5) и граничных условий (6).*

Неоднородные условия согласования. Рассмотрим теперь случай, когда выполняются неоднородные условия согласования в точках $\left(\frac{kl}{a}, 0\right)$ и $\left(\frac{kl}{a}, l\right)$.

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) - \varphi^{(k)}(0) = \sigma_0^{(k)}, \ \mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - \varphi^{(k)}(l) = \delta_0^{(k)},$$
$$-\frac{1}{a} d\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) + \frac{1}{a}\psi^{(k)}(0) = \sigma_1^{(k)}, \frac{1}{a} d\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - \frac{1}{a}\psi^{(k)}(l) = \delta_1^{(k)},$$
$$\frac{1}{a^2} d^2\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) - d^2\varphi^{(k)}(0) - \frac{1}{a^2}\left(\lambda\left(\frac{kl}{a}, 0\right)\varphi^{(k)}(0)\right) = \sigma_2^{(k)},$$
$$\frac{1}{a^2} d^2\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - d^2\varphi^{(k)}(l) - \frac{1}{a^2}\left(\lambda\left(\frac{kl}{a}, l\right)\varphi^{(k)}(l)\right) = \delta_2^{(k)}, \tag{11}$$

где $\varphi^{(k)} = u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)$, $\psi^{(k)} = \partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)$.

Введем следующие обозначения: $p^{(k,j)}(z) = p^{(k)}(z)$, $z \in \{x - at \,|\, (t, x) \in Q^{(k,j)}\}$, $g^{(k,j)}(y) = g^{(k)}(y)$, $y \in \{x + at \,|\, (t, x) \in Q^{(k,j)}\}$, $u^{(k,j)}(t, x) = u^{(k)}(t, x), (t, x) \in Q^{(k,j)}$. Справедлива следующая лемма

Л е м м а 1. *Пусть в области* $Q^{(k)}$ *выполняются неоднородные условия согласования (11), функции удовлетворяют следующим условиям гладкости:* $\lambda(t, x) \in C^1(Q)$, $\mu^{(0)} \in C^2([0; +\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0; +\infty))$, $\varphi^{(k)} \in C^2([0; l])$, $\psi^{(k)} \in C^1([0; l])$. *Тогда для решения* $u^{(k,j)}(t, x), (t, x) \in Q^{(k,j)}$ *задачи (4)–(6) справедливы следующие условия сопряжения:*

$$
\begin{gathered}
u^{(k,j+1)}(t,at-kl)-u^{(k,j)}(t,at-kl)=\sigma_0^{(k)},\\
\partial_x u^{(k,j+1)}(t,at-kl)-\partial_x u^{(k,j)}(t,at-kl)=\sigma_1^{(k)}-\frac{\sigma_0^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{kl}^{-kl+2at}\lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\right)d\eta,\\
\partial_x^2 u^{(k,j+1)}(t,at-kl)-\partial_x^2 u^{(k,j)}(t,at-kl)=\sigma_2^{(k)}+\frac{\sigma_1^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{-kl+2at}^{kl}\lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\right)d\eta+\\
+\frac{\sigma_0^{(k)}}{2a^2}\left(\int\limits_{-kl+2at}^{kl}\left(\frac{1}{4}\partial_x\lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\right)-\frac{1}{4a}\partial_t\lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\right)-\right.\right.\\
\left.\left.-\frac{1}{8a^2}\lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\right)\int\limits_{kl}^{2a\eta-kl}\lambda\left(\frac{\eta_1+kl}{2a},\frac{\eta_1-kl}{2}\right)d\eta_1\right)d\eta+\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)-\lambda(t,at-kl)\right),\\
j\in\{1,3\},\ t\in\left[\frac{kl}{a};\frac{(k+1)l}{a}\right],
\end{gathered}
\tag{12}
$$

$$
\begin{gathered}
u^{(k,j+2)}(t,(k+1)l-at)-u^{(k,j)}(t,(k+1)l-at)=\delta_0^{(k)},\\
\partial_x u^{(k,j+2)}(t,(k+1)l-at)-\partial_x u^{(k,j)}(t,(k+1)l-at)=\\
=\delta_1^{(k)}+\frac{\delta_0^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l-2at}^{-(k-1)l}\lambda\left(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\right)d\xi,\\
\partial_x^2 u^{(k,j+2)}(t,(k+1)l-at)-\partial_x^2 u^{(k,j)}(t,(k+1)l-at)=\\
=\delta_2^{(k)}+\frac{\delta_1^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l-2at}^{-(k-1)l}\lambda\left(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\right)d\xi+\\
+\frac{\delta_0^{(k)}}{2a^2}\left(\int\limits_{(k+1)l-2at}^{-(k-1)l}\left(\frac{1}{4}\partial_x\lambda\left(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\right)+\frac{1}{4a}\partial_t\lambda\left(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\right)+\right.\right.\\
\left.+\frac{1}{8a^2}\lambda\left(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\right)\int\limits_{(k+1)l-2a\xi}^{-(k-1)l}\lambda\left(\frac{(k+1)l-\xi_1}{2a},\frac{(k+1)l+\xi_1}{2}\right)d\xi_1\right)d\xi+\\
\left.+\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)-\lambda(t,(k+1)l-at)\right),\ j\in\{1,2\},\ t\in\left[\frac{kl}{a};\frac{(k+1)l}{a}\right],
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где константы $\delta_j^{(k)},\sigma_j^{(k)},\ j=\overline{0,2},$ *определяются по формулам (11).*

Для доказательства данной леммы достаточно приравнять значения решения (10) и его производных до второго порядка включительно в точках $(t,(k+1)l-at)$ и $(t,at-kl)$. □

С л е д с т в и е 1. *Какими бы ни были гладкими функции* $\mu^{(0)}(t),\mu^{(l)}(t),\varphi^{(k)}(x),\psi^{(k)}(x)$ *в задаче (4)–(6), при* $\sum\limits_{j=0}^{2}(\sigma_j^{(k)})^2+(\delta_j^{(k)})^2\neq 0$ *не существует классического решения этой задачи, определенного на* $\overline{Q^{(k)}}$.

Для доказательства показывается, что скачки, определяемые (12), (13), равны нулю тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=0}^{2}(\sigma_j^{(k)})^2+(\delta_j^{(k)})^2=0.$

Рассмотрим область $\tilde{Q}=\{(t,x)\in Q\,|\,x+at\neq(k+1)l\wedge x-at\neq -kl,\ k=0,1,2,...\},$, а также введем обозначения $\mathcal{M}^{(0)}=\{(t,x)\in Q\,|\,x+at=(k+1)l,\ k=0,1,2,...\},$ $\mathcal{M}^{(1)}=\{(t,x)\in Q\,|\,x-at=-kl,\ k=0,1,2,...\}$. Для дальнейших рассуждений понадобятся множества $\widetilde{Q^{(k)}}=\overline{Q^{(k)}}\bigcap\tilde{Q}$, $\mathcal{M}^{(0,k)}=\overline{Q^{(k)}}\bigcap\mathcal{M}^{(0)}$, $\mathcal{M}^{(1,k)}=\overline{Q^{(k)}}\bigcap\mathcal{M}^{(1)}$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть в области* $Q^{(k)}$ *функции* $\lambda(t,x)\in C^1(Q)$, $\mu^{(0)}\in C^2([0;+\infty))$, $\mu^{(l)}\in C^2([0;+\infty))$, $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$ *и* $\sum_{j=0}^{2}(\sigma_j^{(k)})^2+(\delta_j^{(k)})^2\neq 0$. *Тогда функция* $u^{(k)}(t,x)$, *определенная по (10), из класса* $C^2(\widetilde{Q^{(k)}})$ *является единственным классическим решением задачи (4)–(6) на* $\widetilde{Q^{(k)}}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования (11).*

З а м е ч а н и е. *Если* $\sigma_0^{(k)}=\delta_0^{(k)}=0$ *и* $\sum_{j=1}^{2}(\sigma_j^{(k)})^2+(\delta_j^{(k)})^2\neq 0$, *то функция* $u^{(k)}(t,x)$ *из класса* $C(\overline{Q})\bigcap C^2(\widetilde{Q^{(k)}})$, *определенная по (10), является единственным классическим решением задачи (4)–(6) на* $\widetilde{Q^{(k)}}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования (11).*

Можно сформулировать аналогичные замечания для случая, когда $\delta_j^{(k)}=0,\ j=\overline{0,2}$, и $\sum_{j=0}^{2}(\sigma_j^{(k)})^2\neq 0$, а также при различных случаях, когда какие-либо из значений $\sigma_j^{(k)}$ и $\delta_j^{(k)}$ обращаются в нуль.

Выведем зависимость скачков $\sigma_j^{(k)},\delta_j^{(k)}$ от $\sigma_j^{(k-1)},\delta_j^{(k-1)},\ j=\overline{0,2}$.

Л е м м а 2. *Пусть в области* $Q^{(k-1)}$ *выполняются неоднородные условия согласования (11). Тогда справедливы следующие выражения, определяющие зависимость* $\sigma_j^{(k)}$ *от* $\delta_j^{(k-1)},\ j=\overline{0,2}$:

$$\sigma_0^{(k)}=-\delta_0^{(k-1)},\ \sigma_1^{(k)}=\delta_1^{(k-1)}+\frac{\delta_0^{(k-1)}}{4a^2}\int_{-kl}^{2l-kl}\lambda\left(\frac{kl-\xi}{2a},\frac{kl+\xi}{2}\right)d\xi,$$
$$\sigma_2^{(k)}=-\delta_2^{(k-1)}+\frac{1}{16a^4}\int_{2l-kl}^{-kl}\left(4a^2\delta_1^{(k-1)}+\delta_0^{(k-1)}\int_{\xi}^{2l-kl}\lambda\left(\frac{kl-\tau}{2a},\frac{kl+\tau}{2}\right)d\tau\right)\times$$
$$\times\lambda\left(\frac{kl-\xi}{2a},\frac{kl+\xi}{2}\right)d\xi+\frac{\delta_0^{(k-1)}}{8a^2}\int_{2l-kl}^{-kl}\partial_x\lambda\left(\frac{kl-\xi}{2a},\frac{kl+\xi}{2}\right)+\frac{1}{a}\partial_t\lambda\left(\frac{kl-\xi}{2a},\frac{kl+\xi}{2}\right)d\xi+ \tag{14}$$
$$+\frac{\delta_0^{(k-1)}}{2a^2}\left(\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)+\lambda\left(\frac{(k-1)l}{a},l\right)\right),$$

а также зависимость $\delta_j^{(k)}$ *от* $\sigma_j^{(k-1)},\ j=\overline{0,2}$,

$$\delta_0^{(k)}=-\sigma_0^{(k-1)},\ \delta_1^{(k)}=-\sigma_1^{(k-1)}+\frac{\sigma_0^{(k-1)}}{4a^2}\int_{(k+1)l}^{(k-1)l}\lambda\left(\frac{\eta+(k-1)l}{2a},\frac{\eta-(k-1)l}{2}\right)d\eta,$$
$$\delta_2^{(k)}=-\sigma_2^{(k-1)}+\frac{\sigma_0^{(k-1)}}{2a^2}\left(\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)+\lambda\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\right)+\frac{\sigma_0^{(k-1)}}{8a^2}\int_{(k+1)l}^{(k-1)l}\partial_x\lambda\left(\frac{\eta+(k-1)l}{2a},\frac{\eta-(k-1)l}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{a}\partial_t\lambda\left(\frac{\eta+(k-1)l}{2a},\frac{\eta-(k-1)l}{2}\right)d\eta+\frac{1}{16a^4}\int_{(k+1)l}^{(k-1)l}\lambda\left(\frac{\eta+(k-1)l}{2a},\frac{\eta-(k-1)l}{2}\right)\times \tag{15}$$
$$\times\left(-4a^2\sigma_1^{(k-1)}+\sigma_0^{(k-1)}\int_{(k-1)l}^{\eta}\lambda\left(\frac{\tau+(k-1)l}{2a},\frac{\tau-(k-1)l}{2}\right)d\tau\right)d\eta.$$

Для доказательства данной леммы необходимо вычислить разности функций $d^ip^{(k,j+1)}(-kl)-d^ip^{(k,j)}(-kl),\ i=\overline{0,2},\ j=1,3,$ а также разности функций $d^ig^{(k,j+2)}((k+1)l)-d^ig^{(k,j)}((k+1)l)$, $i=\overline{0,2},\ j=1,2,\ k=1,2,...,$ и подставить в полученные разности значение выражений $\varphi^{(k)}(x)=u^{(k-1,4)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$ и $\psi^{(k)}(x)=\partial_tu^{(k-1,4)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$.

С л е д с т в и е 3. *Неоднородные условия согласования (11) выполняются при некотором k тогда и только тогда, когда они выполняются для $k-1$.*

Данное следствие вытекает из систем линейных алгебраических уравнений (14) и (15) относительно $\sigma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$.

Таким образом из леммы 2 и следствия 3 получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(0)} \in C^2([0;+\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0;+\infty))$, $\varphi \in C^2([0;l])$, $\psi \in C^1([0;l])$. *Решение задачи (4)–(6), определяемое (10) и удовлетворяющее условиям сопряжения (12) и (13), является единственным классическим в области $\tilde{Q}$ тогда и только тогда, когда выполнены неоднородные условия согласования*

$$\mu^{(0)}(0)-\varphi(0)=\sigma_0^{(0)},\ \mu^{(l)}(0)-\varphi(l)=\delta_0^{(0)}, -\frac{1}{a}d\mu^{(0)}(0)+\frac{1}{a}\psi(0)=\sigma_1^{(0)},$$

$$\frac{1}{a}d\mu^{(l)}(0)-\frac{1}{a}\psi(l)=\delta_1^{(0)}, \frac{1}{a^2}d^2\mu^{(0)}(0)-d^2\varphi(0)-\frac{1}{a^2}\lambda(0,0)\varphi(0)=\sigma_2^{(0)},$$

$$\frac{1}{a^2}d^2\mu^{(l)}(0)-d^2\varphi(l)-\frac{1}{a^2}\lambda(0,l)\varphi(l)=\delta_2^{(0)}.$$

С л е д с т в и е 4. *Пусть* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(0)} \in C^2([0;+\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0;+\infty))$, $\varphi \in C^2([0;l])$, $\psi \in C^1([0;l])$. *Решение задачи (4)–(6) существует и единственно в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (9), т. е.* $\sigma_j^{(0)}=\delta_j^{(0)}=0,\ j=\overline{0,2}.$

Неоднородное уравнение с неоднородными условиями согласования. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1). В силу линейности общее решение данного уравнения можно представить как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения $v(t,x)=u(t,x)+w(t,x)$. В качестве задачи для неоднородного уравнения рассмотрим задачу (7), (8).

Как было показано в [4], общее решение (7) в области $Q^{(k)}$ можно записать в виде

$$w^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{x-at}dy\int_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda w^{(k)}+f)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dz+h^{(1,k)}(x-at)+h^{(2,k)}(x+at), \tag{16}$$

где $h^{(1,k)} \in C^2([-(k+1)l;-(k-1)l]), h^{(2,k)} \in C^2([kl;(k+2)l])$ – произвольные функции и $L^{(0)}h^{(j,k)}(x+(-1)^j at)=0, j=1,2.$ Решение интегрального уравнения (16) может быть построено с помощью метода последовательных приближений, при этом оно существует и единственно в классе $C^2(Q^{(k)})$, если функции $h^{(j,k)}, j=1,2,$ принадлежат классу C^2 на области своего задания и $\lambda(t,x), f(t,x) \in C^1(\overline{Q})$.

Решение (7) в области $\overline{Q}$ определяем с помощью функций $w^{(k)}(t,x)$ следующим образом: $w(t,x)=w^{(k)}(t,x), (t,x) \in \overline{Q^{(k)}}$. В силу того, что решение задачи $w(t,x)$ является дважды непрерывно дифференцируемым на множестве $\overline{Q}$, сформулируем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\lambda, f \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(0)} \in C^2([0;+\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0;+\infty))$, $\varphi \in C^2([0;l])$, $\psi \in C^1([0;l])$. *Решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условиям сопряжения (12) и (13), является единственным классическим в области $\tilde{Q}$ тогда и только тогда, когда выполнены неоднородные условия согласования*

$$\begin{gathered}\widetilde{\mu^{(0)}}(0)-\varphi(0)=\sigma_0^{(0)},\ \widetilde{\mu^{(l)}}(0)-\varphi(l)=\delta_0^{(0)},\\ -\frac{1}{a}d\widetilde{\mu^{(0)}}(0)+\frac{1}{a}\psi(0)=\sigma_1^{(0)}, \frac{1}{a}d\widetilde{\mu^{(l)}}(0)-\frac{1}{a}\psi(l)=\delta_1^{(0)},\\ \frac{1}{a^2}d^2\widetilde{\mu^{(0)}}(0)-d^2\varphi(0)-\frac{1}{a^2}(\lambda(0,0)\varphi(0)+f(0,0))=\sigma_2^{(0)},\\ \frac{1}{a^2}d^2\widetilde{\mu^{(l)}}(0)-d^2\varphi(l)-\frac{1}{a^2}(\lambda(0,l)\varphi(l)+f(0,l))=\delta_2^{(0)}.\end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство данной теоремы сводится к тому, что решение $w(t, x)$ задачи (7), (8) принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$, а задача (1)–(3) является линейной. Аналогичные рассуждения приводят к справедливости (12) и (13) для неоднородного уравнения.

С л е д с т в и е 5. *Пусть* $\lambda, f \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(0)} \in C^2([0; +\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0; +\infty))$, $\varphi \in C^2([0; l])$, $\psi \in C^1([0; l])$. *Решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (17).*

Заключение. В данном сообщении рассмотрена первая смешанная задача для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока в случае, когда выполняются неоднородные условия согласования. Доказано, что выполнение однородных условий согласования является необходимым и достаточным условием для существования единственного классического решения поставленной задачи из класса $C^2(\overline{Q})$. В случае, когда выполняются неоднородные условия согласования, поставлена эквивалентная задача сопряжения, результаты которой можно применять при численном моделировании.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.

2. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 2. – 52 с.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.

4. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.

References

1. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. https://doi.org/10.1134/s0012266114080084

2. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical problem solutions for hyperbolic equations: A course of lectures in 10 parts*. Minsk, 2017, part 2. 52 p. (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with nonlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).

4. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with the nonlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Столярчук Иван Игоревич – магистр физ.-мат. наук, аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Stolyarchuk Ivan Igorevich – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.